한국소음진동공학회 2003년도 춘계학술대회논문집, pp. 526~531.

변조 좌표계를 이용한 비대칭 회전체계의 일반화된 모드해석

Generalized modal analysis of asymmetrical rotor system using modulated coordinates

서정환* · 홍성욱** · 이종원***

Jeong-Hwan Suh, Seong-Wook Hong and Chong-Won Lee

Key Words : Asymmetrical Rotor System(비대칭 회전체계), Modulated Stationary Coordinates(변조정지좌표), Directional Frequency Response Function(방향성 주파수 응답 함수), Modal Analysis(모드해석)

ABSTRACT

Conventional modal analysis techniques are known to be inappropriate for asymmetrical rotor systems, when the equations of motion are written in the stationary coordinates, due to the presence of time varying parameters. This paper presents a generalized modal analysis method for asymmetrical rotor systems in the stationary coordinates, employing the modulated coordinates and the lambda matrix formulation. A numerical example with a flexible asymmetric rotor model is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed modal analysis method. As an application of the proposed method, modal analysis is also performed with an open cracked rotor system.

1. 서 론

산업현장에서 사용중인 비대칭 회전체를 이론적인 관점에서 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 첫째는 비대칭 관성모멘트가 존재하는 것으로 두 개의 회전익이 있는 프로펠러를 예로 들 수 있다. 또 다른 하나는 비대칭 강성이 있는 것으로 2극 발전기 회전축과 같이 축단면이 원형의 형태가 아닌 것, 또는 회전축에 키홈이나 균열이 존재하는 경우이다. 일반적인 정지 구조물에 대한 모드해석 및 모드시험법에 대한 연구결과는 지속적인 관심으로 인해 많이 축적되어져 왔으나 회전체계에 관한 모드해석 및 모드시험법에 대한 연구결과는 비교적 많지 않다. 특히 비대칭 회전체계 모드해석의 경우 시변 시스템 파라미터를 갖는 운동방정식인 Hill방정식[1]이 유도되므로 더욱 문제가 복잡해지며 연구결과 또한 제한적이다.

이론적으로 이 문제를 푸는 한 가지 방법은 시변고유벡터를 상정하여 모드해석을 하는 방법이다 [2]. 이 방법은 주기함수 형태의 시변 파라미터를 갖는 회전체계에 유용하게 적용될 수 있으며 완전한 해를 얻을 수 있는 방법으로 알려져 있다. 그러나, 실수변수를 기반으로 이론을 전개하였기 때문에 회전체 문제에서 발생하는 문제에서 근본적인 해를 제공하는 복소변수로 이론을 확장할 필요가 있다. 비대칭 회전체의 또 다른 유용한 해석법으로 좌표계 변환법이 있다. 이는 정지좌표계에서 정의된 시변 운동방정식을 회전좌표계로 변환하여 해석하는 것이다 [3-5]. 등방성 베어링으로 지지된 축대칭 회전체의 회전좌표계 운동방정식 시스템 행렬은 이 때 시불변(time invariant) 특성을 갖게 된다. 따라서 이종원[4]이 제안한 정지좌표계 비등방성 회전체의 복소 모드 해석 기법을 그대로 적용할 수 있다. 그러나 비록 이와 같은 방법론이 이론적인 해석법으로는 매우 유용한 것으로 판단되나, 실험적인 관점에서 회전좌표계에서의 측정과 가진이 용이하지 않기 때문에 비대칭 회전체계의 모드시험법으로서 적용하기에는 불편한 점이 있다. 이러한 불편을 개선하기 위해 이종원 등은 좌표변조기법을 이용하는 복소모드시험 방법을 제시하였다[6,7]. 이 방법으로 정지좌표계의 관점에서 측정된 가진력/변위의 측정신호로부터 n/r-dFRFs (normal and reverse directional frequency response functions)을 구성하는 것이 가능하다는 것을 증명하였다. 이들은 하나의 센서와 두 개의 가진기, 혹은 두 개의 센서와 하나의 가진기로 정지좌표계 관점에서 n/r-dFRF를 용이하게 측정할 수 있다는 것을 제시하였다. 그러나, 주파수 응답 함수의 측정 및 분석에 주력하였으며 변조복소좌표계에서의 고유진동수 또는 고유벡터를 명확히 정의하지 않았다. 또한 낮은 자유도를 갖는 단순 회전체로 국한한 해석을 하였다.

본 논문의 주된 목적은 일반적인 비대칭 회전체의 해석과 모드시험에 유용한 일반 복소모드해석 기법을 제시하는 것이다. 특히 본연구에서는 정지좌표계 관점에서 비대칭성이 존재하는 탄성회전체계의 모드해석을 통해 고유치 및 고유벡터를 명확히 제시하며 그들의 상관관계를 정확히 밝혀내고자 한다. 이를 위해 변조복소정지좌표(modulated complex stationary coordinates)를 사용하였으며, 고유치 문제를 유도하기 위해 람다행렬(lambda-matrix)[3] 기법을 활용하였다. 또한 이를 근거로 시불변 매개변수로 표현되는 등가의 운동방정식을 얻었으며 변조된 좌표계에서 얻어지는 고유치 문제에서 고유치와 고유벡터를 결정하였다. 이렇게 얻어지는 고유치와 고유벡터를 모드확장이론에 적용하여 얻어진 주파수 응답 함수와 동강성 행렬의 역행렬 계산 방법에 의해 얻어진 주파수 응답 함수가 잘 일치함을 확인하였다.

한편 비대칭 회전체에 대한 시간영역에서의 등가 시불변 운동방정식을 기반으로 변조복소좌표계에서의 고유치와 고유벡터의 특성에 대해서도 자세하게 기술하였다. 특히, 변조복소정지좌표계에서 구해진 고유진동수가 회전좌표계에서 구해지는 고유진동수에서 회전속도 만큼 감소되어

* KAIST 기계공학과

** 금오공과대학교 기계공학부

*** 책임저자, KAIST 기계공학과
Email: cwlee@novic.kaist.ac.kr
Phone: 042-869-3016, Fax: 042-869-8220

대응되는 고유진동수 값이라는 것을 확인하였다. 또한 비등방성 회전체의 정지좌표계에서의 고유진동수에서는 공액 고유진동수가 존재하는데 반해서 변조좌표계에서 비대칭 회전체에서의 고유치는 공액값에 회전속도의 2배수로 증가된 값에 대응되는 고유치가 존재하게 된다는 사실도 확인되었다.

제시된 모드해석법의 검증 및 실용적인 예를 보이기 위해 두 개의 디스크를 포함한 탄성 회전축에 비대칭인 요소가 존재하는 예제를 고려하였으며 응용 예로서 비선형 거동을 배제한 열린 균열 모형 [9,10]을 기반으로 회전축의 균열진단에 적용 가능성을 확인 하였다.

2. 운동방정식 및 모드해석

변조복소좌표계(modulated complex coordinate system)를 사용하여 비등방성 베어링으로 지지되어 있는 비대칭 회전체계의 운동방정식을 기술하면 다음과 같다[7].

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}_f & \mathbf{M}_r\\ \overline{\mathbf{M}}_r & \overline{\mathbf{M}}_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{p}}(t)\\ \ddot{\overline{\mathbf{p}}}(t)e^{j2\Omega t}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{C}_f & \mathbf{C}_r\\ \overline{\mathbf{C}}_r & \overline{\mathbf{C}}_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{p}}(t)\\ \dot{\overline{\mathbf{p}}}(t)e^{j2\Omega t}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_f & \mathbf{K}_r\\ \overline{\mathbf{K}}_r & \overline{\mathbf{K}}_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}(t)\\ \overline{\mathbf{p}}(t)e^{j2\Omega t}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{g}(t)\\ \overline{\mathbf{g}}(t)e^{j2\Omega t}\end{Bmatrix} \tag{1}$$

여기서 $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{C}_i$ 와 $\mathbf{K}_i$ 는 유한 요소법 등으로 구성된 질량, 감쇠 및 강성 행렬이며 행렬에 표시된 $i=f,r$ 의 첨자는 평균값(mean value) 및 편차값(deviatoric value) 을 나타낸다. $\mathbf{p}(t)$ 는 복소변위벡터이고, $\mathbf{g}(t)$ 는 복소가진벡터이며, Ω는 회전속도이다.

2.1 방향성 주파수 응답 행렬(directional frequency response matrix, dFRM) 직접 계산법

식(1)에 라플라스변환을 적용하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{D}_f(s) & \mathbf{D}_r(s-j2\Omega)\\ \hat{\mathbf{D}}_r(s) & \hat{\mathbf{D}}_f(s-j2\Omega)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{P}(s)\\ \hat{\mathbf{P}}(s-j2\Omega)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{G}(s)\\ \hat{\mathbf{G}}(s-j2\Omega)\end{Bmatrix} \tag{2}$$

여기서 D는 동강성 행렬(dynamic stiffness matrix)로서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_f(s)&=\mathbf{K}_f+s^2\mathbf{M}_f+s\mathbf{C}_f\\ \mathbf{D}_r(s-j2\Omega)&=\mathbf{K}_r+(s-j2\Omega)^2\mathbf{M}_r+(s-j2\Omega)\mathbf{C}_r\\ \hat{\mathbf{D}}_r(s)&=\overline{\mathbf{K}}_r+s^2\overline{\mathbf{M}}_r+s\overline{\mathbf{C}}_r\\ \hat{\mathbf{D}}_f(s-j2\Omega)&=\overline{\mathbf{K}}_f+(s-j2\Omega)^2\overline{\mathbf{M}}_f+(s-j2\Omega)\overline{\mathbf{C}}_f\end{aligned}$$

따라서 식(2)로부터 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{P}(s)\\ \hat{\mathbf{P}}(s-j2\Omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{H}_{gp}(s) & \mathbf{H}_{g\bar{p}}(s)\\ \mathbf{H}_{\bar{g}p}(s) & \mathbf{H}_{\bar{g}\bar{p}}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{G}(s)\\ \hat{\mathbf{G}}(s-j2\Omega)\end{bmatrix} \tag{4}$$

여기서 주파수 응답행렬 H는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{gp}(s)&=\left[\mathbf{D}_f(s)-\mathbf{D}_r(s-j2\Omega)\hat{\mathbf{D}}_f(s-j2\Omega)^{-1}\hat{\mathbf{D}}_r(s)\right]^{-1}\\ \mathbf{H}_{g\bar{p}}(s)&=-\left[\mathbf{D}_f(s)-\mathbf{D}_r(s-j2\Omega)\hat{\mathbf{D}}_f(s-j2\Omega)^{-1}\hat{\mathbf{D}}_r(s)\right]^{-1}\\ &\quad\times\mathbf{D}_r(s-j2\Omega)\hat{\mathbf{D}}_f(s-j2\Omega)^{-1}\\ \mathbf{H}_{\bar{g}p}(s)&=-\left[\hat{\mathbf{D}}_f(s-j2\Omega)-\hat{\mathbf{D}}_r(s)\mathbf{D}_r(s)^{-1}\mathbf{D}_r(s-j2\Omega)\right]^{-1}\\ &\quad\times\hat{\mathbf{D}}_r(s)\mathbf{D}_f(s)\\ \mathbf{H}_{\bar{g}\bar{p}}(s)&=\left[\hat{\mathbf{D}}_f(s-j2\Omega)-\hat{\mathbf{D}}_r(s)\mathbf{D}_f(s)^{-1}\mathbf{D}_r(s-j2\Omega)\right]^{-1}\end{aligned} \tag{5}$$

2.2 변조좌표계에서 모드해석

공액복소정지좌표 $\overline{\mathbf{p}},\dot{\overline{\mathbf{p}}},\ddot{\overline{\mathbf{p}}}$ 과 변조복소정지좌표 $\tilde{\mathbf{p}},\dot{\tilde{\mathbf{p}}},\ddot{\tilde{\mathbf{p}}}$ 의 관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{p}}(t)&=\tilde{\mathbf{p}}(t)e^{-j2\Omega t}\\ \dot{\overline{\mathbf{p}}}(t)&=\left\{\dot{\tilde{\mathbf{p}}}(t)-j2\Omega\tilde{\mathbf{p}}(t)\right\}e^{-j2\Omega t}\\ \ddot{\overline{\mathbf{p}}}(t)&=\left\{\ddot{\tilde{\mathbf{p}}}(t)-j4\Omega\dot{\tilde{\mathbf{p}}}(t)-4\Omega^2\tilde{\mathbf{p}}(t)\right\}e^{-j2\Omega t}\end{aligned} \tag{6}$$

식(6) 을 운동방정식 (1)에 대입하여 변조된 복소정지좌표계에서의 운동방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}_f & \mathbf{M}_r\\ \overline{\mathbf{M}}_r & \overline{\mathbf{M}}_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{p}}\\ \ddot{\tilde{\mathbf{p}}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{C}_f & \mathbf{C}_r-j4\Omega\mathbf{M}_r\\ \overline{\mathbf{C}}_r & \overline{\mathbf{C}}_f-j4\Omega\overline{\mathbf{M}}_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{p}}\\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_f & \mathbf{K}_r-j2\Omega\mathbf{C}_r-4\Omega^2\mathbf{M}_r\\ \overline{\mathbf{K}}_r & \overline{\mathbf{K}}_f-j2\Omega\overline{\mathbf{C}}_f-4\Omega^2\overline{\mathbf{M}}_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}\\ \tilde{\mathbf{p}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{g}(t)\\ \tilde{\mathbf{g}}(t)\end{Bmatrix} \tag{7}$$

시간영역에서의 상태방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{w}}(t)=\mathbf{B}\mathbf{w}(t)+\mathbf{f}(t) \tag{8}$$

여기서

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_f & \mathbf{M}_r\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{M}}_r & \overline{\mathbf{M}}_f\\ \mathbf{M}_f & \mathbf{M}_r & \mathbf{C}_f & \mathbf{C}_r-j4\Omega\mathbf{M}_r\\ \overline{\mathbf{M}}_r & \overline{\mathbf{M}}_f & \overline{\mathbf{C}}_r & \overline{\mathbf{C}}_f-j4\Omega\overline{\mathbf{M}}_f\end{bmatrix}_{4N\times4N}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_f & \mathbf{M}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \overline{\mathbf{M}}_r & \overline{\mathbf{M}}_f & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_f & -\mathbf{K}_f+j2\Omega\mathbf{C}_r+4\Omega^2\mathbf{M}_r\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\overline{\mathbf{K}}_r & -\overline{\mathbf{K}}_f+j2\Omega\overline{\mathbf{C}}_f+4\Omega^2\overline{\mathbf{M}}_f\end{bmatrix}_{4N\times4N}$$

그리고

$$\mathbf{w}(t)=\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{p}}(t)\\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}}(t)\\ \mathbf{p}(t)\\ \tilde{\mathbf{p}}(t)\end{Bmatrix},\quad\mathbf{f}(t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{g}(t)\\ \tilde{\mathbf{g}}(t)\end{Bmatrix}$$

여기서 다음과 같은 형태의 해를 가정하자.

$$\mathbf{w}(t)=\mathbf{r}e^{\lambda t}=\begin{Bmatrix}\lambda\mathbf{u}\\ \lambda\breve{\mathbf{u}}\\ \mathbf{u}\\ \breve{\mathbf{u}}\end{Bmatrix}e^{\lambda t} \tag{9}$$

이 때 식(8)에 관련된 고유치문제 및 수반고유치문제(adjoint eigenvalue problem)는 다음과 같다:

$$\lambda_r^i\mathbf{A}\mathbf{r}_r^i=\mathbf{B}\mathbf{r}_r^i \text{ and } \bar{\lambda}_r^i\bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{l}}_r^i=\bar{\mathbf{B}}^T\bar{\mathbf{l}}_r^i \tag{10}$$

여기서 $r=\pm1,\pm2,...,\pm N$, $i=B,F$ 이며 좌측 및 우측 고유벡터는 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{r}=\begin{Bmatrix}\lambda\mathbf{u}_c\\ \mathbf{u}_c\end{Bmatrix},\bar{\mathbf{l}}=\begin{Bmatrix}\bar{\lambda}\mathbf{v}_c\\ \mathbf{v}_c\end{Bmatrix}\quad\mathbf{u}_c=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \breve{\mathbf{u}}\end{Bmatrix},\ \mathbf{v}_c=\begin{Bmatrix}\mathbf{v}\\ \breve{\mathbf{v}}\end{Bmatrix}$$

식(10)에서 얻어지게 되는 고유치와 고유벡터는 다음과 같은 직교조건(bi-orthogonality condition)을 만족하도록 정규화할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{l}}_s^{kT}\mathbf{A}\mathbf{r}_r^i=\delta_{sr}^{ki},\ \bar{\mathbf{l}}_s^{kT}\mathbf{B}\mathbf{r}_r^i=\lambda_r^i\delta_{sr}^{ki} \tag{11}$$

여기서 $r,s=\pm1,\ldots\pm N$, $i,k=B,F$ 이다.

식(10)의 고유치 문제를 만족하는 해는 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{p}(t)\\ \bar{\mathbf{p}}(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{p}(t)\\ \bar{\mathbf{p}}(t)e^{j\Omega t}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \breve{\mathbf{u}}\end{Bmatrix}e^{\lambda t} \tag{12}$$

이를 특정 모드에 대해 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\mathbf{p}(t)=\mathbf{u}_r^ie^{\lambda_r^it}\\ &\tilde{\mathbf{p}}(t)=\bar{\mathbf{p}}(t)e^{j2\Omega t}=\bar{\mathbf{u}}_s^ke^{(\bar{\lambda}_s^k+j2\Omega)t}=\breve{\mathbf{u}}_r^ie^{\lambda_r^it}\end{aligned} \tag{13}$$

식(13)을 만족하기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{u}}_s^k=\breve{\mathbf{u}}_r^i \tag{14}$$

$$\bar{\lambda}_s^k+j2\Omega=\lambda_r^i \tag{15}$$

일반적으로 이를 만족하기 위해서는 다음 두 조건 중 하나를 충족시켜야 한다.

$$s=-r,\ i=k \tag{16}$$

$$s=r,i=k,\ \mathrm{Im}\left[\lambda_r^i\right]=\Omega \tag{17}$$

식(17)은 일반적으로 성립하지는 않으므로 식(16)의 조건으로부터 고유치와 고유벡터는 다음과 같은 관계를 만족한다는 것을 알 수 있다.

$$\lambda_r^i,\quad \lambda_{-r}^i\left(=\bar{\lambda}_r^i+j2\Omega\right) \tag{18}$$

$$\mathbf{u}_{cr}^{\ i}=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \breve{\mathbf{u}}\end{Bmatrix}_r^i\ \mathbf{u}_{c-r}^{\ i}=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \breve{\mathbf{u}}\end{Bmatrix}_{-r}^i=\begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{v}}\\ \bar{\breve{\mathbf{v}}}\end{Bmatrix}_r^i \tag{19}$$

마찬가지로 방법으로 수반고유벡터(adjoint-eigenvector)는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\mathbf{v}_{cr}^{\ i}=\begin{Bmatrix}\mathbf{v}\\ \breve{\mathbf{v}}\end{Bmatrix}_r^i,\mathbf{v}_{c-r}^{\ i}=\begin{Bmatrix}\mathbf{v}\\ \breve{\mathbf{v}}\end{Bmatrix}_{-r}^i=\begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{v}}\\ \bar{\breve{\mathbf{v}}}\end{Bmatrix}_r^i$$

여기서 $r=\pm1,\pm2,\ldots\pm N$ $i,k=B,F$ 이다.

이상과 같이 얻어진 고유치와 고유벡터를 모드 확장식에 적용하면 다음과 같이 모드합에 의한 방향성 주파수 응답 행렬을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{H}_{gp}(j\omega)=\sum_{i=B,F}\sum_{r=-N}^{N}{}'\left[\frac{\mathbf{u}\bar{\mathbf{v}}^T}{j\omega-\lambda}\right]_r^i \tag{20}$$

$$\mathbf{H}_{\tilde{g}p}(j\omega)=\sum_{i=B,F}\sum_{r=-N}^{N}{}'\left[\frac{\mathbf{u}\bar{\breve{\mathbf{v}}}^T}{j\omega-\lambda}\right]_r^i=\sum_{i=B,F}\sum_{r=-N}^{N}{}'\left[\frac{\mathbf{u}_r^i\breve{\mathbf{v}}_{-r}^{i\,T}}{j\omega-\lambda_r^i}\right] \tag{21}$$

여기서 $\sum_{r=-N}^{N}{}'$는 $r=0$를 제외한 합을 의미한다.

2.3 좌표계와 고유진동수의 상관관계

비대칭 회전체계의 운동방정식을 회전좌표계에서 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\mathbf{M}_f & \mathbf{M}_r\\ \bar{\mathbf{M}}_r & \bar{\mathbf{M}}_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{q}}\\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{C}_f+j2\Omega\mathbf{M}_f & \mathbf{C}_r-j2\Omega\mathbf{M}_r\\ \bar{\mathbf{C}}_r+j2\Omega\bar{\mathbf{M}}_r & \bar{\mathbf{C}}_f-j2\Omega\bar{\mathbf{M}}_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}\end{Bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_f+j\Omega\mathbf{C}_f-\Omega^2\mathbf{M}_f & \mathbf{K}_r-j\Omega\mathbf{C}_r-\Omega^2\mathbf{M}_r\\ \bar{\mathbf{K}}_r+j\Omega\bar{\mathbf{C}}_r-\Omega^2\bar{\mathbf{M}}_r & \bar{\mathbf{K}}_f-j\Omega\bar{\mathbf{C}}_f-\Omega^2\bar{\mathbf{M}}_f\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{q}\\ \bar{\mathbf{q}}\end{Bmatrix}\\ &=\begin{Bmatrix}\mathbf{g}(t)e^{-j\Omega t}\\ \bar{\mathbf{g}}(t)e^{j\Omega t}\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{22}$$

여기서 복소정지좌표 $\mathbf{p}(t)$와 복소회전좌표 $\mathbf{q}(t)$의 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{p}(t)=\mathbf{q}(t)e^{j\Omega t}$$

한편, 정지좌표계에서의 고유치와 회전좌표계에서의 고유치 간의 상관관계를 확인하기 위해 다음과 같은 식을 고려하자.

만약 $\mathbf{D}(\lambda)$는 식(7)의 변조복소정지좌표계에서 정의된 동강성 람다행렬이며 $\det[\mathbf{D}(\lambda)]=0$ 라면 다음 식이 성립한다.

$$\det[\mathbf{D}_{rot}(\lambda-j\Omega)]=0$$

여기서, $\mathbf{D}_{rot}(\lambda)$는 식(22)에서 정의된 동강성 람다행렬

로서 다음과 같다.

$$\mathbf{D}_{rot}(\lambda)=\lambda^2\begin{bmatrix}\mathbf{M}_f & \mathbf{M}_r\\ \overline{\mathbf{M}}_r & \overline{\mathbf{M}}_f\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}\mathbf{C}_f+j2\Omega\mathbf{M}_f & \mathbf{C}_r-j2\Omega\mathbf{M}_r\\ \overline{\mathbf{C}}_r+j2\Omega\overline{\mathbf{M}}_r & \overline{\mathbf{C}}_f-j2\Omega\overline{\mathbf{M}}_f\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_f+j\Omega\mathbf{C}_f-\Omega^2\mathbf{M}_f & \mathbf{K}_r-j\Omega\mathbf{C}_r-\Omega^2\mathbf{M}_r\\ \overline{\mathbf{K}}_r+j\Omega\overline{\mathbf{C}}_r-\Omega^2\overline{\mathbf{M}}_r & \overline{\mathbf{K}}_f-j\Omega\overline{\mathbf{C}}_f-\Omega^2\overline{\mathbf{M}}_f\end{bmatrix}$$

따라서 정지좌표계 및 회전좌표계에서의 고유치를 각각 λ,μ 라고 하면 $\mu=\lambda-j\Omega$ 가 만족하게 된다. Table 1에는 고유치들 간의 관계를 요약해서 보여주고 있다.

3. 탄성 비대칭 회전체 모드 해석

3.1 일반 비대칭 회전체 모드 해석

Fig.1에 도시된 비대칭 회전체계를 유한요소법으로 모형화하였다. 26개의 레일레이 보요소(Rayleigh beam element)와 집중질량 및 관성으로 표현된 두 개의 디스크 그리고 등방성인 두 개의 볼 베어링으로 구성되어 있다. Table 2에 기하학적인 형상 및 물성치에 관련된 데이터를 표시하였다. 비대칭성에 의한 고유진동수의 변화 효과 및 불안정영역을 확대하기 위해 비대칭성을 크게 인가하였다. 즉, 회전축 중앙부위의 3요소, 15,16, 17번 요소들의 상,하에 동일한 단을 두었으며 단의 깊이를 a/D=0.25로 설정하였다. 이와 같은 단에 의해 축의 굽힘 강성에 비대칭성이 존재하게 된다. 이 회전체에 대해 정지좌표 및 회전좌표에서 구한 휠차트(whirl chart)를 Figs 2, 3에서 보여주고 있다. 두 그림을 비교하면 회전좌표계의 고유치와 정지좌표계의 고유치간의 관계식 $\mu_r^i=\lambda_r^i-j\Omega$ 을 확인할 수 있다. 또한, 고유치 표시선이 사라지는 구간은 불안정영역(unstable region)으로 이 때의 실수부를 Fig. 4에 도시하였다. 고려한 시스템의 경우 회전속도가 2550~3325, 5100~5425 그리고 7400~7800rpm의 세 구간에서 불안정성이 나타나고 있다. $\Omega=0$ 에서 첫번째 모드 쌍 (±1,F)와 (∓1,B)의 고유치선도의 시작점이 두번째 모드 쌍(±2,F)와 (∓2,B)의 고유치선도 시작점 간의 간격보다 넓은 것은 비대칭요소에 의한 비대칭성이 첫 번째 굽힘 모드에 더 큰 영향을 준다는 것을 뜻한다. 저속 600rpm과 고속 30000rpm 두 가지 회전속도로 구동될 때 변조좌표계를 이용한 모드해석에서 구한 고유치로부터 계산된 고유진동수와 식(4)를 이용한 직접계산법에 의해 얻어진 r-dFRF으로부터 공진점의 위치를 통하여 얻어진 고유진동수 값을 Table 3에서 비교하였다. 직접계산법에서의 해상도 범위내에서 두 고유진동수가 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 한편 Fig. 4는 모드확장 및 직접계산법에 의해 얻어진 r-dFRF 함수를 비교해서 보여주고 있다.

Table 1 Eigenvalue relations

	Modulated Stationary Coordinates	Rotating Coordinates
Eigenvalue	λ_r^i	$\mu_r^i=\lambda_r^i-j\Omega$
Paired value	$\lambda_{-r}^i=\lambda_r^i+j2\Omega$	$\mu_{-r}^i=\overline{\mu}_r^i$

Table 2 Specifications of the numerical model

Mesh information			
# of elements = 26			
# of disks = 2			
# of bearings = 2			
Shaft information			
Length=51cm			
Diameter=1.2cm			
Density=7806 kg/m^3			
Young modulus = 2.08x10^{11} N/m^2			
Disk information			
Location m	Mass kg	Pol. Inertia kg m^2	Dia. Inertia kg m^2
0.21	1.236	1.2 x 10^{-3}	6.8 x 10^{-4}
0.476	0.857	0.9 x 10^{-3}	3.5 x 10^{-4}
Bearings			
Node Number	Stiffness N/m		damping N s/m
4, 21 (two identical)	k_{yy} , k_{zz} =5 x 10^8 k_{yz}= k_{zy} =0		c_{yy} , c_{zz} =4.5 x 10^3 c_{yy} , c_{zz} = 0

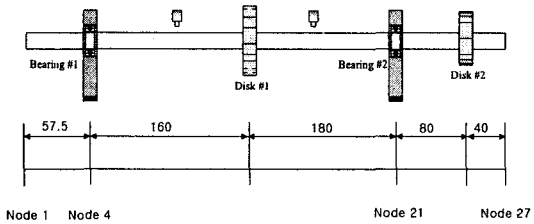


Fig. 1 Numerical model of a flexible asymmetrical rotor

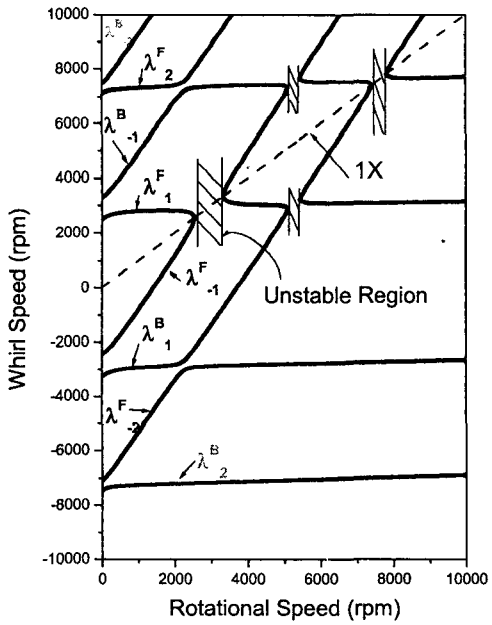


Fig. 2 Whirl chart of the asymmetrical flexible rotor in the modulated stationary coordinate system

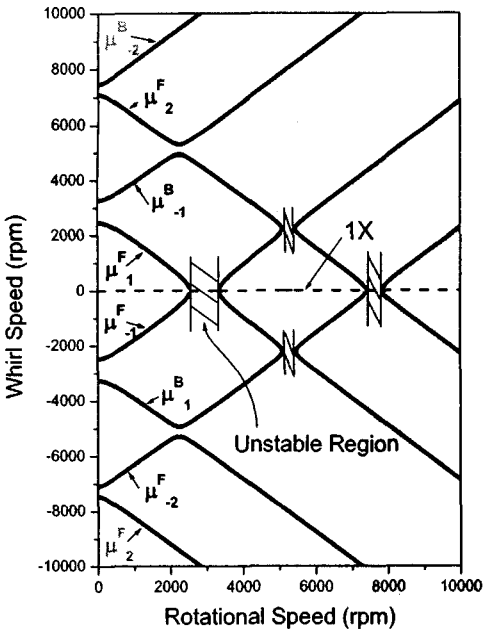


Fig. 3 Whirl chart of the asymmetrical flexible rotor in the rotating coordinate system

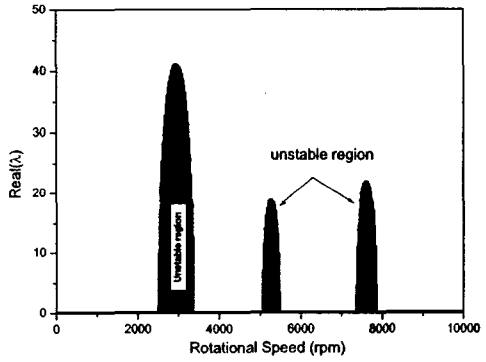
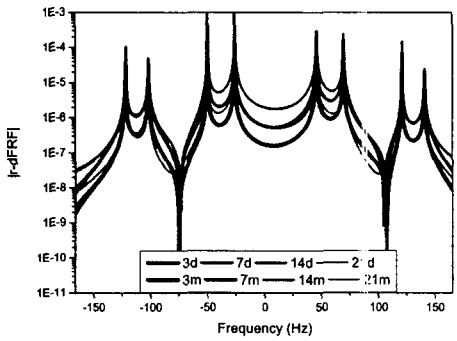


Fig. 4 Real parts of eigenvalues of asymmetrical flexible rotor

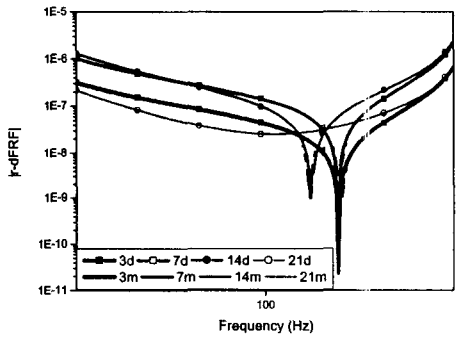
모드확장에서는 식(21)를 이용하였으며 앞서 구한 좌측 및 우측 고유벡터 8개씩을 사용하였다. 측정점을 절점 3, 7, 14과 22으로 두었으며 가진점은 오른쪽 디스크가 위치한 25번 째 절점에 두었다. 두가지 방법으로 구한 r-dFRF가 여러 측점점에서 모두 매우 잘 일치한다는 사실을 확인할 수 있다. 만약 축의 단에 의한 비대칭성이 존재하지 않는다면 모든 측정점에서 r-dFRF값은 '0'으로 나타난다. 축의 단의 깊이가 깊어지고 비대칭 요소의 개수를 증가시키게 되면 비대칭성이 증가하게 되어 r-dFRF의 크기도 증가하게 된다.

3.2 열린 균열이 있는 회전체 모드 해석

Table 2에 기술된 기하학적인 형상과 물성치를 갖는 회전체계에서 15번 째 절점에 균열깊이(crack depth)가 a/D = 0.4인 열린 균열(open crack)이 존재하는 경우 변조좌표계(modulated coordinate)에서 문헌[10]의 방법을 이용하여 운동방정식을 구성하였으며 고유치 문제에서 고유진동수를 구하였다. 균열부위가 닫히지 않는다고 가정하고 열린 균열 모형을 이용하였다. Fig. 6은 이 경우 0-10000rpm 의 범위에서 휠차트(whirl chart)를 구한 것이다. 전절에서 살펴본 일반 비대칭 요소가 있는 경우의 휠차트(Figs. 2, 3)와 달리 불안정영역(unstable region)을 육안으로 포착하기 힘들다. 이는 본 절에서 고려한 균열있는 회전체의 비대칭성이 전 절의 비대칭성에 비해 매우 적기 때문이다. 다만 휠차트를 확대해서 보면 Fig. 6 (b)와 같이 3350~3425rpm 구간 등에서 불안정영역이 존재하는 것을 확인할 수 있다. Fig.7에는 참고를 위해 불안정성을 야기하는 고유치를 도시하였다.



(a) Wide view

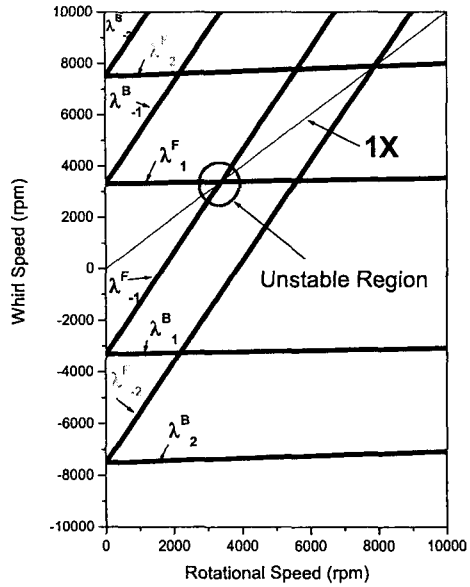


(b) Zoomed view

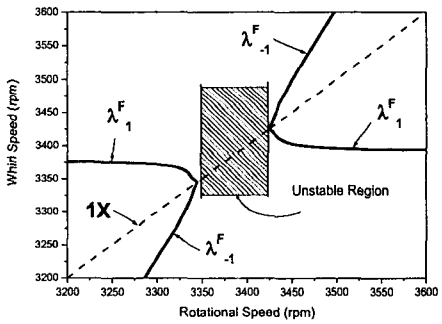
Fig. 5 r-dFRFs by modal expansion and direct inverse; excitation and sensor node at nodes 25 and 22 respectively with rotational speed of 600 rpm: **d**; direct, **m**; modal

Table 3 Comparison of natural frequencies from the eigenvalue problem and modal estimation by r-dFRF resonance peak points for the flexible asymmetrical rotor (Frequency resolution for r-dFRF computation: Δf= 0.3255 Hz)

Rotational speed = 600rpm			Rotational speed = 30000 rpm		
Natural frequency (Hz)			Natural frequency (Hz)		
Computed from EVP	Estimated from dFRF	Err (%)	Computed from EVP	Estimated from dFRF	Err (%)
-121.42	-121.37	0.04	-163.95	-164.06	-0.07
-101.35	-101.49	-0.14	-104.38	-104.43	-0.05
-49.68	-49.69	-0.02	-35.71	-35.68	0.08
-25.94	-25.90	0.15	60.26	60.12	0.23
45.94	45.78	0.35	147.40	147.12	0.19
69.67	69.57	0.14			
121.35	121.37	-0.02			
141.42	141.58	-0.11			



(a) Wide view



(b) Zoomed view around an unstable region

Fig. 6 Whirl chart of the cracked rotor with an open crack at node 15 (crack depth , a/D =0.4)

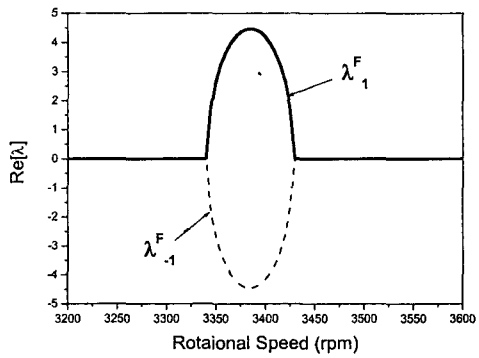


Fig. 7 Real parts of eigenvalues $\pm 1F$ of the cracked rotor

4. 요 약 및 결 론

본 연구에서 변조좌표계를 사용하여 비대칭 회전체계를 모드해석 하는 일반적인 방법론을 제시하였다. 일반 정지좌표계에서는 회전체계의 시스템 행렬이 시변 주기함수형태로 표시되므로 모드해석이 용이하지 않으나, 변조좌표계를 사용하면 시스템 행렬을 시불변계로 표현할 수 있으므로 모드해석을 용이하게 수행할 수 있다는 것을 보였다. 이 방법으로 변조복소정지좌표계에서의 고유치와 고유벡터를 구할 수 있었으며 이렇게 구한 고유치와 고유벡터를 이용하여 모드확장에 의해 구한 주파수 응답함수가 동강성행렬의 역행렬로부터 구한 주파수 응답함수와 잘 일치함을 확인하였다. 또한 변조복소정지좌표계에서 얻어진 고유진동수는 회전좌표계에서 구한 고유진동수와 회전속도 만큼 이동된 값의 차이를 보이게 되며 안정성에 관해 동일한 결과를 제공하게 됨을 이론과 수치예를 통하여 보였다. 제안된 모드해석 기법은 균열이 있는 회전체 등, 비대칭 회전체의 동적 해석 및 진단 등에 유용하게 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소에서 지원하는 장기기초 연구 (TECD-413-001115) 결과의 일부로서 관계자 여러분에게 감사드립니다.

참고문헌

(1) Richards, J. A., 1983, Analysis of Periodically Time-Varying Systems, Springer-Verlag, New York.
(2) Irretier, H., 1999, "Mathematical Foundations of Experimental Modal Analysis in Rotor Dynamics," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.13(2), pp.183-191.
(3) Lee, C. W., 1993, Vibration Analysis of Rotors, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht/Boston/London.
(4) Genta, G., 1988, "Whirling of Unsymmetrical Rotors: A Finite Element Approach Based on Complex Coordinates," Journal of Sound and Vibration, Vol.124(1), pp.27-53.
(5) Jei, Y. G and Lee, C. W., 1992, "Modal Analysis of Continuous Asymmetrical Rotor-Bearing Systems," Journal of Sound and Vibration, Vol.152, No.2, pp.245-262.
(6) Lee, C. W. and Kwon, K. S., 2001, "Identification of Rotating Asymmetry in Rotating Machines by Using Reverse Directional Frequency Response Functions," Proc Instn Mech Engrs, Vol.215, Part C, 1053-1063.
(7) Lee, C. W. and Lee, S. K., 1996, "An Efficient Complex Modal Testing Theory for Asymmetric Rotor Systems: Use of Unidirectional Excitation Method," Journal of Sound and Vibration, Vol.206(3), pp.327-338.
(8) Lancaster, P. 1966, "Lambda-matrices and Vibrating Systems," Pergamon Press, Oxford.
(9) Papadopoulos, C. A. and Dimarogonas, A. D., 1987, "Coupled Longitudinal and Bending Vibrations of a Rotating Shaft with an Open Crack," Journal of Sound and Vibration, Vol. 117(1), pp.81-93.
(10) 홍성욱, 최성환, 이종원, 2003 "열린 균열이 있는 일반 회전체계의 동적 모델링 및 해석," 한국소음진동공학회논문집(게재예정)