

# 이산 영역에서 공간상의 입자속도, 인텐시티 예측 오차의 정량화

## Quantification of Particle Velocity and Intensity Estimation Error in a Discrete Domain

최 영 철\* · 김 양 한\*\*

Choi, Young-Chul and Kim, Yang-Hann

**Key Words** : Error Analysis(오차해석), Particle Velocity(입자속도), Intensity(인텐시티)

### ABSTRACT

This paper studies the error of pressure, particle velocity, and intensity which are distributed in a space. Errors may be amplified when other sound field variables are predicted. We theoretically derive their bias error and random error. The analysis shows that many samples do not always guarantee good results. Random error of the velocity and intensity are increased when many samples are used. The characteristics of the amplification of the random error are analyzed in terms of the sample spacing. The amplification was found to be related to the spatial differential of random noise. The numerical simulations are performed to verify theoretical results.

### 기호설명

- $\hat{p}$  : 측정된 음압신호
- $p$  : 실제 음압 신호
- $u$  : 실제 입자 속도
- $I$  : 실제 인텐시티
- $n$  : 공간 상의 오차 (여기서는 공간상의 백색잡음)
- $\sigma^2$  : 노이즈의 분산
- $E$  : 앙상블 평균(ensemble average)
- $\rho_0$  : 매질의 밀도
- $c$  : 음파 속도
- $M$  : 측정점의 개수
- $\lambda$  : 파장 (wavelength)
- $\Delta$  : 공간상의 샘플링 간격(측정점의 간격)
- $A$  : 1차원 평면파의 크기
- $k$  : 파수 (wavenumber)
- $j$  : 허수
- $E$  : 앙상블 평균(ensemble average)

- $B(\theta)$  : 바이어스 오차(Bias error)
- $\sigma^2(\theta)$  : 랜덤 오차(Random error)
- $P(m)$  :  $(m)$  위치에서의 음압
- $V(m)$  :  $(m)$  위치에서의 입자 속도
- $I(m)$  :  $(m)$  위치에서의 인텐시티

### 1. 서 론

공간 또는 매질에서의 음향 특성을 알기 위해서는 음압, 속도, 그리고 인텐시티 등과 같은 음향물리량을 알아야 한다. 이러한 물리량들은 이산 영역에서 직접 측정하거나, 혹은 측정하기 쉬운 물리량으로부터 다른 물리량과의 관계 등을 통해 추정하여 얻게 된다.

센서를 통하여 측정된 신호에는 센서간 특성차이에 의한 오차, 측정위치 부정확성에 의한 오차 등 여러 요인에 의해 오차가 존재할 수 있으며 이러한 오차는 다른 음향 물리량들을 예측할 때 큰 오차를 유발시킬 수 있다. 예를 들어 음향 홀로그래피에서 측정오차는 특히 음원면과 홀로그래프면 사이의 공간에서 음장을 예측하는 후방예측(backward prediction)시 큰 오차를 발생시키는 잘 알려져 있다.<sup>(1)</sup> 이러한 오차를 해석하기 위해 남경욱<sup>(2)</sup> 등은 평면 음향 홀로그래피에서 측정오차의 원인이 공간에 불규칙할 경우에 임의의 점에서 음압 추정 오차에 대해 해석을 시도하였다.

\* 한국과학기술원(KAIST)  
E-mail : youngcc@kaist.ac.kr  
Tel : (042) 869-3055, Fax : (042) 869-8220

\*\* 한국과학기술원(KAIST)

본 연구에서는 음압신호에 측정오차가 존재할 경우 입자속도 및 인텐시티를 예측할 때 발생하는 오차에 대해 알아본다. 특히 여러 파라미터 중 공간 샘플링 간격이 이러한 오차에 어떠한 영향을 미치는지에 대해 증점적으로 살펴보기로 한다.

## 2. 공간 샘플링에 따른 오차의 영향

음향 특성을 알기 위해 많은 경우 측정이 용이한 음압을 측정하게 된다. 입자 속도 및 인텐시티는 Euler 식을 이용하여 측정된 음압을 공간 미분함으로써 추정할 수 있다. 이때 공간 샘플링 간격을 좁게 하여 많은 데이터를 얻으면 속도 및 인텐시티를 예측할 때 오차가 줄어들은 잘 알려져 있다.<sup>(3)(4)</sup>

노이즈 및 오차가 없는 1차원 평면파에 대한 예를 들어 보자.

$$P = A \exp(-j k x) \quad (1)$$

공간에서 연속적인 음압신호를 측정하는 것은 현실적으로 어렵기 때문에  $\Delta$  간격으로 측정하여 입자속도 및 인텐시티를 추정하게 된다. 이때 이산화 과정에 의한 오차가 발생하게 되는데, 각 물리량에 대한 이러한 오차를 정규화 시켜서 본다면 다음식과 같이 나타난다.<sup>(3)(4)</sup>

$$\begin{aligned} e(p) &= \frac{p - p_e}{p} = 1 - \cos(k\Delta) \\ &\approx \frac{(k\Delta)^2}{2} - \frac{(k\Delta)^4}{24} + \frac{(k\Delta)^6}{720} \\ e(u) &= \frac{u - u_e}{u} = 1 - \frac{\sin(k\Delta)}{k\Delta} \\ &\approx \frac{(k\Delta)^2}{6} - \frac{(k\Delta)^4}{120} + \frac{(k\Delta)^6}{5040} \end{aligned} \quad (2)$$

$$e(I) = \frac{I - I_e}{I} \approx \frac{2}{3} (k\Delta)^2 - \frac{2}{5} (k\Delta)^4$$

여기서  $k\Delta \ll 1$ ,  $p$ 는 음압신호,  $u$ 는 입자속도,  $I$ 는 인텐시티를 나타내고, 아래첨자  $e$ 는 예측한 값을 의미한다.

Fig. 1은 (2)식을 그래프로 나타낸 것이다. (2)식과 Fig. 1에서 볼 수 있듯이 특정 주파수에서는 측정간격이 작을수록, 즉 공간상에 샘플링이 많을수록 오차가 줄어들음을 알 수 있다. 이것은 데이터가 많을수록 좋은 결과를 얻는다는 일반적인 사실과도 일치하는 것이다.

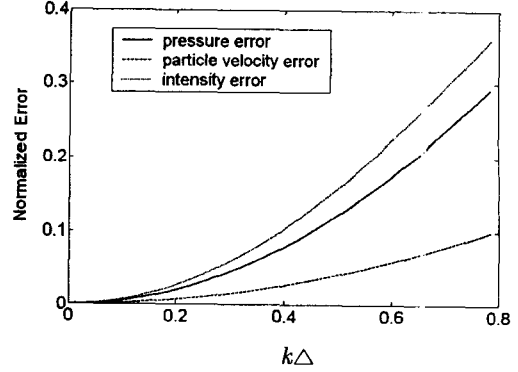


Fig.1 Systematic errors as a function of wavenumber( $k$ ) and separation distance( $\Delta$ )

하지만 측정신호에 여러 가지 원인에 의한 오차 및 노이즈가 포함되어 있을 경우는 어떻게 될까? 이에 대한 답을 얻기 위해 (1)식과 같이 1차원 평면파에 대한 간단한 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

Fig. 2는 1차원 평면파에 일정양의 노이즈가 존재하고 단지 공간상의 샘플링 개수만을 달리 하였을 때의 시뮬레이션 결과를 보여주고 있다. 여기서 SNR(signal to noise ratio)은 415, 주파수는 1kHz, 어레이 크기(aperture size)는 0.5m이다. 입자 속도 및 인텐시티는 노이즈가 포함된 음압신호로부터 관계식에 의해 추정된 값이다. 측정점의 개수는 노이즈에 의한 영향을 잘 보기 위해 Fig2(a)는 50개, (b)는 100개로 하여 결과를 얻었다. Fig. 2 (a)와 (b)를 비교해 보았을 때, Fig. 1의 결과와는 달리 샘플링을 많이 한 그림 2(b)일 경우 예측한 속도 및 인텐시티의 랜덤오차가 더 크음을 쉽게 관찰할 수 있다.

따라서 음압신호에 여러 가지 오차 및 노이즈가 존재할 경우 (2)식의 결과와 달리 공간 샘플링이 많을수록, 즉 데이터가 많을수록 더욱 나쁜 결과가 초래됨을 쉽게 짐작할 수 있다.

다음절에서는 이와 같이 음압신호에 노이즈가 존재할 경우 입자속도 및 인텐시티를 예측할 때 발생하는 오차를 정량적으로 살펴보고자 한다. 여기서 음향 물리량에 대한 오차를 정량적으로 해석하기 위해 오차의 확률적 특성을 대표하는 양인 바이어스 오차(Bias error)와 랜덤 오차(Random error)를 사용하기로 한다.<sup>(5)(6)</sup>

$$\begin{aligned} B(\hat{\theta}) &= E[\hat{\theta}] - \theta \\ \sigma^2(\hat{\theta}) &= E[|\hat{\theta}|^2] - |E[\hat{\theta}]|^2 \end{aligned} \quad (3)$$

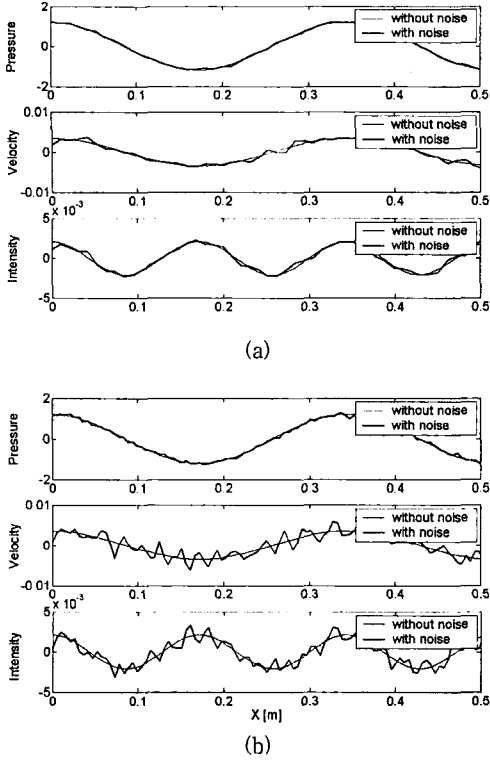


Fig. 2 Numerical simulation for observing the effect of sampling. ( $f=1$  kHz,  $\rho_0 = 1.24$  kg/m<sup>3</sup>,  $L=0.5$  m) The number of the measurement points is (a) 50, (b) 100. Figure shows that errors are amplified when the measurement points are doubled.

### 3. 공간상의 백색 잡음에 의한 오차의 정량화

본 논문에서는 수식에 대한 물리적 의미를 쉽게 이해하기 위해 (1)식과 같이 1차원 평면파에 대한 오차를 유도하기로 한다.

오차가 포함된 음압 신호는 다음식과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{p} = p + n \quad (4)$$

여기서  $n$  은 오차를 나타내는 것으로 공간에 불규칙하게 분포해 수많은  $n_i$  값들을 가지고 있는 모집단에서 임의로 뽑아서 배치한 것으로 생각할 수 있는 경우이다. 이 경우 측정사건은 수많이 있을 수 있어 하나의 참 값에 대해 측정 사건은 앙상블로 존재하고, 실제 측정사건은 이중의 하나라고 생각

한다.

각 모집단의 평균을 0, 분산을  $\sigma^2$  이라고 하고, 오차  $n$  이 (4)식과 같은 성질을 가지고 있다면, 오차  $n_i$  는 공간상의 백색잡음(spatial white noise)로 볼 수 있다.

$$\begin{aligned} E[n(m)] &= 0 \\ E[n_i(m)n_j(m')] &= \sigma^2 \delta(m - m') \end{aligned} \quad (5)$$

따라서 여러 가지 원인에 의해 생성된 오차를 공간상의 백색잡음으로 보기 때문에 (4)식은 물리적으로 측정된 신호에 단지 노이즈가 포함된 경우로 볼 수 있다. 이러한 노이즈는 다른 물리량인 속도 및 인텐시티를 예측할 때 큰 오차를 발생시키는 요인이 된다.

음향물리량인 음압, 속도, 및 인텐시티는 Euler 식 ( $-\nabla p = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}$ ) 과 인텐시티식 ( $I = P \cdot U$ ) 에 의해 서로 관계되어 있으므로 노이즈가 포함된 음압신호인 (4)식을 오차를 나타내는 (3)식에 대입하면, 각 물리량에 대한 오차를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} B\{\hat{P}(m)\} &= 0 \\ B\{\hat{V}(m)\} &= 0 \\ B\{\hat{I}(m)\} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

(6)식은 음압신호에 분산이  $\sigma^2$  인 노이즈가 존재할 경우 각 물리량에 대한 바이어스 오차를 나타내고 있다. (6)식에서 알 수 있듯이 측정된 음압 신호에 랜덤 노이즈가 존재하더라도 이로부터 예측한 입자 속도 및 인텐시티의 바이어스 오차는 무시할 수 있다는 것을 의미한다.

오차의 확률적 특성을 대표하는 다른 양인 랜덤오차는 다음식과 같이 유도되어 진다.

$$\begin{aligned} \sigma^2\{\hat{P}(m)\} &= \sigma^2 \\ \sigma^2\{\hat{V}(m)\} &= \sigma^2 \frac{1}{2\pi^2 \rho_0^2 c^2} \left\{ \frac{\lambda}{\Delta} \right\}^2 = \sigma^2 \frac{2}{\rho^2 c^2 k^2 \Delta^2} \\ \sigma^2\{\hat{I}(m)\} &= \sigma^2 \frac{1}{16\pi^2 \rho_0^2 c^2} \left\{ \frac{\lambda}{\Delta} \right\}^2 \{|P(m+1)|^2 + |P(m)|^2\} \\ &= \sigma^2 \frac{1}{4\rho_0^2 c^2 k^2 \Delta^2} \{|P(m+1)|^2 + |P(m)|^2\} \end{aligned} \quad (7)$$

(7)식은 우리에게 흥미로운 사실을 보여주고 있다. 공간상의 측정 간격이 작아질수록 음압의 랜덤 오차는 노이즈의 분산인  $\sigma^2$  으로 일정하지만, 속도와 인텐시티의 랜덤오차는

커진다는 것이다. 앞에서 살펴보았듯이 노이즈가 없는 경우에는 샘플링 간격이 좁을수록 오차가 줄어들었지만, 음압 신호에 노이즈가 존재한다면 예측한 속도 및 인텐시티의 랜덤 오차는 오히려 증가한다는 것을 의미하고 있다.

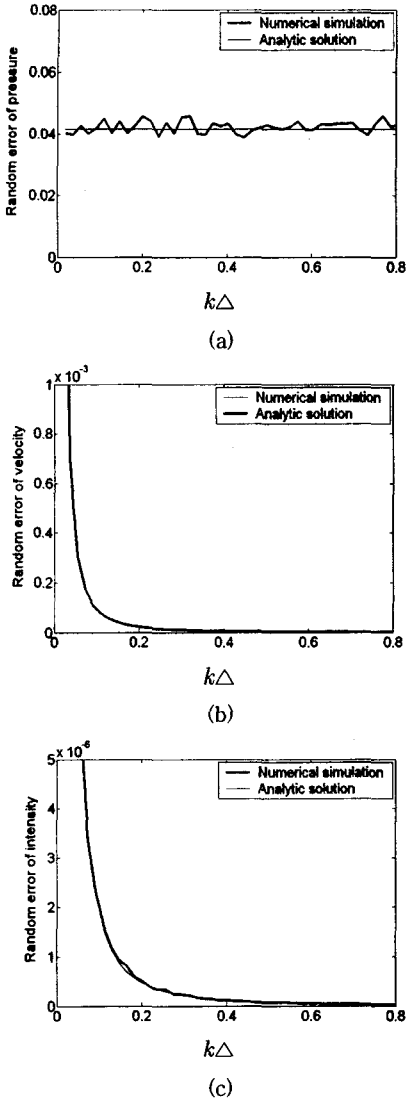


Fig. 3 The random errors with respect to sampling, (a) the random error of pressure, (b) the random error of velocity, (c) the random error of intensity.

이러한 이론적인 내용을 컴퓨터 모의 실험을 이용하여 검증하여 보자. Fig. 3에서 가는 실선은 해석적 해를 나타내고 굵은 실선은 컴퓨터 모의 실험 결과를 보여주고 있다. 여기서 해석적인 해는 랜덤 오차를 수식으로 유도한 (7)식을 말하는 것이며, 컴퓨터 모의 실험은 Fig. 2와 같이 1차원 음

파의 임의의 점에서 앙상블 평균을 500번 수행한 결과이다. 이때 주파수는 1 kHz이고 공기 중에서 모의 실험한 것이다. Fig. 3의 결과에서 샘플링 개수가 증가할수록 음압의 랜덤 오차는 줄어들지만, 속도와 인텐시티의 랜덤 오차는 커짐을 알 수 있다.

#### 4. 오차가 증가하는 원인

앞 절에서 오차에 가장 큰 영향을 미치는 것이 샘플링 개수이며, 이산영역에서 샘플링 개수가 증가함에 따라 압력의 랜덤 오차는 일정하지만, 속도와 인텐시티의 랜덤 오차는 커짐을 알았다. 이러한 현상이 나타나는 원인은 음압으로부터 속도와 인텐시티를 구할 때 공간상 미분을 하게 되는데, 이러한 미분에 의해 잡음이 증폭하게 되어 랜덤 오차가 증가하게 되는 것이다.

이절에서는 이와 같이 노이즈가 존재하는 음압신호를 가지고 입자 속도 및 인텐시티를 예측할 때 오차가 증가하는 이유에 대해 살펴보기로 한다.

랜덤 노이즈가 포함된 음압신호인 (1)식을 Euler 식에 대입하여 입자 속도를 구해보면 다음과 같다.

$$V_x = \frac{1}{j2\pi f \rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = \frac{1}{j2\pi f \rho_0} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial x} \right) \quad (7)$$

우변의 첫 번째 항은 이산영역에서 음압을 공간 미분하는 형태이기 때문에 여기서 발생하는 오차는 (2)식과 같이 샘플링 간격이 작을수록 오차가 감소한다. 하지만 우변의 두 번째 항은 백색 노이즈를 공간 미분하는 형태이기 때문에 여기서 오차가 커지게 됨을 짐작할 수 있다. 주파수 영역에서 본다면 노이즈를 미분한다는 것은  $-j\omega$ 를 곱하는 형태이므로 노이즈가 증폭하게 됨은 쉽게 알 수 있다.

Fig.4는 시간 영역에서 샘플링 간격을 반으로 줄일 때, 노이즈를 미분함으로써 랜덤오차가 어떻게 변하는지 그림으로 설명하고 있다. 여기서 Fig.4 (a)는 크기가  $\xi$  내에 존재하는 공간상의 백색 잡음을 보여주고 있다. (7)식의 두 번째 항을 이산 영역에서 표현을 한다면 다음식과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{j2\pi f \rho_0} \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{j2\pi f \rho_0} \frac{n' - n}{\Delta} \quad (8)$$

Fig.4 (b), (c)와 같이 샘플링 간격이  $\Delta$ 일 때 기울기 값이 가질 수 있는 최대, 최소값은  $\pm \frac{\xi}{\Delta}$ 이므로 잡음을 미분한 값은 다음범위 내에 존재해야 한다.

$$-\frac{\xi}{\Delta} \leq \frac{\partial n}{\partial x} \cong \tan \theta < \frac{\xi}{\Delta} \quad (9)$$

마찬가지로 샘플링 간격이  $2\Delta$  일 때는 미분한 값이

$$-\frac{\xi}{2\Delta} \leq \frac{\partial n}{\partial x} \cong \tan \phi < \frac{\xi}{2\Delta} \quad (10)$$

사이에 존재해야 한다. 따라서 (9)식과 (10)식에서 볼 수 있듯이 샘플링 간격이 작을수록  $\frac{\partial n}{\partial x}$ 의 값이 존재하게 될 범위는 넓어지게 되고, 따라서 랜덤오차가 커짐을 쉽게 알 수 있다. 위 사실로부터 이산영역에서 잡음을 미분 할 때는 샘플링 간격이 좁을수록, 바꾸어 말하면 샘플링수가 많을수록 랜덤오차가 커진다는 것을 알 수 있다. 따라서 음압을 공간상 미분하여 얻은 속도일 경우, 샘플링 간격이 적을수록 랜덤에러가 증가함을 쉽게 알 수 있다.

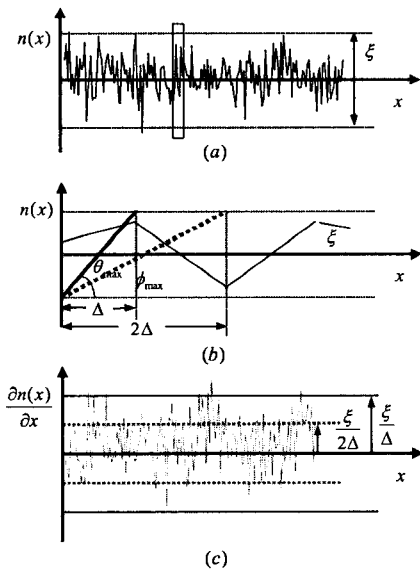


Fig.4 Graphical explanation of the reason for increasing random error. (a) spatial white noise which is bounded by  $\xi$ , (b) Maximum value of differentiation white noise. This graph is zoomed in the rectangular box of Fig.1 (a), (c) the range of  $\frac{\partial n}{\partial x}$  grows as the sample spacing is decreased. Therefore, these figures show that the more samples are accomplished, the more random errors are produced.

## 5. 결 론

본 논문에서는 각종 오차 및 노이즈가 신호에 포함되어 있는 경우, 음압, 속도, 인텐시티의 추정 오차를 해석하였다. 이를 위해 확률의 관점에서 바이어스 오차와 랜덤 오차를 정량적으로 구하였다.

공간 샘플링 간격은 바이어스 오차에는 영향을 미치지 않으나, 랜덤 오차에는 중요한 영향을 미침을 볼 수 있었다. 샘플링 간격이 줄어들에 따라 음압의 랜덤오차는 일정하지 만, 속도와 인텐시티의 랜덤오차는 커짐을 이론 및 컴퓨터 모의실험을 통해 알 수 있었다. 따라서 이산 영역에서 음압 신호로부터 속도 및 인텐시티를 예측할 때는 샘플링 간격을 작게 하는 것 보다는 이러한 관계를 고려하여 공간 샘플링을 결정해야 할 것이다.

## 후 기

본 논문은 과학기술부의 국가지정연구실사업(NRL)과 교육인적자원부의 BK21 사업에 의한 연구 지원으로 수행 되었습니다.

## 참 고 문 헌

- (1) J. D. Maynard, E. G. Williams, and Y. Lee, 1985, "Nearfield acoustic holography: I. Theory of generalized holography and development of NAH," J. Acoust. Soc. Am. 78, 1395-1413
- (2) K-U. Nam and Y.-H. Kim, 1999, "Errors due to sensor and position mismatch in planar acoustic holography," J. Acoust. Soc. Am. 106 (4), 1655-1665
- (3) F. J. Fahy, Sound Intensity, 1989, (Elsevier Applied Science), Chap. 4 and 5, pp. 46-109.
- (4) G. Pavic, 1977, "Measurement of sound intensity," Journal of Sound and Vibration, 51(4), pp.533-545
- (5) J. S. Bendat and A. G. Piersol, 1986, *Random Data: Analysis and Measurement Procedure*, 2nd ed. (Wiley, New York), Chap. 8, pp. 252-290.
- (6) Jay L. Devore, 1991, *Probability and Statistics for Engineering and the Science*, 3rd ed. (Brooks/Cole Publishing Company), Chap. 8 and 9, pp.283-370.
- (7) Morse and Ingard, 1986, *Theoretical Acoustics*, (McGraw-Hill, Inc.), Chap. 6, pp. 227-240.