

축방향 왕복운동을 하는 집중질량을 가진 외팔보의 비선형 동적 모델링 및 안정성 해석

Nonlinear Dynamic Modeling and Stability Analysis of an Axially Oscillating Cantilever Beam With a Concentrated Mass

홍 정 환* · 유 흥 희**
Jung-Hwan Hong and Hong-Hee Yoo

Key Words : Axially Oscillating Motion(축 방향 왕복운동), Frequency Response Characteristics(주파수 응답특성), Cantilever Beam(외팔보), Nonlinear Modeling(비선형 모델링), Concentrated Mass(집중질량)

ABSTRACT

A nonlinear modeling method for an axially oscillating cantilever beam with a concentrated mass is presented in this paper. Hybrid deformation variables are employed for the modeling method with which frequency response characteristics of axially oscillating cantilever beams are investigated. The geometric nonlinear effects of stretching and curvature are considered to accurately predict the frequency response characteristics of the oscillating cantilever beam. The effects of the magnitude and the location on the concentrated mass on the frequency characteristics are investigated. It is found that the dynamic instability is significantly influenced by the two parameters.

1. 서론

외팔보가 그 축방향으로 왕복운동을 하는 경우 강제운동에 의한 강성변화가 발생한다. 외팔보가 고정단에서 자유단쪽으로 가속되면 시스템 굽힘강성이 감소하고 반대 방향으로 가속되면 강성이 증가하므로 결과적으로 굽힘강성의 연속적 변화가 발생하게 된다. 이러한 시스템은 강제운동 주기가 특정한 주파수 값을 갖게 되면 비록 작은 크기의 초기 변위라도 시간이 지날수록 그 크기가 매우 크게 증가한다. 불안정성을 야기하는 강제운동의 이러한 주파수는 고정된 외팔보의 고유진동수와 일치하지 않으며 이 때 발생하는 불안정성을 매개 변수공진(parametric resonance)이라 하며 이는 외력의 가진 주파수가 고유진동수와 일치할 때 발생하는 일반적인 공진 현상과는 구별된다.

강제운동을 하는 구조물의 동적 반응에 관한 연구는 회전운동을 대상으로 주로 많이 이루어져 왔다. 가장 널리 알려진 예제는 외팔보가 그 축의 수직방향으로 회전운동을 하는 경우로 그 회전에 의한 원심력 발생으로 시스템 강성이 증가하므로 그 결과로서 고유진동수들이 증가한다. 이 분야의 연구들과 관련된 내용들은 참고문헌(1~2)에 잘 정리되어 있다. 참고문헌(3~5)에서는 구조물이 병진운동을 포함한 일반 강제운동을 하는 경우의 동적 모델링을 제시했으나 수치예제는 회전운동을 하는 외팔보로 국한하였다. 참고문헌(6)에는 참고문헌(4)에 제시된 동적 모델링을 이용해 축 방향 왕복운동을 할 때도 강성이 변화하는 것을 보이고 안정성 해석을 수행하였다. 이 연구에서 사용된 모델링은 선형 모델로서 가진 주파수와 왕복 운동 진폭 변화에 따른 안정 및 불안정 영역을 구하고 그 천이곡선을 해석적으로 유도하였다. 참고문헌(7)의 연구는 동일한 보 예제에 대해서 복합변형 변수를 이용한 비선형 모델링을 유도하고 주파수 응답특성을 구하여 선형 모델과의 동특성 차이를

* 한양대학교 기계설계학과 대학원

** 한양대학교 공과대학 기계공학부

E-mail: hhyoo@hanyang.ac.kr Tel : (02)2290-0446

$$\frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_{2i}} = - \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^x (\phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta}) d\zeta q_{2j} \bar{a}_1 + \phi_{2i} \bar{a}_2 \quad (11)$$

운동 방정식은 이상에서 구한 식들을 이용하여 다음의 형태로 구할 수 있다.

$$f_r^* + f_r = 0 \quad (r=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2) \quad (12)$$

이 운동방정식에서 일반 관성력은 세장보의 경우 다음 식에 의해 구해질 수 있다.

$$f_r^* = - \int_0^L \{m + M\delta(x - x_M)\} \bar{a}^P \cdot \frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_r} dx \quad (13)$$

$$(r=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2)$$

여기서 L 과 m 은 각각 보의 길이와 단위길이당 질량을 나타내며, M 과 x_M 은 각각 집중질량의 크기와 부착위치를 나타낸다. 또한 \bar{a}^P 는 P 점의 가속도를 나타낸다.

외력이 작용하지 않는 경우에 운동방정식의 일반 작용력은 탄성에너지에 의해서만 결정되는데 보의 인장과 굽힘 효과만 고려한 탄성에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E_0 A_0 \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E_0 I_{zz} (k_3)^2 dx \quad (14)$$

여기서 E_0 는 영률 A_0 는 단면적을 각각 나타내고 I_{zz} 는 2 차 면적 모멘트를 k_3 는 \bar{a}_3 방향 곡률을 나타낸다. k_3 를 3 제곱 비선형 항까지 고려하여 나타내면 (곡률의 비선형성은 참고문헌[9] 참조) 다음과 같다.

$$k_3 = u_{2,xx} (1 - 2s_x + \frac{1}{2} u_{2,x}^2) - s_{,xx} u_{2,x} \quad (15)$$

식(15)와 함께 식(14)를 이용하여 일반작용력을 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$f_r = - \frac{\partial U}{\partial q_r} \quad (r=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2) \quad (16)$$

이상의 결과를 종합하면 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} [\hat{m}_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} + A_{ij}^{11} q_{1j}] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_1} \sum_{k=1}^{\mu_1} \hat{X}_{ijk}^{122} [\dot{q}_{2j} \dot{q}_{2k} + q_{2j} \ddot{q}_{2k}] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_1} \sum_{k=1}^{\mu_1} [B_{ijk}^{122} + 2B_{ijk}^{222}] q_{2j} q_{2k} \\ & = -\dot{v}_1 \hat{R}_{1i} \quad (i=1,2,\dots,\mu_1) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} [\hat{m}_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + A_{ij}^{22} q_{2j}] + \sum_{j=1}^{\mu_2} -\dot{v}_1 \hat{X}_{ij}^{22} q_{2j} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_1} \hat{X}_{ijk}^{221} q_{2j} \ddot{q}_{1k} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} [B_{ijk}^{221} + 4B_{ijk}^{222}] q_{2j} q_{1k} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \sum_{l=1}^{\mu_2} [B_{ijkl}^{2222} + B_{ijkl}^{2222}] q_{2j} q_{2k} q_{2l} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \sum_{l=1}^{\mu_2} \hat{X}_{ijkl}^{2222} [q_{2j} q_{2k} \ddot{q}_{2l} + q_{2j} \dot{q}_{2k} \dot{q}_{2l}] \\ & = -\dot{v}_2 \hat{R}_{2i} \quad (i=1,2,\dots,\mu_2) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서,

$$R_{ci} = \int_0^L m \phi_{ci} dx \quad (19)$$

$$\hat{R}_{ci} = R_{ci} + M \phi_{ci}(x_M) \quad (20)$$

$$m_{ij}^{\alpha\beta} = \int_0^L m \phi_{ci} \phi_{cj} dx \quad (21)$$

$$\hat{m}_{ij}^{\alpha\beta} = m_{ij}^{\alpha\beta} + M \phi_{ci}(x_M) \phi_{cj}(x_M) \quad (22)$$

$$A_{ij}^{11} = \int_0^L E_0 A_0 \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \quad (23)$$

$$A_{ij}^{22} = \int_0^L E_0 I_{zz} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \quad (24)$$

$$X_{ij}^{22} = \int_0^L m \int_0^x \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta dx \quad (25)$$

$$\hat{X}_{ij}^{22} = X_{ij}^{22} + M \int_0^M \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \quad (26)$$

$$X_{ijk}^{122} = \int_0^L m \phi_{1i} \int_0^x \phi_{2j,\zeta} \phi_{2k,\zeta} d\zeta dx \quad (27)$$

$$\hat{X}_{ijk}^{122} = X_{ijk}^{122} + M \phi_{1i}(x_M) \int_0^M \phi_{2j,\zeta} \phi_{2k,\zeta} d\zeta \quad (28)$$

$$X_{ijk}^{221} = \int_0^L m \int_0^x \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \phi_{1k} dx \quad (29)$$

$$\hat{X}_{ijk}^{221} = X_{ijk}^{221} + M \int_0^M \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \phi_{1k}(x_M) \quad (30)$$

$$X_{ijkl}^{2222} = \int_0^L m \int_0^x \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \int_0^x \phi_{2k,\zeta} \phi_{2l,\zeta} d\zeta \quad (31)$$

$$\hat{X}_{ijkl}^{2222} = X_{ijkl}^{2222} + M \int_0^M \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \int_0^M \phi_{2k,\zeta} \phi_{2l,\zeta} d\zeta \quad (32)$$

$$B1_{ijk}^{\alpha\beta\gamma} = \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{\alpha i,xx} \phi_{\beta j,xx} \phi_{\gamma k,xx} dx \quad (33)$$

$$B2_{ijk}^{\alpha\beta\gamma} = \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{\alpha i,x} \phi_{\beta j,xx} \phi_{\gamma k,xx} dx \quad (34)$$

$$B3_{ijk}^{\alpha\beta\gamma} = \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{\alpha i,xx} \phi_{\beta j,xx} \phi_{\gamma k,x} dx \quad (35)$$

$$B4_{ijk}^{2222} = \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} \phi_{2k,xx} \phi_{2l,xx} dx \quad (36)$$

$$B5_{ijk}^{2222} = \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} \phi_{2k,x} \phi_{2l,x} dx \quad (37)$$

3. 수치해석

본 절에서는 앞에서 유도된 운동방정식을 이용하여 축 방향 왕복운동을 하는 외팔보의 주파수 응답특성 해석을 수행하였다. 축 방향 왕복운동 v_1 은 다음 함수로 이상화하여 나타내었다.

$$v_1 = v(1 - \cos \omega t) \quad (38)$$

따라서

$$\dot{v}_1 = v\omega \sin \omega t \quad (39)$$

식(38)와 (39)에서 ω 는 보의 축방향 왕복 운동 주파수를 나타낸다. 또한 방정식에 나타나는 집중 질량의 크기와 위치를 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 사용한다.

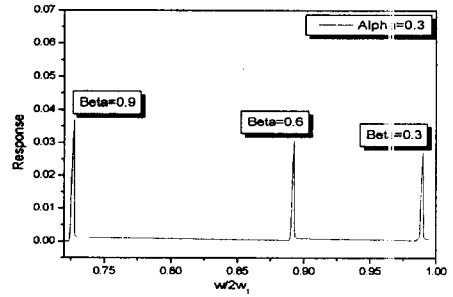
$$\alpha = \frac{M}{\rho L}, \beta = \frac{x_M}{L} \quad (40)$$

수치해석에 사용된 데이터들은 표 1 과 같다.

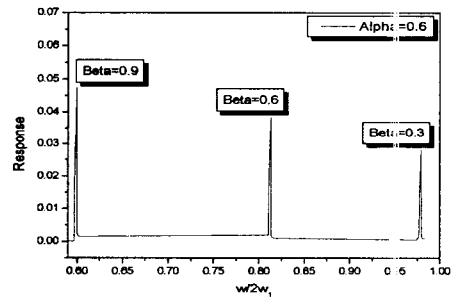
Table.1 Numerical data used for the simulation

Notations	Description	Numerical Data
ρ	Mass per unit length	0.0135 kg/m
E	Young's modulus	193.0E9
A	Cross section area	1.767E-5 m ²
I	Second area moment of inertia	2.485E-13 m ⁴
L	Length	0.05 m

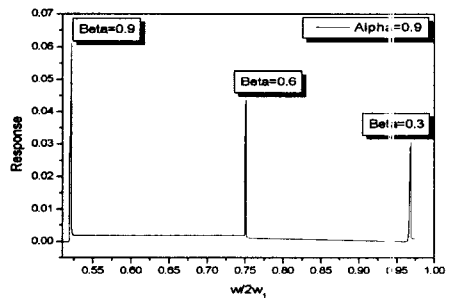
Fig.2 는 축방향 왕복운동을 하는 외팔보에서 α 를 고정시키고, β 의 변화에 따른 주파수 응답 진폭의 크기를 도시한 것이다. 이 결과는 널리 사용되는 Shooting Method 를 통해 (참고문헌(10) 참조) 구한 것인데 주파수 응답곡선은 왕복 주파수가 첫 번째 고유진동수의 2 배 근처에 있을 때 오른쪽으로 흰 모양을 보여준다. β 가 커짐에 따라 응답이 발생하는 주파수 영역이 저주파영역으로 이동하는 것을 관찰 할 수 있다.



(a) Frequency Response at $\alpha=0.3$

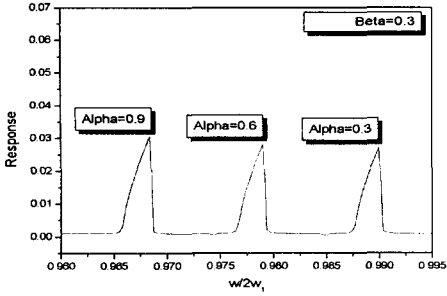


(b) Frequency Response at $\alpha=0.6$

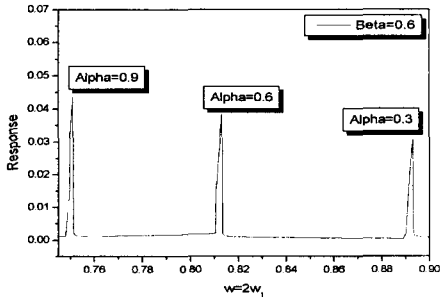


(c) Frequency Response at $\alpha=0.9$

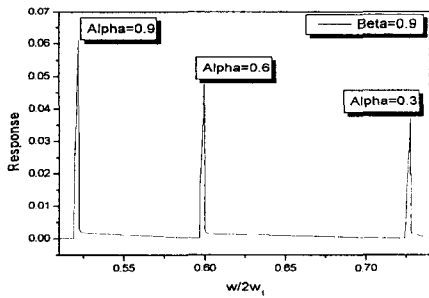
Fig. 2 Frequency response curves with various values of α and β



(a) Frequency Response at $\beta=0.3$



(b) Frequency Response at $\beta=0.6$



(c) Frequency Response at $\beta=0.9$

Fig. 3 Frequency response curves with various values of β and α

Fig.3 에서는 β 를 고정시키고, α 의 변화에 따른 동적반응 진폭의 크기를 도시한 것이다. 이 결과에서도 α 가 커짐에 따라 주파수 영역이 저주파영역으로 이동하는 것을 알 수 있으며 Fig.2 와 비교해보면 α 의 변화량이 β 의 변화량보다 주파수의 영역과 진폭의 크기가 작음을 알 수 있다. 이는 $\beta=0.3$ 인 경우에 두드러지게 나타난다. 여기서서는 질량 크기가 커져도 다른 경우에 비하여 저주파로의 이동폭이 작으며 그 진폭의 크기 또한 변화가 미미함을 알 수 있다.

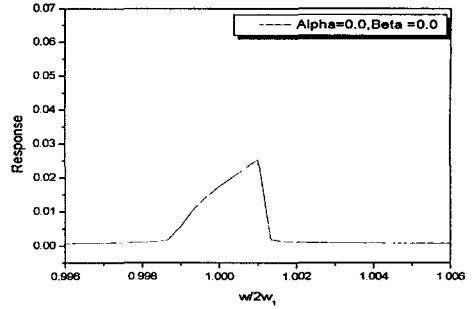


Fig. 4 Frequency response curves with $\alpha=\beta=0$

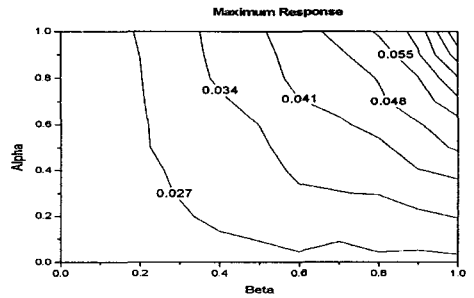


Fig. 5 Maximum response versus α, β

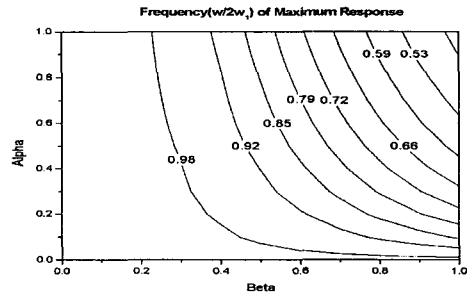


Fig. 6 Frequency of maximum response versus α, β

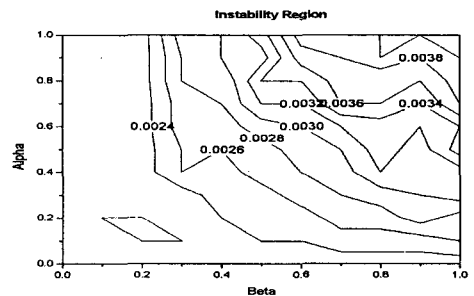


Fig. 7 Instability region band width versus α, β

Fig.4 는 집중질량이 없을 경우의 안정성 해석 결과를 보여준다. 앞에서 보여준 집중질량을 갖는 모델의 해석 결과는 주파수의 영역이 저주파 영역 이동하였음을 알 수 있다. 이와 더불어 주파수 응답곡선이 나타내는 진폭의 크기 또한 집중질량을 가진 경우가 더 커짐을 알 수 있다.

Fig.5 와 Fig.6 은 α, β 의 변화에 따른 주파수 응답의 최대값의 크기와 최대값이 발생하는 주파수의 위치를 등고선으로 보여준다. 그림에서 보면, β 가 작은 영역에서는 최대값이나 발생주파수의 변화가 α 의 변화에 별 영향을 받지 않으나 β 가 커짐에 따라서 그 영향이 증가함을 알 수 있다.

Fig.7 은 α, β 의 변화에 따른 주파수 응답특성 곡선의 두께를 보여준다. 이는 불안정성의 영역의 크기를 나타내는데 앞의 그림의 결과와 유사하게 β 가 작은 영역에서는 α 의 변화에 영향을 별로 받지 않으나 β 가 커짐에 따라서 그 영향이 증가함을 알 수 있다.

3. 결론

본 논문에서는 축 방향 왕복운동을 하는 집중 질량을 가진 외팔보의 인장 및 굽힘 방향 비선형성을 고려한 동적 모델링을 복합 변형 변수들을 이용해 유도하고, 이에 근거하여 주파수 응답특성 해석을 수행하였다. 특별히 집중질량의 부착위치 및 크기 변화에 따른 동적 안정성의 특성변화를 고찰하였다. 무차원화된 집중질량의 위치 β 가 작은 값의 범위에서는 집중질량의 크기 즉, α 의 변화에 따른 영향이 작았으나 β 값이 증가함에 따라 α 의 영향에 민감해짐을 알 수 있었다. 이는 주파수 응답 최대진폭의 크기와 그것이 발생하는 주파수의 위치 그리고 불안정성이 발생하는 영역 크기에 이르기까지 동일한 특성들을 보여주었다. 이러한 특성은 집중질량을 갖는 왕복운동을 하는 외팔보 설계 시 고려되어야 하는 중요한 특성으로 불안정성의 크기와 위치 그리고 폭을 결정하여야 하는 경우에 매우 유용한 정보를 제공할 수 있을 것으로 사료된다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Leissa, A., 1981, "Vibration Aspects of Rotating Turbomachinery Blades," Applied Mechanics Reviews, Vol.34, pp.629-635.
- (2) Rao, J., 1987, "Turbomachine Blade Vibration," Shock and Vibration Digest, Vol.19, pp.3-10.
- (3) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 10, pp. 139-151.
- (4) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," J. of Sound and Vibration, 181(2), pp. 261-278.
- (5) Yoo, H. and Chung, J., 2001, "Dynamics of Rectangular Plates Undergoing Prescribed Overall Motions," J. of Sound and Vibration, 239(1), pp. 123-137.
- (6) Hyun, S. and Yoo, H., 1999, "Dynamic Modelling and Stability Analysis of Axially Oscillating Cantilever Beams," J. of Sound and Vibration, 228(3), pp.543-558.
- (7) 김나은, 현상학, 유홍희, 2003, "축 방향 왕복운동을 하는 외팔보의 복합변형변수를 이용한 비선형 모델링 및 주파수 응답특성," 한국소음진동공학회지, 제 13 권 제 3 호, pp.210-216.
- (8) Crespo da Silva, M. R. M., and Glynn, C. C., 1978, "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. I. Equations of Motion," Journal of Structural Mechanics, Vol. 6, pp. 437-448.
- (9) Kim, J., Hyun, S. and Yoo, H., "Nonlinear Modeling and Dynamic Analysis of Flexible Structures Undergoing Overall Motions Employing Mode Approximation Method, KSME International J., 16(7), pp.896-901.
- (10) E. J. Doedel, A. R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Yuri A. Kuznetsov, B. Sandstede, X. J. Wang, AUTO97 : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations, 1997, (www.indy.cs.concordia.ca/auto).