

원판의 진행파응답을 위한 대역분기해석

Global Bifurcation for the Responses in the Traveling Wave Form of a Circular Plate

여명환*·이원경**

Myeong Hwan Yeo and Won Kyoung Lee

Key Words : nonlinear vibration of circular plate(원판의 비선형진동), global bifurcation(대역분기), Silnikov type homoclinic orbit(실니코프형 호모클리닉 궤도)

ABSTRACT

We investigate global bifurcation in the motion of an harmonically excited circular plate with one-to-one internal resonance. A perturbation method developed by Kovačič and Wiggins is used. Silnikov type homoclinic orbit has been pursued but it has turned out not to exist.

1. 서론

동역학계(dynamical system)의 분기해석은 국소분기해석과 대역분기해석으로 나누어진다. 국소분기해석은 벡터장이나 사상(map)의 고정점들의 분기와 관련된 것으로 계의 매개변수의 변화에 따른 고정점들의 정성적 변화를 해석하는 것이다. 대역분기해석은 확장된 위상공간에서 궤적구조의 정성적 변화를 해석하는 것이다.

대역분기해석을 위하여, Sethna 와 그의 동료들 [1~3]은 해밀토니안(Hamiltonian) 계의 헤테로클리닉궤도(heteroclinic orbit)가 섭동에 의해 깨어져서 Smale horseshoes 구조를 가지는 것을 확인함으로써 혼돈(chaos)운동을 예측하였다. 이들과는 달리, Kovačič 과 Wiggins[4]는 고차원 멜니코프이론(higher dimensional Melnikov theory)을 비롯한 여러 이론을 조합함으로써 섭동 후에 실니코프형 호모클리닉궤도(Silnikov type homoclinic orbit)가 존재하는 조건을 확인함으로써 혼돈운동을 예측하였다. 이후, 몇몇 연구자들은 Kovačič 과 Wiggins[4]의 방법을 사각판 등에 적용하였다[5-9].

한편, 원판에 관해서는 Sridhar, Mook, Nayfeh[10, 11], Nayfeh 와 Vakakis[12], Lee 와 그의 동료들[13-16] 등에 의해 국소분기해석은 수행되어 왔으나 대역분기해석에 관한 연구는 전무한 실정이다. 본 연구에서는 일대일 내부공진을 가진 불완전원판(Fig. 1)의 진동응답을 위한 상미분방정식[17]에다가 감쇠력과 가진력을 추가

한 후, Kovačič 과 Wiggins[4]의 방법을 적용하였다. 한 모드만 가진되는 경우에, 실니코프형 호모클리닉궤도가 존재하지 않는 것으로 밝혀졌다.

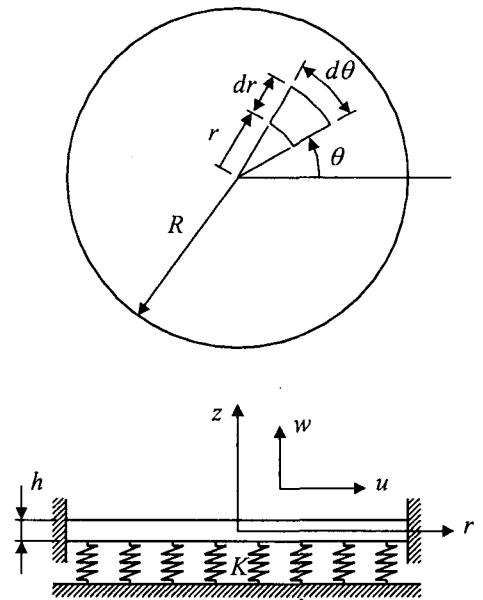


Fig. 1 A schematic diagram of a clamped circular plate on an elastic foundation.

2. 문제의 공식화

운동방정식은 Efstathiades[17]가 유도한 불완전원판의 비감쇠자유진동의 운동방정식에 감쇠항, 가진항, 지반강성항을 추가하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

* 영남대학교 대학원

E-mail : yeomh@yumaol.ac.kr

Tel : (053) 814-4288, Fax : (053) 813-3703

** 영남대학교 기계공학부

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nabla^2 (D \nabla^2 w) + K w = (1-\nu) L_1(w, D) + L_2(w, F) - \frac{\delta \partial w}{2 \partial t} + p(r, \theta, t) \quad (1a)$$

$$\nabla^2 (S \nabla^2 F) = (1+\nu) L_3(F, S) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (1b)$$

여기서,

$$L_1(w, D) = \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 D}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 D}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial D}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$L_2(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$L_3(F, S) = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 S}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)$$

$\rho (= \rho(r, \theta))$ 는 밀도, $h (= h(r, \theta))$ 는 원판의 두께, $D (= D(r, \theta)) = E h^3 / [12(1-\nu^2)]$, $S (= S(r, \theta)) = (E h)^{-1}$, K 는 지반강성, δ 는 감쇠계수, $p(r, \theta, t)$ 는 가진함수, $E (= E(r, \theta))$ 는 탄성계수, ν 는 포와송비, w 는 중간평면의 변형, F 는 면내

판성(in-plane inertia)을 무시할 경우, 면내 평형조건을 만족하는 힘 함수(force function)이고,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2.$$

F , w 와 면내 변위 u_r , u_θ 의 관계식은 다음과 같다.

$$e_r = S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right), \quad (2a)$$

$$e_\theta = S \left[\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \right) \right], \quad (2b)$$

$$e_{r,\theta} = 2S(1+\nu) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \right). \quad (2c)$$

여기서,

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2,$$

$$e_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2,$$

$$e_{r,\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

원판의 불완전성이 미세(r , θ 의 변화에 따른 ρ , h , D , S , E 등의 변화량이 미세)하고, 가진 p 를 $p(r, \theta, t) = P(r, \theta) \cos \lambda t$ 인 조화가진으로 가정하자. 그리고 두 모드와 관련된 완전원판의 고유진동수는 ω_1 , ω_2 로 분리되는데, 이들의 차이 역시 작다고 가정하자. 가진진동수 λ 가 완전원판의 비대칭고유진동수 중 하나인 $\omega (\approx \omega_1 \approx \omega_2)$ 와 가까운 경우 주공진과 일대일 내부공진만을 고려하면, 식 (1)~(2)의 정상상태해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(r, \theta, t) = \phi(r) [x_1(t) \cos(n\theta - \theta_1) + x_2(t) \sin(n\theta - \theta_2)] \quad (3)$$

여기서, $\phi(r)$ 은 경계조건에 의해 결정되는 형상함수이고, $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 는 시간에 따른 모드의 진폭을 나타내며, n 은 절경(nodal diameter)의 개수

로서 ω 에 의해 결정된다. θ_1 과 θ_2 는 원판의 불완전성에 의해 기인하는 것으로 ρ , h , D , S , E 에 의해 결정되는 상수로서, 불완전원판에서 절경의 위치를 결정하는 값이다. 완전원판의 경우, 이 값들이 주는 정보 즉, 절경의 위치가 결정되지 않는다. 일반적으로 $\theta_1 \neq \theta_2$ 이므로 두 모드의 절경은 직교하지 않는다. 그러나 ρh 가 r 만의 함수인 경우이거나, D 가 r 만의 함수인 경우는 $\theta_1 = \theta_2 \equiv \theta_0$ 가 된다[15]. 여기서는 두 모드의 절경이 직교하는 경우를 가정함으로써 원판의 불완전성을 제한한다. 완전원판(ρ , h , D , S , E 가 상수)의 경우, 식 (3)의 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 는 갤러킨 방법(Galerkin's procedure)을 이용하면 다음과 같은 상미분방정식에 의해 결정된다.

$$\ddot{x}_i + \varepsilon \delta \dot{x}_i + \omega^2 x_i - \frac{1}{4} \varepsilon \gamma (x_1^2 + x_2^2) x_i = \varepsilon \mu_i \cos \lambda t, \quad i=1,2 \quad (4)$$

여기서, $\bullet = d/dt$, $\varepsilon = 12(1-\nu^2)h^2/a^2$, a 는 원판의 반경, γ 는 모드번호에 의해 결정되는 상수로서 비선형계수를 나타내고

$$\mu_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^a r P(r, \theta) \cos n\theta dr d\theta, \quad (5a)$$

$$\mu_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^a r P(r, \theta) \sin n\theta dr d\theta. \quad (5b)$$

앞에서 말한 원판의 불완전성에 의해 고유진동수 ω_i 는 완전원판의 고유진동수 ω 로부터 다음과 같이 이탈된다고 가정하자.

$$\omega_i^2 = \omega^2 (1 + \varepsilon \beta_i), \quad i=1,2, \quad (6)$$

이러한 가정으로부터, 식 (4)와 (5)에 해당하는 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다[18].

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i + \varepsilon \left[\delta \dot{x}_i - \frac{1}{4} \gamma (x_1^2 + x_2^2) x_i - \mu_i \cos \lambda t \right] + O(\varepsilon^2) = 0, \quad i=1,2 \quad (7)$$

여기서,

$$\mu_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^a r P(r, \theta) \cos(n\theta - \theta_0) dr d\theta, \quad (8a)$$

$$\mu_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^a r P(r, \theta) \sin(n\theta - \theta_0) dr d\theta. \quad (8b)$$

감쇠가 없는 경우($\delta=0$), 식 (7)에 해당하는해 밀톤함수(Hamilton function)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) &= H_0 + \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} [\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2] \\ &+ \varepsilon \left[-\frac{1}{16} \gamma x_1^4 - \frac{1}{16} \gamma x_2^4 - \frac{1}{8} \gamma x_1^2 x_2^2 \right. \\ &\left. + \mu_1 x_1 \cos \lambda t + \mu_2 x_2 \cos \lambda t \right] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (9)$$

계 (8)에서 ω_i 근방에서의 주공진을 조사하기 위해서 다음과 같이 이탈변수 σ_i 를 도입하자.

$$\omega_i^2 = \lambda^2 - \varepsilon \sigma_i, \quad i=1,2 \quad (10)$$

여기서, σ_i 는 고유진동수 ω_i 에 대한 가진진동수 λ 의 이탈정도를 나타낸다. 식 (6)을 고려하면 두 고유진동수 사이의 이탈정도는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \varepsilon (\sigma_1 - \sigma_2) = \varepsilon \omega^2 (\beta_2 - \beta_1) \quad (11)$$

식 (5)를 다음 식을 이용하여 표준변환(canonical transform)하자.

$$x_i = \sqrt{2a_i} \cos \left(\omega_i t + \frac{\phi_i}{\omega_i} \right), \quad (12a)$$

$$\dot{x}_i = -\omega_i \sqrt{2a_i} \sin \left(\omega_i t + \frac{\phi_i}{\omega_i} \right), \quad i=1,2 \quad (12b)$$

그리고, 평균법(method of averaging)을 적용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \varepsilon \left[-\delta a_1 - 4ka_1 a_2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2) \right. \\ &\left. + \frac{\mu_1}{2\lambda} \sqrt{2a_1} \sin \theta_1 \right], \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} a_1 \dot{\theta}_1 &= \varepsilon \left[-\frac{\sigma_1}{2\lambda} a_1 - 6ka_1^2 - 4ka_1 a_2 \right. \\ &\left. - 2ka_1 a_2 \cos 2(\theta_1 - \theta_2) + \frac{\mu_1}{4\lambda} \sqrt{2a_1} \cos \theta_1 \right], \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= \varepsilon \left[-\delta a_2 + 4ka_1 a_2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2) \right. \\ &\left. + \frac{\mu_2}{2\lambda} \sqrt{2a_2} \sin \theta_2 \right], \end{aligned} \quad (13c)$$

$$a_2 \dot{\theta}_2 = \varepsilon \left[-\frac{\sigma_2}{2\lambda} a_2 - 3ka_2^2 - 4ka_1 a_2 - 2ka_1 a_2 \cos 2(\theta_1 - \theta_2) + \frac{\mu_2}{4\lambda} \sqrt{2a_2} \cos \theta_2 \right]. \quad (13d)$$

여기서, $k = \gamma/32\lambda$, $\theta_i = \phi_i/\omega_i$, $i = 1, 2$ 이다. 식 (13)을 Kovačič 과 Wiggins[4]의 섭동법을 적용하기 위한 적절한 형태로 변환하기 위해 다음과 같은 표준변환을 고려하자.

$$\begin{aligned} q_1 &= \theta_1 - \theta_2, & q_2 &= \theta_2, \\ p_1 &= a_1, & p_2 &= a_1 + a_2. \end{aligned} \quad (14)$$

p_1 은 첫번째 모드의 진폭과 관련된 변수이고, p_2 는 계의 총에너지와 관련된 변수이다. 식 (13)을 식 (14)를 이용하여 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \varepsilon \left[-\delta p_1 - 4kp_1(p_2 - p_1) \sin 2q_1 + \frac{\mu_1}{2\lambda} \sqrt{2p_1} \sin 2(q_1 + q_2) \right], \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \varepsilon \left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{2\lambda} - 2k(2p_1 - p_2)(1 - \cos 2q_1) + \frac{\mu_1}{2\lambda} \frac{\cos(q_1 + q_2)}{\sqrt{2p_1}} - \frac{\mu_2}{2\lambda} \frac{\cos q_2}{\sqrt{2(p_2 - p_1)}} \right], \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= \varepsilon \left[-\delta p_2 + \frac{\mu_1}{2\lambda} \sqrt{2p_1} \sin 2(q_1 + q_2) + \frac{\mu_2}{2\lambda} \sqrt{2(p_2 - p_1)} \sin q_2 \right], \end{aligned} \quad (15c)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= \varepsilon \left[-\frac{\sigma_2}{2\lambda} + 2kp_1(1 - \cos 2q_1) - 6kp_2 + \frac{\mu_2}{2\lambda} \frac{\cos q_2}{\sqrt{2(p_2 - p_1)}} \right]. \end{aligned} \quad (15d)$$

식 (15)에서 감쇠와 가진항이 다른항에 비해 상대적으로 작다고 가정하면 대역분기해석을 위한 적절한 식이 되므로, 다음과 같이 변수와 매개변수들을 재조정(rescaling) 하자.

$$\begin{aligned} \delta &= \varepsilon^2 \delta', & \sigma_i &= \varepsilon(2\lambda \sigma'_i), \\ \mu_i &= \varepsilon^{5/2} \left(-\mu'_i \frac{\text{sgn}(k)}{|k|} \lambda \right), & p_i &= \varepsilon \frac{p'_i}{|k|}, \end{aligned}$$

$$q_i = (1 + \text{sgn}(k)) \frac{\pi}{4} + q'_i, \quad t = \frac{t'}{\varepsilon^2} \quad (16)$$

식 (16)을 식 (15)에 대입해서 정리하고, 편의상 프라임을 생략하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= 4p_1(p_2 - p_1) \sin 2q_1 + \varepsilon \left[-\delta p_1 + \mu_1 \sqrt{\frac{p_1}{2}} \sin(q_1 + q_2) \right] = -\frac{\partial H}{\partial q_1} - \varepsilon \delta p_1, \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -2\beta - 2(2p_1 - p_2)(1 + \cos 2q_1) + \varepsilon \left[\frac{\mu_1 \cos(q_1 + q_2)}{2\sqrt{2p_1}} - \frac{\mu_2 \cos q_2}{2\sqrt{2(p_2 - p_1)}} \right], \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= \varepsilon \left[-\delta p_2 + \mu_1 \sqrt{\frac{p_1}{2}} \sin(q_1 + q_2) + \mu_2 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{2}} \sin q_2 \right] = -\frac{\partial H}{\partial q_2} - \varepsilon \delta p_2, \end{aligned} \quad (17c)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= -\sigma_2 + 2p_1(1 + \cos 2q_1) - 3p_2 + \varepsilon \left[\frac{\mu_2 \cos q_2}{2\sqrt{2(p_2 - p_1)}} \right] = \frac{\partial H}{\partial p_2}. \end{aligned} \quad (17d)$$

여기서, $\beta = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ 는 식 (11)에서 알 수 있듯이 두 고유진동수의 차이를 정의하는 값이고, \cdot (dot)는 t' 에 대한 미분을 나타낸다. 그리고 비감쇠($\delta = 0$)인 경우, 이 계의 해밀턴함수 H 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} H(p_1, q_1, p_2, q_2) &= H_0(p_1, q_1, p_2, q_2) + \varepsilon H_1(p_1, q_1, p_2, q_2) \end{aligned} \quad (18a)$$

여기서,

$$\begin{aligned} H_0(p_1, q_1, p_2, q_2) &= -2\beta p_1 + 2p_1(p_2 - p_1)(1 + \cos 2q_1) - \sigma_2 p_2 - \frac{3}{2} p_2^2, \end{aligned} \quad (18b)$$

$$\begin{aligned} H_1(p_1, q_1, p_2, q_2) &= \frac{\mu_1}{2} \sqrt{2p_1} \cos(q_1 + q_2) + \frac{\mu_2}{2} \sqrt{2(p_2 - p_1)} \cos q_2. \end{aligned} \quad (18c)$$

식 (17)의 좌표계 (p_1, q_1, p_2, q_2) 는 $p_1 = 0$ 인 경우, q_1 이 결정될 수가 없다. 즉, 이 좌표계는 $p_1 = 0$ 의 특이점을 가진다. $p_1 = 0$ 에서의 고정점은 이후의 해석에서 중요하게 다루어진다. 따라서, 이러한 특이점을 피하기 위해 다음과 같은 관계식을 이용하여 p_1, q_1 을 표준변환하자.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2p_1} \sin q_1, \quad y = \sqrt{2p_1} \cos q_1, \\ I &= p_2, \quad \theta = q_2. \end{aligned} \quad (19)$$

그러면 식 (17)과 식 (18)의 해밀턴함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2(\beta - 2I)y - 2x^2y - 4y^3 + \varepsilon g^x \\ &= \frac{\partial H_0}{\partial y} + \varepsilon g^x, \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\dot{y} = 2xy^2 + \varepsilon g^y = -\frac{\partial H_0}{\partial x} + \varepsilon g^y, \quad (20b)$$

$$\dot{I} = \varepsilon g^I = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta} + \varepsilon g^I, \quad (20c)$$

$$\dot{\theta} = -\sigma_2 - 3I + 2y^2 + \varepsilon g^\theta = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \varepsilon g^\theta, \quad (20d)$$

$$\begin{aligned} H_0(x, y, I, \theta) &= -2\beta(x^2 + y^2) \\ &\quad + (2I - x^2 - y^2)y^2 - \sigma_2 I - \frac{3}{2}I^2, \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} H_1(x, y, I, \theta) &= \frac{\mu_1}{2}(y \cos \theta - x \sin \theta) \\ &\quad + \frac{\mu_2}{2} \sqrt{2I - x^2 - y^2} \cos \theta \end{aligned} \quad (21b)$$

여기서,

$$\begin{aligned} g^x &= \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\delta}{2}x \\ &= -\frac{\delta}{2}x + \frac{\mu_1}{2} \cos \theta - \frac{\mu_2 y \cos \theta}{2\sqrt{2I - x^2 - y^2}}, \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} g^y &= -\frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{\delta}{2}y \\ &= -\frac{\delta}{2}y + \frac{\mu_1}{2} \sin \theta + \frac{\mu_2 x \cos \theta}{2\sqrt{2I - x^2 - y^2}}, \end{aligned} \quad (22b)$$

$$\begin{aligned} g^I &= -\frac{\partial H_1}{\partial I} - \delta I \\ &= -\delta I + \frac{\mu_1}{2}(y \sin \theta + x \cos \theta), \end{aligned} \quad (22c)$$

$$\begin{aligned} g^\theta &= \frac{\partial H_1}{\partial \theta} \\ &= \frac{\mu_2 \cos \theta}{2\sqrt{2I - x^2 - y^2}} \end{aligned} \quad (22d)$$

3. 비섭동계($\varepsilon = 0$)의 해석

계 (21)의 섭동전의 대역구조를 조사하기 위해 $\varepsilon = 0$ 로 두면 다음과 같은 해밀토니안계가 된다.

$$\dot{x} = -2(\beta - 2I)y - 2x^2y - 4y^3 \quad (23a)$$

$$\dot{y} = 2xy^2 \quad (23b)$$

$$\dot{I} = 0 \quad (23c)$$

$$\dot{\theta} = -\sigma_2 - 3I + 2y^2 \quad (23d)$$

식 (23a)와 (23b)로부터 이 두식은 θ 와 독립이고, 식 (23c)로부터는 I 가 상수라는 것을 알 수 있다. 따라서, 고정된 I 값에 대한 위상평면 (x, y) 에서의 흐름(flow)을 조사할 수 있다.

식 (14)와 (19)로부터 다음 조건을 발견할 수 있다.

$$x^2 + y^2 < 2I \quad (24)$$

즉, 위상평면 (x, y) 의 의미있는 영역은 반경 $\sqrt{2I}$ 의 원내로만 제한된다. 식 (23a)와 (23b)에서 고정점들($\dot{x} = \dot{y} = 0$)은 I 의 값에 따라 다음과 같다.

$$1) \quad 0 < I < I_1 : (0, 0) \quad (25a)$$

$$2) \quad I > I_1 : (0, 0), (0, \pm \hat{y}) \quad (25b)$$

여기서, $I_1 = \beta/2$, $\hat{y} = \sqrt{I - \beta/2}$ 이다. 안정성 해석에 의해, 1)의 경우 유일한 고정점인 원점은 중심점(center)이다. $I = I_1$ 에서 1)에서 중심점이었던 원점은 안장점(saddle point)으로 바뀌면서 다른 두 개의 중심점으로 분기한다. 즉, 2)의 경우에는 하나의 안장점(원점)과, 두개의 중심점

$(0, \pm \hat{y})$ 이 존재한다(Fig. 2 3). 2)에서 중심점을 둘러싸고 원점에 연결된 한 쌍의 대칭적인 호모클리닉 리넵레도는 $H_0(x, y, I, \theta) = H_0(0, 0, I, \theta)$ 을 만족하며 식 (21)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\beta(x^2 + y^2) - (2I - x^2 - y^2)y^2 = 0 \quad (26)$$

1)의 경우에는 중심점과 그것을 둘러싸고 있는 주기궤도만이 존재하므로 실니코프형 호모클리닉 궤도가 존재하는 조건을 조사하기 위해 2)의 경우만 고려한다. 2)의 경우에는 4 차원 위상공간에서 다음과 같은 2 차원 불변다양체(invariant manifold) M_0 와 3 차원 호모클리닉다양체(homoclinic manifold) Γ 가 존재한다.

$$M_0 = \{(x, y, I, \theta) | x=0, y=0, I > I_1, \theta \in T^1\}, \quad (27)$$

$$\Gamma = \left\{ (x, y, I, \theta) \mid \begin{aligned} &x = x^h(t, I), \\ &y = y^h(t, I), I > I_1, \\ &\theta = \int_0^t D_1 H_0(x^h(s, I), y^h(s, I), I) ds + \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

여기서, $(x^h(s, I), y^h(s, I))$ 는 호모클리닉궤도의 시간 s 에 대한 표현이다. Γ 위의 임의의 궤적은 $t \rightarrow \pm\infty$ 에 따라 M_0 로 접근한다. $\theta_0 \in T^1$ 은 초기 조건에 의해 결정되는 상수이다. 식 (23)으로부터 M_0 위의 동역학은 다음에 의해 표현된다.

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\theta} = -\sigma_2 - 3I \quad (29)$$

위 식에서 $\dot{\theta} = 0$ 인 I 값, 즉 I 의 공진값(resonant value) $I_r = -\sigma_2/3$ 이다. $I - \theta$ 극좌 표평면에서 식 (29)의 흐름은 동심원으로 나타난다. $I = I_r$ 인 원은 고정점들로 구성된 원이고 $I \neq I_r$ 인 원은 주기궤도이다(Fig. 4). 식 (25b)에서 $I_r > I_1$ 이어야하므로 다음과 같은 조건을 발견할 수 있다.

$$\frac{\sigma_2}{\beta} < -\frac{3}{2}. \quad (30)$$

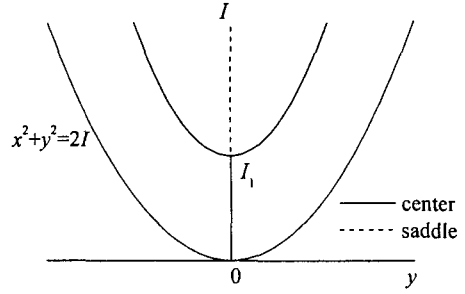


Fig. 2 Global bifurcation diagram corresponding to the unperturbed system in (y, I) plane at $x=0$.

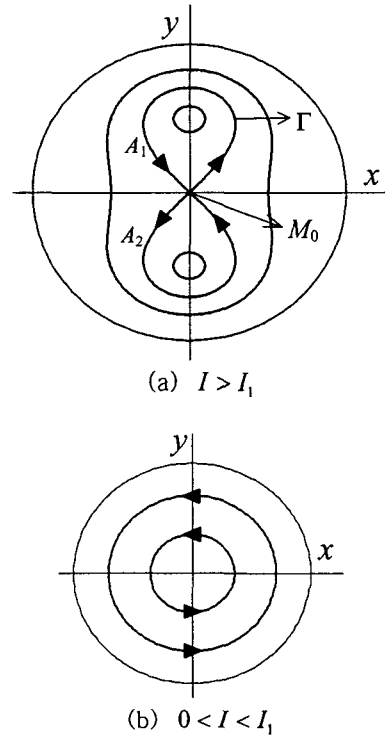


Fig. 3 Phase portraits in (x, y) plane corresponding to the global bifurcation diagram in Fig. 2

위상차(phase shift)를 다음과 같이 정의하자.

$$\Delta\theta \equiv \theta(+\infty, I) - \theta(-\infty, I) \quad (31)$$

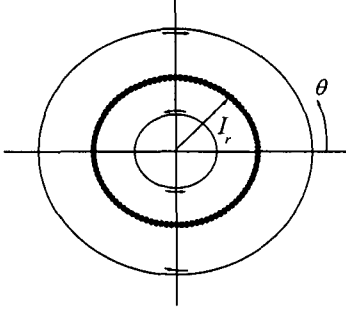


Fig. 4 Flow in (I, θ) plane at $x=y=0$

이 위상차는 $I \neq I_r$ 인 경우, $I-\theta$ 평면에서 주기 궤도이기 때문에 정의되지 않는다. 따라서, $I=I_r$ 인 경우에만 $\Delta\theta$ 가 정의된다. $\Delta\theta$ 는 궤적이 불변 다양체 M_0 를 떠날 때와 되돌아올 때 발생하는 θ 값의 차이이다. $\Delta\theta$ 를 계산하기 위해서는 $I=I_r$ 에서 호모클리닉궤도에 대한 표현이 필요하다. 이러한 작업은 좌표계 (p_1, q_1) 을 이용하는 것이 보다 용이하므로 식 (17a)와 (17b)에서 $\varepsilon=0$ 인 경우를 고려하자.

$$\dot{p}_1 = 4p_1(p_2 - p_1)\sin 2q_1 = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q_1}, \quad (32a)$$

$$\dot{q}_1 = -2\beta - 2(2p_1 - I)(1 + \cos 2q_1) = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_1}. \quad (32b)$$

여기서,

$$\bar{H}(p_1, q_1) = -2\beta p_1 + 2p_1(I - p_1)(1 + \cos 2q_1) \quad (33)$$

식 (32)는 다음과 같은 하나의 중심점과 두 개의 안장점을 가진다.

$$\text{중심점: } (\hat{p}_1, 0), \quad \text{안장점 } (0, \pm \hat{q}_1), \quad (34)$$

여기서,

$$\hat{q}_1 = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{\beta}{I} - 1 \right), \quad \hat{p}_1 = \frac{1}{4} (2I - \beta) \quad (35)$$

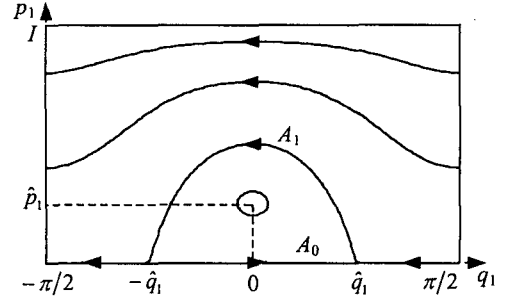


Fig. 5 Phase portrait in (p_1, q_1) plane when $I > I_r$

좌표계 (x, y) 에서 호모클리닉궤도 A_1 은 직교좌표계 (p_1, q_1) 에서 헤테로클리닉궤도 A_1 으로 나타난다(Fig. 5). 두 안장점을 연결하는 헤테로클리닉궤도 위에서 $q_1(-\infty) = -\hat{q}_1$, $q_1(\infty) = \hat{q}_1$ 이다. 이러한 헤테로클리닉궤도는 $\bar{H}(p_1, q_1) = \bar{H}(0, \hat{q}_1)$ 으로서 식 (33) 으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$p_1 = I - \frac{\beta}{1 + \cos 2q_1}, \quad p_1 = 0 \quad (36)$$

각각은 두 안장점을 연결하는 두 헤테로클리닉궤도를 나타낸다. 식 (36)을 (32b)에 대입하면 다음과 같다.

$$\dot{q}_1 = \pm 2I(\cos 2\hat{q}_1 - \cos 2q_1) \quad (37)$$

여기서, +기호는 식 (36)의 첫번째 p_1 값에 해당하고, -기호는 $p_1=0$ 에 해당한다. 식 (17a)와 (17c)에서 $\varepsilon=0$ 으로 두고 두식을 더한 후, 식 (36)과 $I=I_r$ 을 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0 \quad (38)$$

여기서, $q_2 = \theta$ 이므로 $\dot{\theta} = -\dot{q}_1$ 이다. 또한 $q_1(-\infty) = -\hat{q}_1$, $q_1(\infty) = \hat{q}_1$ 이므로,

$$\Delta\theta = -q_1(+\infty, I_r) + q_1(-\infty, I_r) = 2\hat{q}_1. \quad (39)$$

4. 섭동계($\varepsilon \neq 0$)의 해석

부분공간(subspace) ($x = y = 0$) 은 섭동후($\varepsilon \neq 0$), 불변다양체가 아니지만, M_0 에 충분히 가까운 M_ε 은 국소불변다양체(local invariant manifold)로서 다음과 같다.

$$M_\varepsilon = \{(x_\varepsilon, y_\varepsilon, I, \theta) | x_\varepsilon = 0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2), y_\varepsilon = 0 + \varepsilon y_1 + O(\varepsilon^2), I > I_r, \theta \in T^1\} \quad (40)$$

여기서 x_1 과 y_1 은 식 (21)로부터 구해질 수 있다.

$$x_1 = -\frac{\mu_1 \sin \theta}{4\beta}, \quad y_1 = \frac{\mu_1 \cos \theta}{4(\beta - 2I_r)} \quad (41)$$

M_ε 에서의 흐름은 식 (21c)와 (21d)로부터 주어진다.

$$\dot{I} = \varepsilon \left[-\delta I + \mu_2 \sqrt{\frac{I}{2}} \sin \theta \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\mu_1}{2} (x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta) \right] + O(\varepsilon^3) \quad (42a)$$

$$\dot{\theta} = -\sigma_2 - 3I + \varepsilon \left[\frac{\mu_2 \cos \theta}{2\sqrt{2I}} \right] + O(\varepsilon^2) \quad (42b)$$

$I = I_r$ 근방에서 불변다양체의 동역학을 조사하기 위해 다음과 같이 변수들을 재조정한다.

$$I = I_r + \varepsilon h, \quad t = \tau/\varepsilon, \quad \delta \rightarrow \varepsilon \delta, \quad \mu_2 \rightarrow \varepsilon \mu_2 \quad (43)$$

여기서 τ 는 느린시간이다. 위 식을 이용하면, I_r 근방에서 M_ε 에서의 흐름은 다음과 같이 표현된다.

$$h' = -\delta I_r + \frac{\mu_1}{2} (x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta) + \mu_2 \sqrt{\frac{I_r}{2}} \sin \theta + \varepsilon \left[-\delta h + \frac{\mu_2 h \sin \theta}{2\sqrt{2I_r}} \right] + O(\varepsilon^2) \quad (44a)$$

$$\theta' = -3h + \varepsilon \left[2y_1^2 + \frac{\mu_2 h \cos \theta}{2\sqrt{2I_r}} \right] + O(\varepsilon^2) \quad (44b)$$

여기서 프라임은 τ 에 대한 미분을 나타낸다. 식 (41)을 사용하면 다음과 같다.

$$h' = -\delta I_r + c_1 I_r \sin 2\theta + \mu_2 \sqrt{\frac{I_r}{2}} \sin \theta + \varepsilon G(h, \theta) + O(\varepsilon^2) \quad (45a)$$

$$\theta' = -3h + \varepsilon F(h, \theta) + O(\varepsilon^2) \quad (45b)$$

여기서,

$$c_1 = \frac{\mu_1^2}{8\beta(\beta - 2I_r)},$$

$$G(h, \theta) = -\delta h + \frac{\mu_1^2 \sin 2\theta}{2(\beta - 2I_r)} + \mu_2 \sqrt{\frac{2}{I_r}}$$

$$F(h, \theta) = \frac{\mu_1^2 \cos 2\theta}{8(\beta - 2I_r)^2} + \frac{\mu_2 \cos \theta}{2\sqrt{2I_r}}$$

식 (45)는 $\varepsilon = 0$ 일 때, 다음과 같은 해밀턴함수를 가지는 해밀토니안계이다.

$$L(h, \theta) = \frac{3}{2} h^2 - \left(\delta \theta + \frac{c_1}{2} \cos 2\theta \right) I_r - \mu_2 \sqrt{\frac{I_r}{2}} \cos \theta \quad (46)$$

본 연구에서는 $\mu_2 = 0$ 인 경우를 고려한다. 이 경우 식 (20)은 하나의 모드만 가진되는 일반적인 2 자유도계를 해석한 Malhotra 와 Namachchivaya[8]의 식 (22)에서 $\alpha = -1$ 이고 $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 3/2$ 인 경우이다. 그러나 [8]에서는 $\alpha = -1$ 인 경우는 고려하지 않았다.

섭동전의 계($h' = L_\theta$, $\theta' = -L_h$)는 $\delta < c_1$ 인 경우 두 개의 고정점을 가진다(Fig. 6).

$$\text{중심점: } p_0 = (0, \theta_c), \quad \text{안장점: } q_0 = (0, \theta_s) \quad (47)$$

$$\text{여기서, } \theta_c = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{\delta}{c_1}, \quad \theta_s = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{\delta}{c_1}$$

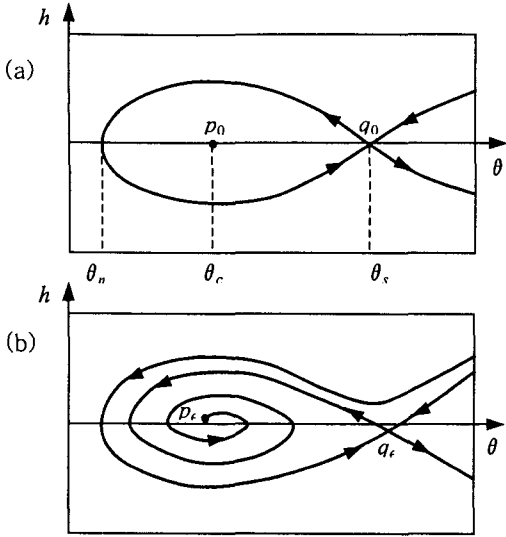


Fig. 6 Dynamics on (I, θ) plane in the neighborhood of $I = I_r$ for $x = y = 0$.

섭동 후, 안장점 q_0 는 역시 안장점인 q_e 이 되고, 중심점 p_0 는 흡입점(sink) p_e 이 된다. 안장점 q_0 를 연결하는 호모클리닉궤도 내의 주기궤도들은 섭동 후에 깨어지고 이 영역은 근사적으로 p_e 의 흡입영역을 나타낸다. q_0 를 연결하는 호모클리닉궤도는 $L(h, \theta) = L(0, \theta_e)$ 에 의해 표현된다. I_r 근방(neighborhood)에서 M_ε 상의 동역학에 관심이 있으므로 I_r 의 근방을 A_ε 으로 다음과 같이 정의하자.

$$A_\varepsilon = \{(x, y, h, \theta) | x = 0, y = 0, |h| < \varepsilon C, \theta \in T^1\} \quad (48)$$

여기서, C 는 근방이 섭동전의 호모클리닉궤도를 포함할 만큼 충분히 큰 0보다 큰 상수이다. A_ε 의 안정한 다양체 $W^s(A_\varepsilon)$ 와 불안정한 다양체 $W^u(A_\varepsilon)$ 는 각각 M_ε 의 안정한 다양체 $W^s(M_\varepsilon)$ 와 불안정한 다양체 $W^u(M_\varepsilon)$ 의 부분집합(subset)이다. 4차원 위상공간에서 A_ε 을 벗어나면서 p_e 를 떠난 궤적이 A_ε 로 돌아와서 실니코프형 호모클리닉궤도를 만들 수 있다. 이러한 궤도의 존재하려면 2개의 조건을 만족해야 한다[4]. 고차원 멜니코프 이론(higher dimensional Melnikov theory)을 이용하여 $W^u(p_e) \cap W^s(A_\varepsilon) \neq \emptyset$ 인 조건을 발견한다. 이는 p_e 를 떠나는 궤도가 A_ε 으로 돌아오는 조건을 의

미한다. 두번째 단계는 p_e 를 떠나 A_ε 으로 돌아오는 궤도가 A_ε 내의 p_e 의 흡입영역으로 돌아와야 한다는 것이다. 그러면 그 궤도는 A_ε 내에서 시간이 경과함에 따라 p_e 에 점근적으로 접근하게 되어 그림과 같은 p_e 를 떠나 p_e 으로 돌아오는 실니코프형 호모클리닉궤도가 완성된다.

이 조건은 두 다양체 $W^u(p_e)$ 와 $W^s(A_\varepsilon)$ 의 거리를 의미하는 멜니코프 함수[19-21]를 다음과 같이 계산하여 구할 수 있다.

$$M(\beta, \sigma_2, \delta, I_r, \theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial H_0}{\partial x} g^x + \frac{\partial H_0}{\partial x} g^y + \frac{\partial H_0}{\partial I} g^I \right] dt \quad (49)$$

여기서, 피적분함수는 $I = I_r$ 에서 Γ 상의 임의의 위치에서 계산된다. H_0, g^x, g^y, g^I 는 식 (22)에 주어져 있다.

식 (49)는 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$M^I = -[H_1(\infty) - H_1(-\infty)] - \varepsilon \left[\delta \int_{-\infty}^{\infty} p_1 \dot{q}_1 dt - \delta I_r \Delta \theta \right] \quad (50)$$

위 식에서 $t \rightarrow \pm\infty$ 에 따라 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 이므로 $H_1(\pm\infty) \rightarrow 0$ 이고, $q_1(-\infty) = -\hat{q}_1, q_1(\infty) = \hat{q}_1$ 이므로 식 (40)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$M^I = \varepsilon \delta \left[\int_{\hat{q}_1}^{\hat{q}_1} p_1 dq_1 - I_r \Delta \theta \right] \quad (51)$$

여기서 $p_1 = I_r - \frac{\beta}{1 + \cos 2q_1}$ 이므로 식 (51)은 아래의 결과를 준다.

$$4\hat{q}_1 I_r + \beta \tan \hat{q}_1 = 0 \quad (52)$$

여기서 $\hat{q}_1 = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{\beta}{I_r} - 1 \right)$ 이고, $I_r = -\sigma_2/3$ 이므로 식 (52)를 만족하는 해는 식 (30)를 만족하는 구간에서는 존재하지 않는다. 즉 두 manifold $W^u(p_e)$ 와 $W^s(A_\varepsilon)$ 가 교차하는 어떠한 파라미터 값도 존재하지 않는다. 이는 이 모델에서 실니코프형 호모클리닉궤도가 존재하지 않는다는 것을 의미한다.

두 번째 조건은 다음과 같다.

$$\theta_n < \theta_c + \Delta\theta + m\pi < \theta_s \quad (53)$$

θ_s 와 θ_c 는 식 (47)에 주어졌고, $L(0, \theta_n) = L(0, \theta_s)$ 즉

$$\delta\theta_n + \frac{c_1}{2} \cos 2\theta_n = \delta\theta_s + \frac{c_1}{2} \cos 2\theta_s \quad (54)$$

으로부터 θ_n 을 구할 수 있다.

5. 결론

Kovačić 과 Wiggins 의 방법을 사용하여, 일대일 내부공진을 가진 불안전원판의 진행과 진동 응답을 위한 대역분기를 조사하였다. Efstathiades 의 불안전원판 모형에다가 감쇠력과 조화가진력을 추가한 모형을 고려하였다. 한 모드만 가진되는 경우에, 실니코프형 호모클리닉궤도가 존재하지 않는 것으로 밝혀졌다.

후기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R01-2000-000-00289-0)지원으로 수행되었음.

참고문헌

- (1) Kovačić, G., and Wiggins, S., 1992, "Orbit Homoclinic to Resonances, with an Application to Chaos in a Model of the Forced and Damped Sine-Gordon Equation", *Physica D*, Vol. 57, pp. 185~225.
- (2) Feng, Z. C., and Sethna, P. R., 1990, "Global Bifurcation and Chaos in Parametrically Forced Systems with One-One Resonance", *Dynamics and Stability of Systems*, Vol. 5, pp. 201-225.
- (3) Yang, X. L., and Sethna, P. R., 1991, "Local and Global Bifurcations in the Parametrically Excited Vibrations of Nearly Square Plate", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 26, pp. 199-220.
- (4) Yang, X. L., and Sethna, P. R., 1992, "Non-linear Phenomena in Forced Vibrations of a Nearly Square Plate: Antisymmetric Case", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 155, pp. 413-441.
- (5) Feng, Z. C., and Sethna, P. R., 1993, "Global Bifurcations in the Motion of Parametrically Excited Thin Plates", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 4, pp. 389-408.
- (6) Tien, W.-M., Sri Namachchivaya, N., and Bajaj, A. K., 1994, "Non-linear Dynamics of a Shallow Arch under Periodic Excitation - I. 1:2 Internal Resonance", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 29, pp. 349-366.
- (7) Tien, W.-M., Sri Namachchivaya, N., and Malhotra, N., 1994, "Non-linear Dynamics of a Shallow Arch under Periodic Excitation - II. 1:1 Internal

Resonance", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 29, pp. 367-389.

(8) Malhotra, N., and Sri Namachchivaya, N., 1995, "Global Bifurcations in Externally Excited Two-Degree-of-Freedom Nonlinear Systems", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 8, pp. 85-109.

(9) Feng, Z. C., and Liew, K. M., 2000, "Global Bifurcations in Parametrically Excited Systems with Zero-to-One Internal Resonance", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 21, pp. 249-263.

(10) Sridhar, S., Mook, D. T., and Nayfeh, A. H., 1975, "Non-linear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part I: Symmetric Responses of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 41, pp. 359-373

(11) Sridhar, S., Mook, A. T., and Nayfeh, A. H., 1978, "Non-linear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part II: Asymmetric Responses of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 59, pp. 159-170

(12) Nayfeh, T. A., and Vakakis, A. F., 1994, "Subharmonic traveling waves in a Geometrically Non-linear Circular plate", *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 29, pp. 233-245.

(13) Lee, W. K., and Kim, C. H., 1995, "Combination Resonances of a Circular Plate with Three-mode Interaction, American Society of Mechanical Engineering Journal of Applied Mechanics", Vol. 62, pp. 1015-1022

(14) Yeo, M. H., and Lee, W. K., 2002, "Corrected Solvability Conditions for Non-linear Asymmetric Vibrations of a Circular Plate, Journal of Sound and Vibration", Vol. 257, pp. 653-665.

(15) Lee, W. K., and Yeo, M. H., 2003, "Non-linear Interactions in Asymmetric Vibrations of a Circular Plate", *Journal of Sound and Vibration*, in press.

(16) Lee, W. K., Yeo, M. H., and Samoilenko, S. B., 2003, "The Effect of the Number of Nodal Diameters on Non-linear Interactions in Two Asymmetric Vibration Modes of a Circular Plate", submitted to *Journal of Sound and Vibration*.

(17) Efstathiades, G. J., 1971, "A New Approach to the Large-deflection Vibrations of Imperfect Circular Disks Using Galerkin's Procedure", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 16, pp. 231-253.

(18) 이원경, 장서일, 2002, 강제진동중인 평판의 이동과 관련된 비선형동역학, 한국과학재단 특정기초연구 제 2년차 중간보고서.

(19) Guckenheimer, J., and Holmes, P., 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag New York Inc.

(20) Wiggins, S., 1988, *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*, Springer-Verlag New York Inc.

(21) Wiggins, S., 1990, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag New York Inc.