

시스템 규명을 통한 외팔 송수관의 비선형 동적 거동 해석

Nonlinear Dynamic Analysis of a Cantilever Tube Conveying Fluid with System Identification

임재훈* · 정구충** · 최연선***

Jae-Hoon Lim, Goo-Choong Jung, and Yeon-Sun Choi

Key Words : Bifurcation Diagram(분기 도표), Period Doubling Bifurcation(주기 배가 분기), Phase plane plot(위상 평면 선도), Cantilever Tube(외팔 송수관), Constraint Bar(구속 바), Chaotic motion(혼돈 운동)

ABSTRACT

The vibration of a flexible cantilever tube with nonlinear constraints when it is subjected to flow internally with fluids is examined by experiment and theoretical analysis. These kind of studies have often been performed that finds the existence of chaotic motion. In this paper, the important parameters of the system leading to such a chaotic motion such as Young's modulus and coefficient of viscoelasticity in tube material are discussed. The parameters are investigated by means of a system identification so that comparisons are made between numerical analysis using the parameters of a handbook and the experimental results. The chaotic region led by several period-doubling bifurcations beyond the Hopf bifurcation is also re-established with phase portraits and bifurcation diagram so that one can define optimal parameters for system design.

1. 서론

내부 유동이 있는 관이 안으로 흐르는 유체가 임계속도를 넘게 되면 좌굴(buckling) 또는 플러터(flutter) 현상에 의하여 불안정하게 됨은 여러 실험과 해석을 통하여 알려진 사실이다. 이러한 유동이 있는 관의 해석은 산업 전반에 걸쳐 유체의 교란을 받는 파이핑(piping) 시스템을 설계시 중요한 문제이다.

관 시스템의 안정성에 대하여 그동안 많은 연구가 있었다. 이 연구의 시초는 1950년 Ashley⁽¹⁾에 의한 Trans-Arabian 송유관의 진동현상을 규명하기 위한 연구이다. Benjamin⁽²⁾은 분절된 파이프(articulated pipes)에서 내부유동에 의한 관의 동특성이 유체의 마찰에 무관함을 입증하였다. Paidoussis⁽³⁾는 외팔 송수관이 수직으로 매달려 있을 때(hanging)와 밑에서 지지되어 있을 때(standing), 각각에 대하여 안정성을 조사하였다. 그는 이 연구에서 매달린 외팔관은 임계속도 이상에서 플러터 운동을 하고 반대로 밑에서

지지된 상황에서는 플러터뿐만 아니라 관 자체의 자중에 의해서 좌굴이 발생함을 증명하였다. Sugiyama⁽⁴⁾는 수평인(horizontal) 외팔 송수관에 대해서 지지된 스프링의 강성과 위치에 따른 임계유속을 결정하였다. 류봉조⁽⁵⁾는 말단 스프링의 강성 변화와 중간 스프링의 위치 변화에 따른 안정성을 평가하였다.

이상의 선형진동 이론에 기초를 둔 파이프계의 동적 안정성 평가 이외에 비선형성을 고려하여 혼돈운동(chaotic motions)의 존재를 실험과 이론으로 증명하는 연구도 이루어졌다. Paidoussis⁽⁶⁾는 한 단이 고정되어 있고 타단은 자유인 상태에서 관내 유속의 증가에 따라 관이 운동할 때 구속운동을 할 수 있도록 관의 양쪽에 일정 간격을 유지하는 구속 바(constraints bar)를 설치하였다. 점차 내부유속이 증가함에 따라 구속 바와의 접촉에 의해 결국에는 혼돈운동(chaotic motion)이 발생함을 2자유도로 모델링하여 수치해석과 실험으로 증명하였다. 이후, Paidoussis⁽⁷⁾는 실험에 사용된 여러 변수들을 사용한 분기 도표(bifurcation diagram)와 Lyapunov exponents를 사용하여 시스템이 어떤 파라미터에 민감한지에 대하여 조사하였다. 박철희⁽⁸⁾는 맥동유체가 흐르는 파이프계의 비선형 거동에 대하여 분기현상 및 혼돈운동을 이론적으로 규명하여 실제로 발생하는 진동 메커니즘(mechanism)을 밝히고자 하였다.

* 성균관대학교 기계공학부
E-mail : meanimal@skku.edu
Tel : (031) 290-7301, Fax : (031) 290-5849

** 대림산업(주)

*** 성균관대학교 기계공학부

최근 비선형 동적 시스템의 혼돈운동에 대한 관심이 늘어나면서 내부유동이 있는 외팔보계에서 혼돈영역의 존재 가능성을 조사하게 되었다. 그러나 앞서의 연구들에 있어서 관의 동적 거동 현상에 중요한 영향을 미치는 파라미터의 설정에 관한 연구는 없었다. 이러한 파라미터는 온도와 습도 등의 환경과 재료의 사용기간 등에 민감하기 때문에 실험에 따라 달라질 수 있고 관의 비선형 동특성 즉, 분기현상이나 혼돈운동 등을 유발함에 있어서 크게 기여한다. 특히 본 연구에 사용된 시스템에서는 매우 민감하게 작용하고 있다.⁽⁷⁾ 이에 본 연구에서는 실험에 의하여 얻어낸 응답으로부터 시스템 규명(system identification)을 통한 변수의 역추적 방법을 수행하고 이로부터 얻어진 결과와 설계 계수들을 이용한 수치해석결과 사이의 차이점을 조사하였고, 또한 실험에 의해 고찰된 관의 동특성과 시스템 규명을 통한 수치해석결과 사이의 상관성을 조사하여, 보다 실제 상태에 근접한 변수 값들을 찾아보았다.

2. 구속 운동하는 외팔 수직 관의 운동 방정식

본 연구에 사용된 관은 Fig. 1과 같이 길이 L인 관모양의 외팔보이다. 관의 단위 길이 당 질량은 m, 굽힘 강성 EI, 내부 유동 유체의 단위 길이 당 질량은 M이며, 유체는 속도 U로 관을 따라 흐르고 자유단에서 배출된다. 유체가 흐르는 관의 축에 대한 가로 단면적은 A이다. 관은 원래 변형 되지 않은 상태로 수직하게 매달려 있고, 관의 축을 x축으로 설정한다.

관 내부에 흐르는 유체는 비압축성이고, 난류로써 유속은 종 방향 단면에 대하여 일정하며, 시간에 따라서도 일정하다고 가정한다. 또한 관의 지름은 관의 길이에 비하여 작기 때문에 관의 회전관성과 전단변형은 무시한 오일러-베르누이보(Euler-Bernoulli beam) 이론을 적용한다. 그리고 관의 거동은 평면 운동으로 가정한다.

위의 가정을 통한 무차원 운동방정식은 식 (1)과 같다.⁽¹⁰⁾

여기서 t는 시간이며, 중력 가속도 g, 켈빈-보이트(Kelvin-Voigt) 댐핑 계수 E*, 관의 y방향의 변위는 y(x, t)이고 k는 구속(constraint)에 의한 강성이다. 또한, x_b는 구속의 위치, y_b는 x_b 위치에서 관과 구속 바 사이의 거리이다.

$$[1 + \alpha (\partial/\partial \tau)] \eta'''' + [u^2 - \gamma(1 - \xi)] \eta'' + 2\beta^{1/2} u \eta' + \gamma \eta' + \ddot{\eta} + \kappa (\eta - \frac{1}{2} (|\eta + \eta_b| - |\eta - \eta_b|))^2 \delta(\xi - \xi_b) = 0 \quad (1)$$

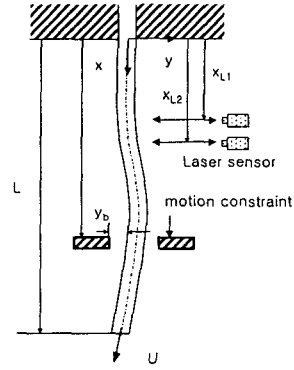


Fig. 1 Schematic diagram of the system

$$\eta = \frac{y}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \left(\frac{EI}{M + m} \right)^{1/2} \frac{t}{L^2},$$

$$u = \left(\frac{M}{EI} \right)^{1/2} UL, \quad \beta = \frac{M}{M + m}, \quad \gamma = \frac{M + m}{EI} g L^3, \quad (2)$$

$$\kappa = \frac{k L^3}{EI}, \quad \alpha = \left(\frac{EI}{M + m} \right)^{1/2} \frac{a}{L^2}, \quad a = \frac{E^*}{E}$$

$$(\quad)' = \partial(\quad)/\partial \xi, \quad (\quad)\dot{\quad} = \partial(\quad)/\partial \tau$$

식 (1)에 갤러킨 방법(Galerkin's method)을 사용하여 유한개의 상미분 방정식을 만든다.

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_i \phi_i(\xi) q_i(\tau) \quad (3)$$

여기서 사용된 함수 $\phi_i(\xi)$ 는 외팔보의 모드(mode)형상함수이다. 식 (3)을 (1)에 대입하고 관의 전 길이에 대하여 적분하면 아래와 같다.

$$\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{F(q)\} = \{0\} \quad (4)$$

행렬 [C]와 [K], {F(q)}의 각 요소들은 다음과 같다.

$$C_{rs} = \alpha \lambda_r^2 \delta_{rs} + 2\beta^{1/2} u b_{rs}, \quad K_{rs} = \lambda_r^4 \delta_{rs} + u^2 c_{rs} + \gamma e_{rs},$$

$$F_r = \kappa \left[\sum_r \phi_r(\xi_b) q_r - \frac{1}{2} \left(\left| \sum_r \phi_r(\xi_b) q_r + \eta_b \right| - \left| \sum_r \phi_r(\xi_b) q_r - \eta_b \right| \right)^2 \phi_r(\xi_b) \right] \quad (5)$$

$$b_{rs} = \begin{cases} 4 / [(\lambda_r/\lambda_r)^2 + (-1)^{r+s}], & r \neq s \\ 2, & r = s \end{cases},$$

$$c_{rs} = \begin{cases} 4(\lambda_r \sigma_r - \lambda_s \sigma_s) / [(-1)^{r+s} - (\lambda_s/\lambda_r)^2], & r \neq s \\ \lambda_r \sigma_r (2 - \lambda_r \sigma_r), & r = s \end{cases}, \quad (6)$$

$$e_{rs} = \begin{cases} 4(\lambda_r \sigma_r - \lambda_s \sigma_s + 2)(-1)^{r+s} \\ - 2[1 + (\lambda_r/\lambda_r)^4] b_{rs} / [1 - (\lambda_r/\lambda_r)^4] - c_{rs}, & r \neq s \\ 2 - 1/2 c_{rs}, & r = s \end{cases}$$

본 연구에서는 시스템의 비선형 동특성, 즉 호프 분기(Hopf bifurcation), 피치포크 분기(pitchfork bifurcation), 주기 배가 분기(period doubling bifurcation)나 혼돈운동 등을 모두 규명할 수 있는 최소 차원인 4차원(2자유도계) 모델로 해석한다.⁽⁷⁾

수치해석상의 편의를 위해 식 (4)를 상태방정식 형태로 변형하면 최종적으로 식 (7)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\{y\}} &= [A]\{y\} + \{F(y)\}, \\ \{y\} &= \{q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2\}^T \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)을 4차 룬지-쿠타(Runge-Kutta) 법을 사용하여 수치해석 하였다. 초기 조건은 평형인 위치의 관과 구속 바와의 거리인 $y_1(0) = y_3(0) = 0.02583$, $y_2(0) = y_4(0) = 0$ 이다.

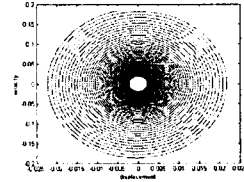
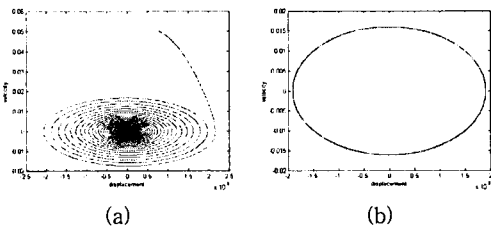
수치해석을 통한 위상평면 선도를 Fig. 2에 도시하였는데 그 결과를 살펴보면 Fig. 2의 (a)와 같이 유속 $U = 7.0$ m/s 인 경우 응답은 끌개(attractor)로 수렴하는 안정성을 나타내고 유속 7.1m/s일 때는 (b)와 같이 호프 분기가 발생한 후의 리밋 사이클(limit cycle)을 나타낸다. 그 이상의 유속에 서는 (c)와 같이 발산형의 불안정이 됨을 확인하였다.

3. 외팔 수직관에 의한 진동 실험

3.1 실험 장치 및 방법

본 연구를 위하여 Fig. 3와 같이 실험 장치를 준비하였다. 실험에 사용된 관의 설계변수는 Table 1과 같다. 펌프에 연결된 고정된 송수관으로부터 관을 수직으로 고정하여 외팔 보가 되게 하였고 관 중간을 구속하여 관이 구속운동을 하도록 유도하였다. 펌프에 연결된 모터의 속도를 인버터(inverter)로 조절하여 펌프 유량을 변화시키고 그 때의 유속을 송수관 중간에 설치된 유량계로 측정하였다.

유속에 의한 관의 진동 현상은 레이저센서(Graham&White laser sensor M5L/20)로 측정하고 FFT 분석기(ONOSOKKI CF-350)와 퍼스널 컴퓨터(PC)로 분석하였다.



(c)

Fig. 2 Phase plane plots of the system ($E = 9.72 \times 10^6$ N/m², $E^* = 1.723 \times 10^5$ Ns/m²); (a) at $U=7.0$ m/s, (b) 7.1m/s, (c) 7.15m/s

3.2 실험 결과

본 연구에 사용된 관은 호프분기가 발생하는 유속 U_H 이상에서 플러터에 의해 불안정해진다. 이 현상은 위상 선도(phase plane plot)에서 대칭의 안정한 리밋 사이클로 나타난다. 리밋 사이클의 진폭 또한 유속의 증가에 비례한다. 그러므로 적당한 위치에서 관의 운동을 구속하게 되면 관은 지속적인 접촉을 하지 않고 한쪽 혹은 양쪽 구속에 부딪히게 된다. 또한 초기 조건에 의하여 대칭의 리밋 사이클이 비대칭으로 변하는 피치포크 분기 현상이 발생하며 거동의 주기가 여러 개가 되는 주기 배가 분기 현상이 유속이 증가함에 따라 나타났다.

Fig. 4(a)에서는 관이 임계유속 $U_H = 5.51$ m/s를 넘어 구속에 부딪히지 않고 플러터 현상이 발생함을 볼 수 있다. 유속이 계속 증가되면 관의 진폭이 점점 커져 결국에는 한쪽 구속 바에 부딪히면서 (b)와 같이 고차조화(higher harmonics) 성분들이 나타나고 위상선도에서는 리밋 사이클이 나타난다. (c), (d)에서는 관이 서로 다른 진폭으로 운동하여 조화성분 외에 기본 주파수의 아조화(subharmonic)성

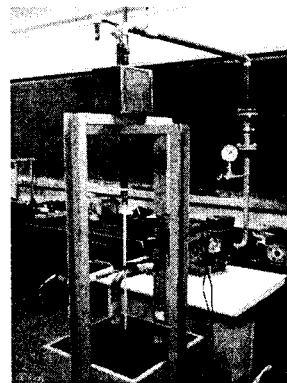


Fig. 3 Photo of the experimental apparatus

Table 1 Parameters of the test tube and the fluid

test tube	silicon rubber
fluid	water
length of the tube, L (m)	0.6
outside diameter, d_o (m)	0.011
inside diameter, d_i (m)	0.0076
area moment of inertia, I (m^4)	5.55×10^{-10}
mass of the tube per unit length, m (kg/m)	0.006247
mass of the fluid per unit length, M (kg/m)	0.04527
Young's modulus, E (N/m^2)	9.72×10^6
mass ratio, β	0.87874
coefficient of Kelvin-Voigt damping, E^* (Ns/m^2)	1.723×10^5
laser sensor position, x_{L1}, x_{L2} (m)	0.0766, 0.18165
motion constraint position and gap between the tube and constraint, x_b, y_b (m)	0.28905, 0.02583

분이 나타나는 것을 확인할 수 있다. 따라서 위상 평면에서는 2주기 이상의 거동을 확인할 수 있다.

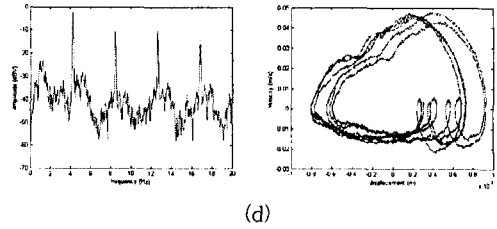
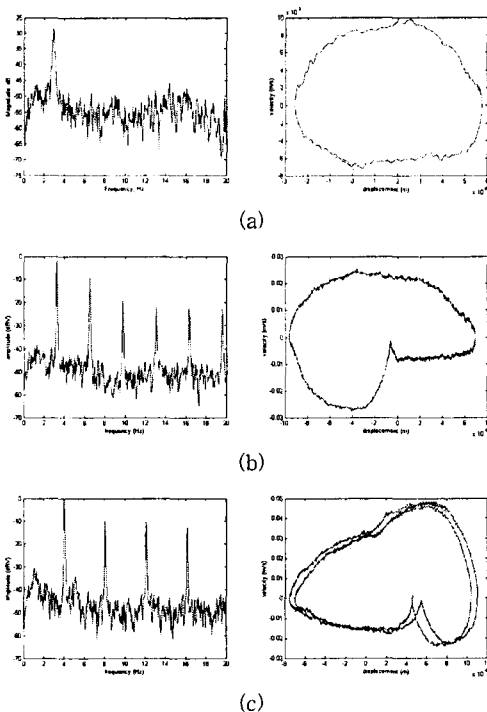


Fig. 4 Power spectra and phase plane plots of the system ;
(a) at $U=5.5293m/s$, (b) $5.6506m/s$, (c) $6.019m/s$,
(d) $6.0927m/s$

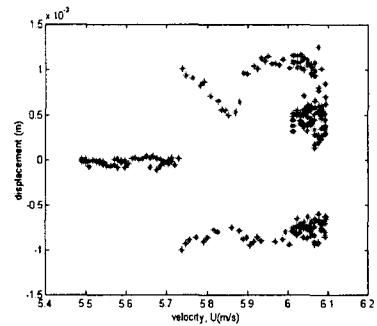


Fig. 5 Bifurcation diagram by the experiment

Fig. 5에서 각 유속에서 관의 속도가 0이 될 때의 관의 변위를 기록하여 분기 도표(bifurcation diagram)를 도시하였다. Fig. 5는 $U_H = 5.52m/s$ 에서 호프 분기, $U_{pd} = 5.993m/s$, $6.053m/s$ 에서 주기 배가 분기 현상이 나타남을 보여주고 있다.

4. 시스템 규명

3.2절에서 관의 비선형 동적 거동현상을 실험을 통하여 규명하였다. 그러나 실제 시스템에서는 관의 탄성계수(Young's modulus), 점탄성계수와 같이 민감한 물성치들이 포함되어 있어 관의 거동을 이론적으로 해석하여 실험 결과와 비교를 하기 위해서는 변수의 정확한 값을 알아야한다.

Table 2 Parameters through system identification

Young's modulus, E (N/m^2)	6.011×10^6
coefficient of Kelvin-Voigt damping, E^* (Ns/m^2)	1.06971×10^5
stiffness of the constraint, k (N/m)	437.99

이에 본 연구에서는 실험으로 나타난 응답을 가지고 시스템 규명을 수행하여 관의 탄성계수, 내부 댐핑(internal damping)과 구속 바의 강성 k 등의 변수를 역추적하였다.

시스템의 변수를 추정하기 위해 식 (4)를 다음과 같은 행렬 식으로 변환한다.

$$K = A \cdot P \quad (8)$$

즉,

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t_1) & \ddot{q}_2(t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \ddot{q}_1(t_n) & \ddot{q}_2(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(t_1) & q_2(t_1) & \dot{q}_1(t_1) & \dot{q}_2(t_1) & f(q(t_1)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_1(t_n) & q_2(t_n) & \dot{q}_1(t_n) & \dot{q}_2(t_n) & f(q(t_n)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \\ e & e \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서,

$$a_i = K_{r11}, b_i = K_{r22}, c_i = C_{r11}, d_i = C_{r22}, f(q) = F/\kappa, e = \kappa \quad (10)$$

Fig. 1에서와 같이 두개의 레이저 센서로 측정된 관의 응답을 식 (7)에 대입하여 최소 자승법⁽¹¹⁾, 즉 $P = (A^T A)^{-1} A^T K$ 로부터 추정된 변수들은 Table 2와 같다. 이때 사용한 데이터의 갯수는 $n = 7000$ 이다.

여기서 주목할 점은 Table 1과 Table 2에서 탄성계수와 점탄성계수의 수치가 다르다는 것이다. 이것은 탄성계수가 실제 시스템 구동 시, 주변 온도, 습도, 시스템의 사용기간에 따라 변함을 의미하며 따라서 핸드북의 수치만으로 시스템을 설계하는 데에는 한계가 있음을 알 수 있다. 그러므로 설계에 사용된 변수가 실제 시스템에서도 그대로 나타나는지 여부를 확인할 필요가 있다.

5. 비교 및 검증

Fig. 6은 4절에서 추정된 변수를 사용한 결과를 위상평면에 도시한 것이다. 이 때 식 (11)을 이용하여 관 끝단에서의 변위와 속도를 계산하였고, 과도응답은 고려하지 않았다.

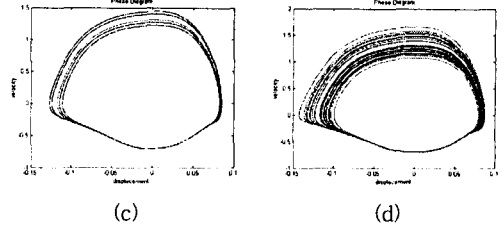
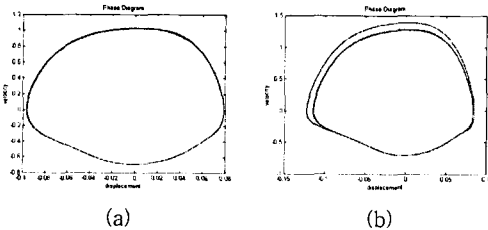


Fig. 6 Phase plane plots of the system ($E = 6.29 \times 10^6$ N/m², $E^* = 1.06971 \times 10^5$ Ns/m²); (a) at $U=6.091$ m/s, (b) 6.0995 m/s, (c) 6.10 m/s, (d) 6.1005 m/s

$$\begin{aligned} \eta(1, \tau) &\approx \phi_1(1)y_1(\tau) + \phi_2(1)y_3(\tau) \\ \dot{\eta}(1, \tau) &\approx \phi_1(1)\dot{y}_1(\tau) + \phi_2(1)\dot{y}_3(\tau) \end{aligned} \quad (11)$$

Fig. 2에서는 호프 분기가 발생하는 유속이 이론해석과 실험결과에서 상당한 차이가 있었고 실험에 의한 Fig. 4에서는 주기 배가 운동이 있었으나 Table 1에서의 설계상 변수로는 어떠한 불안정한 리밋 사이클도 확인할 수 없었다. 그러나 Fig. 6에서는 (a) 안정한 리밋 사이클과 (b) 2 주기, (c) 5 주기, (d) 혼돈 운동까지 나타남을 볼 수 있다.

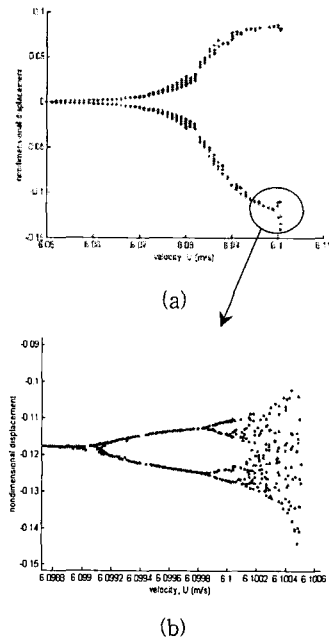


Fig. 7 Bifurcation diagram for the tip displacement of the system
(a) for the range of $6.05\text{m/s} \leq U \leq 6.11\text{m/s}$;
(b) for the smaller range of $6.0987 \leq U \leq 6.1005\text{m/s}$

Fig. 7에서는 시스템 규명으로 얻은 변수로부터 분기 도표 (a)와 보다 좁은 범위에서의 분기 도표 (b)를 도시하였다. Fig. 7을 살펴보면 실험에 의한 것과 분기 유발 유속(실험에 의한 호프분기 유속은 5.52m/s, 주기 배가 분기 유속 5.993m/s, 6.053m/s이고, 시스템 규명 후의 호프분기 유속은 6.058m/s, 주기 배가 분기 유속 6.0991m/s, 6.0999m/s)에서 약간의 오차가 발생했지만 전반적인 관의 거동은 거의 유사함을 알 수 있다.

설계상의 파라미터 값과 실제로 구동되고 있는 시스템의 파라미터 값이 약간의 차이가 있음에도 결과를 살펴보았을 때는 상당한 차이가 있었다. 변수 역추적 후의 점탄성계수의 차이는 설계상의 수치와 비교하여 $0.65 \times 10^5 \text{Ns/m}^2$ 로 37.7% 정도였고 탄성계수는 $3.7 \times 10^6 \text{N/m}^2$ 로 약 38% 차이가 있었지만 이 차이는 탄성과 점탄성의 특성에 비교하였을 때 다소 미미한 차이라 할 수 있다. 그러나 각각의 변수에 의한 시스템의 특성은 판이하게 달랐다. 이것은 외팔 수송관이 내부 유동 이외에도 다른 매개변수, 특히 관의 강성과 댐핑 항에 의해서 그 동특성이 민감하게 변할 수 있음을 나타낸다.

따라서 본 연구를 통해 확인한 바 강성과 댐핑 항의 변수 값이 약간 변하여도 관의 전체적인 운동에 큰 영향을 미칠 수 있으므로 이런 변화를 간과해서는 안 될 것이다.

6. 결론

본 연구에서는 유체유동에 의한 유연 외팔 수송관의 비선형 동적 거동을 살펴보았다. 이를 위해 시스템을 2자유도로 모델링하였고, 유체 수송관 실험 장치를 구성하였다. 그리고 실험으로 측정된 응답에 대하여 시스템 규명을 통하여 주위 환경에 민감한 변수를 추정하였고, 이를 운동방정식에 대입하여 수치 해석한 결과와 실험 및 설계상의 파라미터 값을 사용한 수치해석과 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

탄성계수와 점탄성계수 등과 같은 관의 물성치는 시스템의 운용 환경에 따라 변할 수 있기 때문에 설계 시 예상한 관의 거동과 실제 관의 운동은 다름을 알 수 있었다.

또한 관의 거동은 관에 사용된 재료의 물성치의 변화에 민감하다. 관은 임의의 물성치에 대해 임계유속 이상에서 나선형의 불안정 현상이 나타날 수 있는데 약간의 물성치 변화에 의해 계는 혼돈현상까지 발생할 수 있다.

따라서 본 실험에 사용된 장치와 같은 유체수송관 시스템을 설계함에 있어서 이러한 중요한 변수의 설정에 대한 신중한 고려가 필요함을 알았다.

본 연구를 통해 알 수 있듯이 시스템 규명을 통한 결과와 실험 결과에 약간의 오차가 있었다. 그 오차의 원인으로 유도 모델링과 평면운동의 가정을 생각할 수 있는 바, 이후의 연구에서는 이러한 가정을 고려하지 않는 시스템에 대한 동적 거동을 해석해 보고자한다.

참 고 문 헌

- (1) H. Ashley and G. Haviland, 1950, "Bending vibrations of a pipeline containing flowing fluid," *Applied Mechanics*, 17, pp. 229-232.
- (2) T. B. Benjamin, 1961, "Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluids - I. Theory," *Proceedings of the Royal Society*, 261(series A), 457.
- (3) M. P. Paidoussis, 1970, "Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid," *Journal of mechanical engineering science*, 12, 2, pp. 65-103.
- (4) Y. Sugiyama, Y. Tanaka, T. Kishi and H. Kawagoe, 1985, "Effect of a spring support on the stability of pipes conveying fluid," *Journal of sound and vibration*, 100, 2, pp. 257-270.
- (5) 류봉조, 정승호, 이종원, 2002, "부가 스프링 지지를 갖고 유동유체에 의한 외팔 수직 파이프의 동적 안정성," *한국소음진동공학회논문집*, 제 12권, 제 12호, pp. 979-985.
- (6) M. P. Paidoussis, and F. C. Moon, 1988, "Nonlinear and chaotic fluidelastic vibrations of a flexible pipe conveying fluid," *Journal of Fluids and Structures*, 2, pp. 567-591.
- (7) M. P. Paidoussis, G. X. Li and F. C. Moon, 1989, "Chaotic oscillations of the autonomous system of a constrained pipe conveying fluid," *Journal of Sound and Vibration*, 135, pp. 1-19.
- (8) 박철희, 홍성철, 정욱, 1996, "조화진동유동을 포함한 직선 파이프계의 혼돈 운동 연구," *한국소음진동공학회지*, 제 6권, 제 2호, pp. 233-244.
- (9) F. C. Moon, 1987, "Chaotic vibration," John Wiley & Sons, New York.
- (10) M. P. Paidoussis, G. X. Li and R. H. Rand, 1991, "Chaotic motions of a constrained pipe conveying fluid : comparison between simulation, analysis, and experiment," *Journal of Applied Mechanics*, 58, pp. 559-565.
- (11) R. Johansson, 1993, "System modeling and identification," Prentice-Hall, New Jersey.