

비전도 반평판 사이에서 미끄럼 운동하는 평판 층의 열탄성 불안정성 Thermoelastic Instability of the Layer Sliding between Two Non-conducting Half-planes

하태원*·조용구*·김흥섭**·이정윤***·오재응****

Ha Tae Won, Joe Young Goo, Kim Hung Sub, Lee Jung Yun, Oh Jae Eung

Key Words : Disc brake (디스크 브레이크), Thermoelastic instability (열탄성 불안정성), hot spot (열점), Brake judder (브레이크 저더), Critical speed (임계 속도), Growth rate(성장률)

ABSTRACT

Frictional heating in brakes causes thermoelastic distortion of the contacting bodies and hence affects the contact pressure distribution. The resulting thermo-mechanical coupling can cause thermoelastic instability (TEI) if the sliding speed is sufficiently high, leading to non-uniform heating called hot spots and low frequency vibration known as hot judder. The vibration of brakes to the known phenomenon of frictionally-excited thermoelastic instability is estimated studying the interface temperature and pressure evolution with time. A simple model has been considered where a layer with half-thickness a slides with speed V between two half-planes which are rigid and non-conducting. The advantage of this properly simple model permits us to deduce analytically the critical conditions for the onset of instability, which is the relation between the critical speed and the growth rate of the interface temperature and pressure. Symmetrical component of pressure and temperature distribution at the layer interfaces can be more unstable than antisymmetrical component. As the thickness a reduces, the system becomes more apt to thermoelastic instability. Moreover, the evolution of the system beyond the critical conditions has shown that even if low frequency perturbations are associated with low critical speed, it might be less critical than high frequency perturbations if the working sliding speed is much larger than the actual critical speed of the system.

1. 서론

자동차 기술의 진보에 따른 고속화 및 고출력화가 추진되면서 브레이크 시스템은 악조건에서 운전되어야 하고 차량의 제동시 안정성 확보는 대단히 중요한 문제이다. 브레이크 시스템의 연구 개발에서는 열변형과 편마모, 소음과 진동의 발생, 과도한 온도상승으로 인한 열적 문제가 중요한 연구 대상이 되고 있다.

두 물체가 상대속도 V 를 가지고 미끄럼 접촉을 하고 있을 때 마찰면에서 생성된 열속 q 는 접촉 압력 분포 p 에 비례한다. 일반적으로 표면의 요동, 거칠기, 기하학적 불안정성 그리고 기계적 진동 때문에 접촉압력은 균일하지 않다. 결과적으로 열속은 접촉 경계면의 불균일한 열변형을 야기하고 이로 인한 접촉 압력 분포가 불균일해진다. 이에 따라 마찰력의 변화가 생기게 되어 온도 섭동

을 야기하여 열변형에 의한 국부적인 접촉이 발생한다. 이러한 접촉 마찰열과 열적-기계적 변형 사이의 상호 피드백(feedback) 이득(gain)이 양의 값을 가지면 접촉 압력의 크기가 시간에 따라 증가하여 마찰에 의한 열탄성 불안정성(TEI)로 알려진 불안정을 야기할 수도 있다. 열탄성 불안정성의 발생은 브레이크에 높은 온도와 압력이 가해지는 작은 영역인 열점의 형성을 유발할 수도 있다. 이는 마모율을 증가시키고 열-기계적 손상, 진동-소음, 열적 균열 발생의 근본적인 메커니즘으로 작용한다.

Burton⁽¹⁾ 등은 열탄성 불안정성의 발생 예측을 위한 해석적 모델을 처음으로 제안했다. 만약 미끄럼 속도 V 가 재료의 물성치, 형상 등의 함수인 임계속도 V_c 보다 높을 때 시스템이 불안해진다는 임계속도를 도입했다. 그러나 이 모델은 브레이크의 두께를 고려하지 않았기 때문에 임계 속도가 실제보다 높게 평가된다. 이런 문제점을 해결하기 위해 디스크 두께의 영향을 고려한 모델이 Lee 와 Barber⁽²⁾에 의해 제안되었다. 이 모델로 열탄성 불안정성 최초 발생을 예측할 수 있는 임계 조건들을 추정하는데 기여하였다. Floquet 와 Dubourg^(3,4) 은 축대칭성을 갖는 물체의 열 해석을 빠른 시간

* 회원, 한양대학교 대학원 자동차공학과

E-mail : cavatina@ihanyang.ac.kr
Tel : (02) 2294-8294 Fax : (02) 2299-3153

** 회원, 인제대학교 기계자동차공학부

*** 회원, 경기대학교 기계공학과

**** 회원, 한양대학교 기계공학부

에 효율적으로 해석하는 방법인 FFT-FEM 을 제안하였다. 이 방법은 푸리에 변환과 유한요소법을 결합하여 해석하는 방법으로 수치적인 어려움을 제거하고 계산시간을 상당히 단축할 수 있음을 보였다. Kao 와 Richmond⁽⁵⁾는 디스크 브레이크의 열섬과 열간 저더를 일으키는 열탄성 불안정성 문제 해결을 위한 유한요소 해석 기법을 개발하여 적용하였고 실험적으로 비교 분석하였다. 국내에서는 여태인⁽⁶⁾이 열전달 문제와 열탄성 문제를 연계하여 디스크 표면의 과도기적 온도를 수치적으로 모사한 결과 시스템이 불안정해지는 임계속도를 구할 수 있었으며, 패드의 크기, 물성치 등이 열탄성 불안정성에 미치는 영향에 대해 연구하였다. 본 연구에서는 브레이크 시스템의 열간 저더 현상을 파악하기 위한 기초 연구로 Barber 와 Hector⁽⁷⁾가 제시한 두 개의 단단한 비전도 반 평판 사이에서 미끄럼 운동하는 금속 판 모델을 기본으로 한 Ciavarella⁽⁸⁾ 등의 연구를 기초로 마찰면 온도와 압력의 성장률과 임계 속도의 관계를 고찰하고 미끄럼 마찰 시스템의 과도적 진전에 관해 연구하였다.

2. 모델 및 정식화

본 연구에서 고려한 모델은 브레이크 디스크로 모사되는 두께 $2a$ 를 갖는 얇은 금속 평판 층과 브레이크 패드로 모사되는 두개의 단단한(rigid) 비전도 반평판을 Fig.1 에 나타내었다. 금속 평판 층 (2)는 두 반평판(1)에 대해 상대 속도 V 로 운동하고 균일한 압력 p_0 는 마찰면 사이의 완전한 접촉을 가지게 하기 위해서 작용한다. 미끄럼 접촉 면에서 균일한 접촉 압력은 파수 (wave number)가 m 인 정현파의 중첩으로 섭동한다.

$$p(x, t) = p_0 e^{bt} e^{jmx} \quad (1)$$

여기서, b 는 성장률을 j 는 허수단위이다.

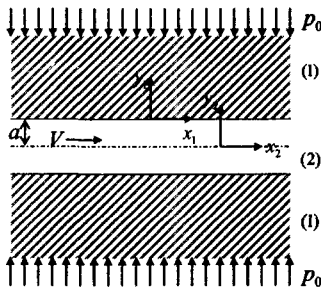


Fig. 1 A layer sliding with relative speed V between two rigid and non-conducting half planes

Burton 의 방법을 따라 섭동이 시간에 따라 지수적으로 성장한다는 섭동 기법을 통하여 시스템의 열탄성 불안정성을 연구하였다. 이러한 섭동의 속도는 x 방향에 대하여 절대 속도 c 이고 두 물체에 대하여 상대 속도 c_i ($i=1,2$) 이다. Burton 등이 좋은 전도체에 대하여 압력 섭동이 거의 정체되어 있다는 것을 보였기 때문에 $c_2 \approx 0$ 이고 그에 따라 $c_1 = c = V$ 이다.

평판 층의 중심 면에 대하여 시스템의 형상은 대칭적이지만 응력과 온도장은 대칭적이지 않다. 미소한 섭동이라는 가정하에서 선형성은 보장되며 임의의 섭동은 대칭적인 성분과 반대칭적인 성분의 중첩으로 표현이 가능하다. 가장 높은 성장률 b 를 가지는 섭동이 다른 낮은 성장률의 섭동에 비하여 가장 지배적이다.

미끄럼 접촉면에서 발생하는 마찰열 q_y 는 반 평판들이 비전도체이기 때문에 전도체인 평판 층에만 가해진다.

$$q_y = q_{y2} = -K_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial y_2} \right|_{y=0} = fV p_0 e^{bt} e^{jmx} \quad (2)$$

그리고 열 전도 방정식인 (3)식의 해로 구해진 불균일한 온도 분포는 (4)식의 형태이다.

$$k_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad (3)$$

$$T_2 = T_0 e^{bt} e^{jmx} \quad (4)$$

2.1 대칭인 경우

온도분포가 대칭인 경우 Lee와 Barber⁽²⁾에 의해 알려진 금속판(2)의 온도장은 (5)식으로 나타낼 수 있다.

$$T_2(x, y, t) = \theta(y) e^{bt} e^{jmx} = T_0 \frac{\cosh[\lambda_2(y+a)]}{\cosh[\lambda_2 a]} e^{jmx} e^{bt} \quad (5)$$

$$\text{여기서, } \lambda_2 = \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}}$$

(5)식을 (2)식에 대입하면 (6)식을 얻을 수 있다.

$$(K_2 \lambda_2 \tanh[\lambda_2 a]) T_0 = fV p_0 \quad (6)$$

참고문헌 (7)에서 밝혀진 바와 같이 마찰 패드는 비전도체이기 때문에 온도장은 금속 평판 층에서만 섭동한다. 또한 마찰 패드가 단단하기 때문에 미끄럼 경계면에서 변위 u_x 와 응력 σ_y 는 0이다. 온도 섭동 $T_2(x, y, t)$ 는 (7)식으로 표현되는 미끄럼 경계면의 압력 분포를 야기한다.

$$p(x, t) = p_0 e^{bt} \cos(mx) \quad (7)$$

$$p_0 = \frac{8\beta\mu m}{(\kappa+1)\sinh[2ma]} \int_a^{\infty} \cosh[m(s_2 \pm a)] p(s_2) ds_2 \quad (8)$$

여기서, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$: 전단 계수

$$\beta = \begin{cases} \alpha & \text{평면응력상태} \\ \alpha(1+\nu) & \text{평면변형률상태} \end{cases}$$

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{평면응력상태} \\ \frac{3-4\nu}{3-4\nu} & \text{평면변형률상태} \end{cases}$$

(8)식에서 부호의 선택은 무관하며 미끄럼 경계면에 고정된 참조 좌표에 대하여 (8)식을 나타내면 (9)식과 같다.

$$P_0 = \frac{8\beta\mu m}{(\kappa+1)\sinh[2ma]} \int_{2a}^0 \cosh[m(s\pm a)]\theta(s)ds \quad (9)$$

(5)식으로부터 $\theta(y)$ 를 (9)식에 대입하여 적분하고 정리하면 (10)식으로 나타낼 수 있다.

$$P_0 = \frac{8\beta\mu m T_0}{(\kappa+1)} \left(\frac{\lambda_2 \coth[ma] \tanh[\lambda_2 a] - m}{\lambda_2^2 - m^2} \right) \quad (10)$$

(10)식을 (6)식에 대입하여 정리하면 특성 방정식 (11)식을 얻는다.

$$(K_2 \lambda_2 \tanh[\lambda_2 a]) = f\nu \frac{8\beta\mu m}{(\kappa+1)} \left(\frac{\lambda_2 \coth[ma] \tanh[\lambda_2 a] - m}{\lambda_2^2 - m^2} \right) \quad (11)$$

물성치와 형상이 정해지면 (11)식에서 미끄럼 속도 V 는 성장률 b 의 함수인 파장 λ_2 에 의존한다. 평면 변형률 상태라고 가정하면 식(11)은 식(12)로 나타낼 수 있다.

$$(K_2 \lambda_2 \tanh[\lambda_2 a]) = \frac{f\nu m}{k_2} \tilde{H}_2 \left(\frac{\lambda_2 \coth[ma] \tanh[\lambda_2 a] - m}{\lambda_2^2 - m^2} \right) \quad (12)$$

$$\text{여기서, } \tilde{H}_2 = \frac{2\alpha(1+\nu)\mu k_2}{K_2(1-\nu)}$$

파장 λ_2 에 관한 식을 성장률 b 로 나타내어 (12)식에 대입하여 미끄럼 속도 V 에 관한 식으로 나타내면 식(13)을 얻는다.

$$V = \frac{b \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \tanh \left[a \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \right]}{m f \tilde{H}_2 \left(\sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \coth[ma] \tanh \left[a \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \right] - m \right)} \quad (13)$$

(13)식에 $b \rightarrow 0$ 일 때의 속도가 임계 속도로 연산 결과 (14)식을 얻을 수 있다. 즉 $b > 0$ 일 경우 불안정한 섭동이 발생한다.

$$V_{cr} = \frac{4k_2 m \sinh^2[ma]}{f \tilde{H}_2 (2ma + \sinh[2ma])} \quad (14)$$

2.2 반대칭인 경우

온도분포가 반대칭인 경우 Lee 와 Barber⁽²⁾에 의해 알려진 평판 층(2)의 온도장은 (15)식으로 나타낼 수 있다.

$$T_2(x, y, t) = \theta(y) e^{bt} e^{jmx} = T_0 \frac{\sinh[\lambda_2(y+a)]}{\sinh[\lambda_2 a]} e^{bt} e^{jmx} \quad (15)$$

대칭적인 경우와 유사하게 접촉 압력은 (16)식으로 나타낼 수 있다. 그리고 동일한 방법으로 (15)

식과 (16)식을 (2)식에 대입하여 얻은 특성방정식을 (17)식으로 나타내었다.

$$P_0 = \frac{8\beta\mu m T_0}{(\kappa+1)} \left(\frac{\lambda_2 \tanh[ma] \coth[\lambda_2 a] - m}{\lambda_2^2 - m^2} \right) \quad (16)$$

$$(K_2 \lambda_2 \coth[\lambda_2 a]) = \frac{f\nu m}{k_2} \tilde{H}_2 \left(\frac{\lambda_2 \tanh[ma] \coth[\lambda_2 a] - m}{\lambda_2^2 - m^2} \right) \quad (17)$$

대칭적 문제와 동일하게 미끄럼 속도를 성장률의 함수로 나타내면 (18)식이고 $b \rightarrow 0$ 일 때의 속도, 즉 임계속도는 (19)식으로 나타낼 수 있다.

$$V = \frac{b \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \coth \left[a \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \right]}{m f \tilde{H}_2 \left(\sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \tanh[ma] \coth \left[a \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \right] - m \right)} \quad (18)$$

$$V_{cr} = \frac{4k_2 m \cosh^2[ma]}{f \tilde{H}_2 (\sinh[2ma] - 2ma)} \quad (19)$$

2.3 무차원화

무차원화된 미끄럼 속도 \tilde{V} , 무차원화된 성장률 \tilde{b} 와 같이 무차원 변수를 도입하여 (13)식과 (18)식을 \tilde{V} 와 \tilde{b} 의 관계로 나타내면 대칭적 조건에서의 무차원화된 미끄럼 속도, 비대칭적 조건에서의 무차원화된 미끄럼 속도를 각각 (20)식과 (21)식으로 나타낼 수 있다.

$$\tilde{V}_{sym} = \frac{\tilde{b} \sqrt{1+\tilde{b}} \tanh \left[ma \sqrt{1+\tilde{b}} \right]}{f \tilde{H}_2 \left(\sqrt{1+\tilde{b}} \coth[ma] \tanh \left[ma \sqrt{1+\tilde{b}} \right] - 1 \right)} \quad (20)$$

$$\tilde{V}_{asym} = \frac{\tilde{b} \sqrt{1+\tilde{b}} \coth \left[ma \sqrt{1+\tilde{b}} \right]}{f \tilde{H}_2 \left(\sqrt{1+\tilde{b}} \tanh[ma] \coth \left[ma \sqrt{1+\tilde{b}} \right] - 1 \right)} \quad (21)$$

$$\text{여기서, } \tilde{V} = \frac{V}{mk_2}; \quad \tilde{b} = \frac{b}{m^2 k_2}$$

결과적으로 무차원화된 미끄럼 속도의 임계값은 아래의 (22)식과 (23)식으로 나타낼 수 있다.

$$\left(\tilde{V}_{cr} \right)_{sym} = \left(\frac{V_{cr}}{mk_2} \right)_{sym} = \frac{4 \sinh^2[ma]}{f \tilde{H}_2 (\sinh[2ma] + 2ma)} \quad (23)$$

$$\left(\tilde{V}_{cr} \right)_{asym} = \left(\frac{V_{cr}}{mk_2} \right)_{asym} = \frac{4 \cosh^2[ma]}{f \tilde{H}_2 (\sinh[2ma] - 2ma)} \quad (24)$$

2.4 온도장의 과도 진전(evolution)

Al-Shabibi 와 Barber⁽⁹⁾는 일정한 미끄럼 속도 조건에서 섭동의 과도 진전에 대한 일반해를 (25)식과 같이 고유함수 급수로 표현했다.

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{bt} \theta_i(x, y, z) \quad (25)$$

여기서, n : 고유함수의 번호

C_i : 초기조건에 의한 임의의 상수

만약 최소한 하나의 고유치가 양의 값을 가지거나 복소수일 경우 실수부가 양의 값을 가질 경우 섭동은 구속 없이 성장하고 시스템은 불안정해진다. 가장 큰 성장률의 실수값을 가지는 항이 과도 응답에 가장 지배적일 것이다. 그러므로 초기 섭동이 충분히 작을 때 가장 지배적인 항만을 고려하면 된다. 이를 식으로 표현하면 식(26)으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = b_1 e^{b_1 t} \theta_1 = b_1 T \quad (26)$$

여기서, b_1 : 과도 상황을 좌우하는 성장률

이 결과는 단지 접촉이 모든 시간에 걸쳐 유지되어 선형성이 보장되고 미끄럼 속도가 일정한 상황에서만 적용 가능하다. 그러나 속도가 변하는 문제의 근사적 해는 순간 속도 $V(t)$ 에서 지배적 성장률을 고려함으로써 정의할 수 있다. 그러므로 과도상황에서 압력과 온도장은 (27)식과 (28)식으로 나타낼 수 있다.

$$T = T(0) \exp \left\{ \int b_1(V(t)) dt \right\} \quad (27)$$

$$P = P(0) \exp \left\{ \int b_1(V(t)) dt \right\} \quad (28)$$

(13)식의 미끄럼 속도와 성장률의 관계식은 해석적으로 역의 관계를 구하는 것이 불가능하기 때문에 미끄럼 속도의 변화가 선형적이라고 가정하면 (29)식으로 나타낼 수 있다.

$$V(t) = V_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) \quad (29)$$

여기서, V_0 : 초기 미끄럼 속도

t_0 : 정지시까지 걸린 시간

(29)식을 (13)식에 적용하여 정리하면 (30)식으로 표현된다.

$$\bar{\tau} = \frac{t}{t_0} = 1 - \frac{b \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \tanh \left[a \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \right]}{mf \tilde{H}_2 V_0 \left(\sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \coth [ma] \tanh \left[a \sqrt{m^2 + \frac{b}{k_2}} \right] - m \right)} \quad (30)$$

3. 결과

미끄럼 속도와 성장률 b 의 관계가 평판 층 두께 $2a$ 와 파수 m 의 함수로 표시되고 성장률이 0이 될 때의 속도인 임계속도의 거동을 살펴보았다. 그리고 접촉 면의 온도 분포는 시간의 함수로 주어진다. 금속 평판 층의 물성치는 자동차용 디스크 브레이크로 널리 쓰이는 주철을 사용하였고 이를 Table 1에 나타내었다.

Table 1 Material properties for the metal layer

Properties	Value
Young's modulus (E)	$125 \times 10^9 \text{ MPa}$
Poisson's ratio (ν)	0.25
Coefficient of thermal expansion (α)	$1.2 \times 10^{-5} \text{ m/mK}$
Thermal conductivity (K)	54 W/mK
Thermal diffusivity (k)	$12.98 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

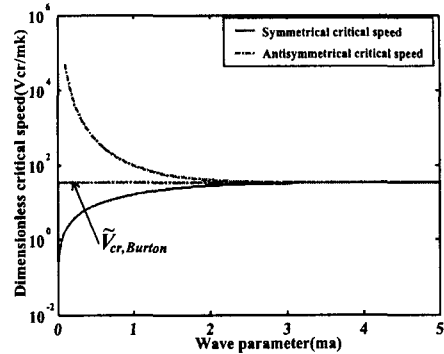


Fig. 2 A comparison between the dimensionless critical speeds for the symmetrical and antisymmetrical mode as a function of the wave parameter

3.1 대칭과 반대칭 미끄럼 속도의 비교

파동 변수(wave parameter) ma 에 따른 무차원화된 임계 속도 $\tilde{V}_{cr} = V_{cr}/mk$ 를 Fig.2에 나타내었다. 대칭적 경우에 대한 임계 속도가 반대칭적 경우보다 더 낮게 나타난다. 이는 대칭적인 경우가 반대칭적 분포를 보이는 경우보다 더 빠르게 임계값에 도달함을 의미한다. 이는 Lee와 Barber가 실제 자동차 브레이크 시스템에 사용되고 있는 패드와 디스크의 물성치로 예측한 결과와 상반되는 결과로 해석에 사용된 모델에서 단단한 반평판 ($E_1 \rightarrow \infty$)을 고려하였기 때문이다. 반무한 평판 ($a \rightarrow 0$)에 대한 Burton의 임계 속도 $\tilde{V}_{cr,Burton}$ 은 Fig.2에 점선으로 나타내었다. 두께가 증가하면 대칭인 경우와 반대칭인 경우가 모두 Burton의 예측식과 같은 형태로 나타난다.

실제 브레이크 시스템에서 마찰재의 열전도도가 디스크에 비해서 매우 작다. 그러므로 비전도체라는 가정은 결과에 실질적인 영향을 미치지 않는다. 대칭적 조건에 대하여 두께 a 가 감소함에 따라 단단한 반평판 사이의 금속 평판층이 압착하는 것이 훨씬 더 어려워진다. 이때 압력 섭동과 표면의 열 변형에 의한 변위는 평판 층의 반대쪽과 위상이 같다. 그리고 파장 변수 $ma=0$ 일 때 임계속도는 0으로 수렴한다. 반대로 반대칭 조건에 대하여 두께 a 가 감소함에 따라 평판 층의 굽힘(bend)이 더 쉽게 일어난다. 이때 압력 섭동과 표면의 열 변형에 의한 변위는 층의 반대쪽과 반대의 위상이

며 $ma=0$ 일 때 임계속도가 무한대로 발산한다. 패드의 마모를 줄이기 위해 마찰계로 충분히 딱딱한(rigid) 재질을 사용한 경우에 평판 층의 변형은 대칭적으로 나타난다. 본 연구에서는 이 결과를 바탕으로 가장 지배적인 모드인 대칭적 모드에 대해서만 고찰한다.

3.2 성장률

미끄럼 속도 V 의 함수로 표현된 성장률 $b(V)$ 는 (13)식을 역변환하여 수치적으로 얻을 수 있다. 파수 m 과 평판층의 두께 a 가 $m=200, 500$ 이고 $a=0.02, 0.005$ 일 경우 4 가지 조합을 각각 Fig.3에 나타내었다. 임계속도 V_{cr} 은 $b(V)$ 와 $b=0$ 인 V 축의 교점으로부터 결정된다. 금속 평판 층의 두께가 정해진 값을 가질 때 파수 m 이 증가할수록 임계속도가 증가한다. 즉 짧은 파장보다 긴 파장이 더 빠르게 임계 값에 도달한다. 그러나 두께가 정해진 값을 가지고 파수가 변할 때 미끄럼 속도가 충분히 클 경우에 대하여 낮은 파수(장파장)가 높은 파수(단파장)보다 더 지배적일 수도 있다. 또 파수가 정해진 경우에는 평판 층의 두께가 증가할수록 임계 속도 또한 증가한다. 즉 두께가 증가하면 시스템은 더 안정적일 수 있다.

파장 변수 ma 가 변할 때 무차원화된 성장률과 무차원화된 미끄럼 속도의 관계를 Fig. 4에 나타내었다. 속도가 정해진 경우 파장 변수가 감소하면 성장률은 증가한다. 즉 파장 변수 ma 가 큰 값을 가질수록 임계 속도 또한 증가한다. ma 가 증가함에 따라 반 무한 평판으로 가정한 Burton의 해에 가까워짐을 알 수 있다.

3.3 온도장의 과도 진전 해석

(30)식을 (27)식에 적용하여 수치적으로 연산하여 $a=0.005[m]$ 이고 초기속도 $V_0=0.8[m/s]$ 일 때 파수 m 의 변화에 따른 온도 분포의 과도 진전을 Fig.5(a)에 나타내었다. 온도의 진전량은 $T(0)$ 로부터 성장하여 최대값에 도달하고 시간이 흐름에 따라 감소한다. 이때 최대값과 최대값이 발생하는 시간은 파수의 함수이다. 파장 m 이 $1854[m^{-1}]$ 보

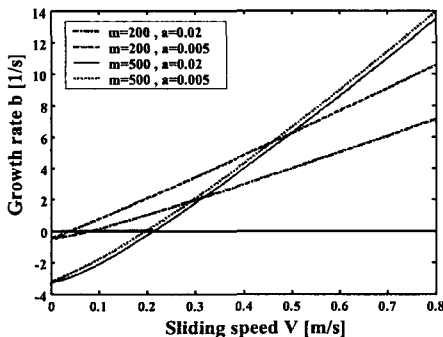


Fig. 3 growth rate as a function of sliding speed

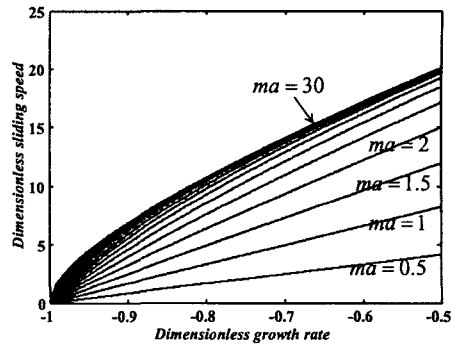


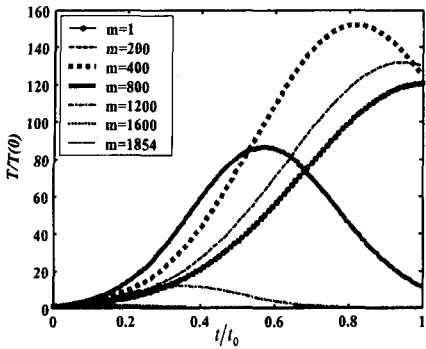
Fig. 4 Variation of the dimensionless growth rate with the sliding speed

다 더 큰 경우에는 시간에 따라 온도가 감소하므로 모든 섭동들이 안정하다. 즉 미끄럼 속도가 항상 임계속도보다 작은 값을 가진다. 그리고 초기 값에 대한 온도장의 최대값의 비를 파수 m 의 함수로 Fig.5(b)에 나타내었다. 파수 m 이 $400[m^{-1}]$ 보다 작은 값들에 대해서는 장파장이 단파장보다 더 큰 영향을 미친다. 반대로 m 이 $400[m^{-1}]$ 보다 큰 영역에서는 단파장이 장파장에 비해 시스템의 안정성을 저해한다. 다른 파수에 비해 지배적인 m 이 $400[m^{-1}]$ 인 값을 가지는 섭동이 가장 결정적인 섭동이다. 그러나 브레이크 시스템에 적용하기 위하여 디스크를 유한 원형 확장하면 Lee와 Barber⁽²⁾에 의해 밝혀진 적용 가능 최소 파장이 제한된다. 파장은 디스크의 발생한 열점(hot spot)의 수를 평균 반경으로 나눈 값으로 표현되는데 예를 들어 평균 반경이 $0.05[m]$ 이고 열점의 수가 1개일 때 m 이 $20[m^{-1}]$ 으로 디스크의 물리적 크기를 고려한 적합한 가장 작은 파수이다. 그러므로 파수 m 이 20보다 작은 값들을 가지는 섭동에 대해서는 고려할 필요가 없다.

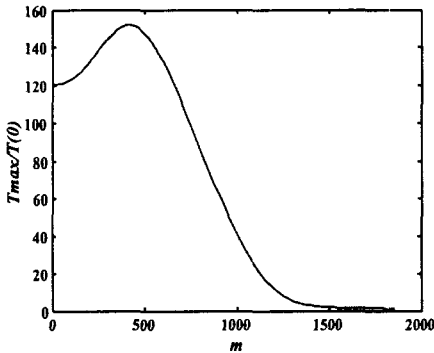
무차원화된 시간 ($\tau = k_2 m^2 t$)을 도입하여 (30)식을 무차원화된 속도, 성장률과 파장변수(ma)로 표현하면 (31)식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 - \frac{\tilde{b}\sqrt{1+\tilde{b}} \tanh[ma\sqrt{1+\tilde{b}}]}{\tilde{f}\tilde{H}_2\tilde{V}_0 \left(\sqrt{1+\tilde{b}} \coth[ma] \tanh[ma\sqrt{1+\tilde{b}}] - 1 \right)} \quad (31)$$

τ_0 이 3.82이고 $\tilde{f}\tilde{H}_2\tilde{V}_0$ 가 10일 때 각각의 무차원화된 파수인 파장변수 ma 에 대하여 무차원화된 시간 τ 과 초기온도에 대한 온도비 $T/T(0)$ 의 관계를 Fig.6에 나타내었다. 이로부터 Burton의 모델은 디스크의 두께가 작은 경우에는 온도와 압력 섭동의 성장이 과소평가되었다는 것을 알 수 있고 ma 가 충분히 큰 경우에는 정확한 예측을 할 수 있다.



(a) Transient evolution of the normalized temperature



(b) Maximum of the temperature perturbation

Fig. 5 Transient evolution of the temperature perturbation normalized w.r.t initial value for different values of the wave number as $a=0.005[m]$

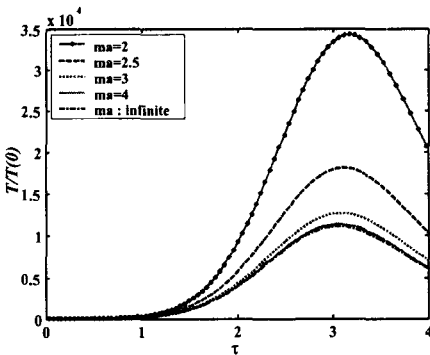


Fig. 6 Transient evolution with dimensionless time of the temperature perturbation normalized w.r.t initial value $T(0)$ for different values of the wave parameter

4. 결론

두께의 단단한 반 평판 사이에서 미끄럼 운동 하는 탄성 평판층 모델로 열탄성 불안정성에 대하

여 해석을 수행하였다. 마찰재의 열전도도가 금속 디스크에 비해 아주 작은 값이므로 비전도 패드로 가정하여 해석을 수행한 것은 합당하다. 반평판과 그 사이에서 미끄럼 운동하는 평판층이 모두 탄성 변형을 하고 전도체로 가정한 Lee 와 Barber⁽²⁾의 모델에 비해 열유속이 평판층에 대하여 같은 상태를 유지하여 성장률과 임계속도의 관계를 닫힌 형태(closed form)로 결정할 수 있고 미끄럼 운동을 하는 시스템의 과도 진전에 대한 연구를 가능하게 하는 장점이 있다.

본 연구에서 얻은 결론은 다음과 같다.

1. Burton의 해석 결과는 파장 변수 m 가 충분히 큰 구간에서만 정확한 결과이고 이때 대칭 모드와 반대칭 모드는 Burton의 해와 일치한다.
2. 평판층의 두께가 감소함에 따라 임계속도는 감소하고 성장률은 증가한다. 즉 두께가 감소할수록 시스템은 열탄성적으로 불안정해질 수 있다.
3. 저주파 섭동은 고주파 섭동에 비해 낮은 임계속도를 가지지만 고주파 섭동의 지수 성장률은 저주파 섭동에 비해 훨씬 더 빠르게 증가한다. 결과적으로 임계속도보다 충분히 큰 작동 속도에서는 고주파 섭동이 저주파 섭동보다 지배적일 것이다.

참고문헌

- (1) Dow T.A. and Burton R.A., "Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear", *Wear*, 1972, Vol.19, pp.315~328
- (2) Kwangjin Lee and Barber J.R., "Frictionally Excited thermoelastic instability in automotive disk brakes", *Journal of tribology*, 1993, Vol.115, pp. 607~614
- (3) A. Floquet and M.C. Dubourg, "Nonaxisymmetric effects for three dimensional analysis of brake", *Journal of Tribology*, 1994, Vol.116, pp.401~408
- (4) A. Floquet and M.C. Dubourg, "Realistic braking operation simulation of ventilated disk brakes", *Journal of Tribology*, 1996, Vol.118, pp.466~472
- (5) T.K. Kao and J.W. Richmond "Brake disc hot spotting and thermal judder : an experimental and finite element study", *Int. J. of Vehicle Design*, 2002, Vol. 23, Nos.3/4, pp. 276~297
- (6) 여태인, 미끄럼 마찰시 열탄성 접촉의 불안정성에 의한 유한요소해석, 대한기계학회 논문집 A 권, 1998, 제 22 권 제 7 호, pp.1185~1192
- (7) Barber JR, Hector LG "Thermoelastic contact problems for the layer" *ASME J Appl. Mech.* 1999, Vol 66, pp. 806~809
- (8) L. Afferrante, M. Ciavarella, P. Decuzzi, G. Demelio "Thermoelastic instability in a thin layer sliding between two halfplanes:transient behaviour", *Tribology International*, 2003, Vol. 36, pp. 205~212
- (9) Al-Shabibi A.M, Barber JR., "Transient Solution of a two-dimensional TEI problem using a reduced order model" *Int J of Mech Sciences* 2002, Vol.44, pp. 451~464