

이동질량에 의한 탄성 지지된 보의 동적응답 실험

Experiments on Dynamic Response of an Elastically Restrained Beam under a Moving Mass

이종원* · 류봉조** · 이규섭*** · 김효준****

J. W. Lee, B. J. Ryu, G. S. Lee and H. J. Kim

Key Words : Dynamic Response(동적응답), Moving Mass(이동질량), Elastically Restrained Beam(탄성 지지된 보), Experimental Verification(실험적 검증)

ABSTRACT

This paper discusses on the dynamic response of an elastically restrained beam under a moving mass of constant velocity. Governing equations of motion taking into account of all inertia effects of the moving mass were derived by Galerkin's mode summation method, and Runge-Kutta integration method was applied to solve the differential equations. Numerical solutions for dynamic deflections of beams were obtained for the changes of the various parameters (spring stiffness, spring position, mass ratios and velocity ratios of the moving mass). In order to verify the numerical predictions for the dynamic response of the beam, experiments were conducted. Numerical solutions for the dynamic responses of the test beam have a good agreement with experimental ones.

1. 서 론

주행하는 하중이나 질량을 받는 교량이나 철교 구조물의 동적 거동에 관한 문제는 기계공정이나 철교 및 교량 설계와 관련하여 많은 연구가 이루어져 왔다. 주행물체에 의한 보 구조물의 동적응답 및 진동에 관한 연구의 역사는 영국의 체스터 철교의 붕괴사고 이후로서, 본격적인 연구의 시작은 Ayre와 그의 공동연구자들⁽¹⁾에 의하여 이루어진 이동질량 하중 하에 있는 단일 및 두 개 스펠 보에 대한 횡 방향 진동에 대한 연구를 들 수 있다. 그 후, Ting과 그의 공동연구자들⁽²⁾은 이동질량 문제에 그린함수를 이용한 일반적 알고리즘을 개발하였고, Esmalilzadeh와 Ghorashi⁽³⁾는 이동질량의 관성효과를 고려한 이동 집중질량을 받는 보의 거동을 고찰하였다. 그 후, Lee⁽⁴⁾는 일정속도의 집중질량에 의한 멀티 경간을 갖는 보의 동적 처짐뿐만 아니라, 보와 이동질량 사이의 접촉력을 확인하였고, Thambiratnam과 Zhuge⁽⁵⁾는 이동하중을 받는 분포 스프링 지지된 보의 동적 거동을 해석하였다. 이와 함께 보의 회전관성과 전단변형의 효과를 고려한 보의 동적반응에 대한 연구도 이루어져 왔다.⁽⁶⁾ 이동

하중 또는 이동질량에 의한 보의 동적응답에 관한 실험적 연구는 국외에서는 간헐적으로 이루어져 왔고, 국내에서도 김민수와 그의 공동 연구자들⁽⁷⁾에 의해 이루어졌다.

그러나 위의 대부분의 연구들은 이동하는 물체의 하중만을 고려하였거나 이동물체의 부분적인 관성력 항만을 고려한 연구들이었고, 이동질량에 의한 탄성 지지된 보 모델의 동적응답 및 이에 대한 실험적 연구는 거의 없는 실정이다. 따라서 본 연구에서는 탄성지간을 갖는 보 구조물 위를 균일한 속도의 이동질량이 지나는 경우, 이동질량의 속도 및 크기변화, 지지 스프링 상수 및 위치 변화에 따른 동적응답을 수치해석과 실험을 통하여 연구하는데 그 목적이 있다.

2. 이론해석

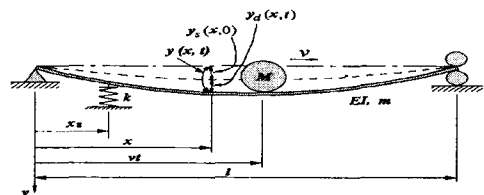


Fig. 1 A mathematical model

이동하는 질량에 의한 탄성 지간을 갖는 보의 수학적 모델은 Fig. 1과 같고, 여기서, l 은 보의 길이, m 은 단위길이당 질량, EI 는 강성, M 은 이동질량, v 는 속도, k 는 스프링

* 정회원, 충남대학교 기계공학과 대학원
E-mail : jw7921@hanmail.net

Tel : (042)821-1159, Fax: (042)821-1587

** 정회원, 한밭대학교 기계공학부

*** 대한 TDP(주)

**** 정회원, 삼척대학교 기계자동차공학부

상수, x_s 는 스프링 위치를 나타낸다.

Fig. 1 모델에 대한 운동 지배방정식은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = mg + Mg \delta(x-vt) - M \left[\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} v^2 + 2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x \partial t} v + \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} a + \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \right] \delta(x-vt) \quad (1)$$

식 (1)의 해 $y(x, t)$ 는 정적 처짐 해 $y_s(x)$ 와 이동질량에 의한 동적변위 해 $y_d(x, t)$ 의 합으로 식(2)와 같이

$$y(x, t) = y_s(x) + y_d(x, t) \quad (2)$$

가정되며, $\xi = \frac{x}{l}$ 관계에서 식(1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{EI}{l^4} \frac{\partial^4 y(\xi, t)}{\partial \xi^4} + m \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} = mg + \frac{M}{l} \left[g - \left(\bar{v}^2 \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial \xi^2} + 2 \bar{v} \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial \xi \partial t} + \bar{a} \frac{\partial y(\xi, t)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} \right) \right] \delta(\xi - \bar{v}t) \quad (3)$$

여기서, $\bar{v} = \frac{v}{l}$, $\bar{a} = \frac{a}{l}$ 이다.

Galerkin의 모드 합 방법을 이용하여, 무차원화된 해를 각각 다음과 같이 가정한다.

$$y_s(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_i(\xi) \quad (4)$$

$$y_d(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \phi_i(\xi) \quad (5)$$

$$y(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [A_i + q_i(t)] \phi_i(\xi) \quad (6)$$

여기서, $\phi_i(\xi)$ 는 식 (7) 및 (8)의 형태를 갖는 계의 형상 함수로서, 보의 형상 및 경계조건에 의해 결정된다.

본 논문과 같이 스프링의 위치 x_s 에 탄성 스프링 지지된 경우 Fig. 2와 같은 좌표계를 사용하여, 식 (7) 및 (8)과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi_{i,1}(\xi_1) = A_{i,1} \sin \beta_i \xi_1 + B_{i,1} \cos \beta_i \xi_1 + C_{i,1} \sinh \beta_i \xi_1 + D_{i,1} \cosh \beta_i \xi_1, \text{ for } (0 \leq \xi_1 \leq \xi_s) \quad (7)$$

$$\phi_{i,2}(\xi_2) = A_{i,2} \sin \beta_i \xi_2 + B_{i,2} \cos \beta_i \xi_2 + C_{i,2} \sinh \beta_i \xi_2 + D_{i,2} \cosh \beta_i \xi_2, \text{ for } (0 \leq \xi_2 \leq 1 - \xi_s) \quad (8)$$

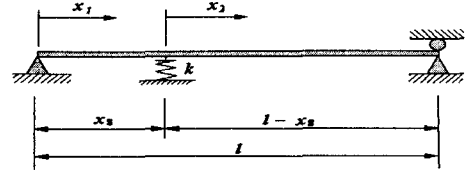


Fig. 2 A new coordinate system

여기서, 고유치 β_i 는 i 번째 고유진동수 ω_i 와 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\omega_i^2 = \frac{EI}{m} \left(\frac{\beta_i}{l} \right)^4 \quad (9)$$

본 논문의 경계조건은 양단단순지지 조건으로 식(10)부터 식 (12)에 나타난 바와 같다.

$$\phi_{i,1}(0) = 0, \frac{\partial^2 \phi_{i,1}(0)}{\partial \xi_1^2} = 0, \phi_{i,1}(\xi_s) = \phi_{i,2}(0), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi_{i,1}(\xi_s)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi_{i,2}(0)}{\partial \xi_2}, \frac{\partial^3 \phi_{i,1}(\xi_s)}{\partial \xi_1^3} = \frac{k l^3}{EI} + \frac{\partial^3 \phi_{i,2}(0)}{\partial \xi_2^3} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{i,1}(\xi_s)}{\partial \xi_1^2} = \frac{\partial^2 \phi_{i,2}(0)}{\partial \xi_2^2}, \phi_{i,2}(1 - \xi_s) = 0, \frac{\partial^2 \phi_{i,2}(1 - \xi_s)}{\partial \xi_2^2} = 0 \quad (12)$$

이제, 식 (6)의 해를 식 (3)의 무차원화된 운동 지배방정식에 대입한 후, 정적 처짐의 관계와 상수 A_i 의 시간에 대한 미분 항을 제거하고, $\phi_{n,k}(\xi_k)$ 를 내적하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^1 \phi_{i,k}(\xi_k) \phi_{n,k}(\xi_k) d\xi_k + \frac{M}{m_k l} \phi_{i,k}(\bar{v}t) \phi_{n,k}(\bar{v}t) \right] \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{M}{m_k l} 2 \bar{v} \phi_{i,k}'(\bar{v}t) \phi_{n,k}(\bar{v}t) \right] \dot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{EI}{m l^4} \beta_i^4 \int_0^1 \phi_{i,k}(\xi_k) \phi_{n,k}(\xi_k) d\xi_k + \frac{M}{m l} \bar{v}^2 \phi_{i,k}''(\bar{v}t) \phi_{n,k}(\bar{v}t) + \frac{M}{m l} \bar{a} \phi_{i,k}'(\bar{v}t) \phi_{n,k}(\bar{v}t) \right] q_i(t) = \frac{M}{m l} \left[g - \bar{v}^2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_{i,k}''(\bar{v}t) - \bar{a} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_{i,k}'(\bar{v}t) \right] \phi_{n,k}(\bar{v}t), \quad (\text{for } k=1,2) \quad (13)$$

최종적으로 식 (13)을 다시 정리하면, 식 (14)의 행렬형태의 식으로 표현된다.

$$[M(t)]\{\ddot{\varphi}(t)\} + [C(t)]\{\dot{\varphi}(t)\} + [K(t)]\{\varphi(t)\} = \{f(t)\} \quad (14)$$

여기서, 각 행렬들의 요소는 다음과 같다.

$$m_{ij}(t) = \int_0^{\xi_i} \phi_{i,1}(\xi_1)\phi_{j,1}(\xi_1)d\xi_1 + \int_0^{1-\xi_i} \phi_{i,2}(\xi_2)\phi_{j,2}(\xi_2)d\xi_2 + \mu\phi_{i,k}(\bar{v}t)\phi_{j,k}(\bar{v}t)$$

$$c_{ij}(t) = 2\mu\bar{v}\phi_{i,k}'(\bar{v}t)\phi_{j,k}'(\bar{v}t)$$

$$k_{ij}(t) = \omega_i^2 \left\{ \int_0^{\xi_i} \phi_{i,1}(\xi_1)\phi_{j,1}(\xi_1)d\xi_1 + \int_0^{1-\xi_i} \phi_{i,2}(\xi_2)\phi_{j,2}(\xi_2)d\xi_2 \right\} + \mu\bar{v}^2\phi_{i,k}(\bar{v}t)\phi_{j,k}''(\bar{v}t) + \mu_k\bar{a}\phi_{i,k}(\bar{v}t)\phi_{j,k}'(\bar{v}t)$$

$$f_i(t) = \mu \left[g - \bar{v}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_{n,k}''(\bar{v}t) - \bar{a} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_{n,k}'(\bar{v}t) \right] \phi_{i,k}(\bar{v}t) \quad (15)$$

식 (15)에서 $\mu = M/m_i$ 은 이동질량과 보 질량의 질량비를 나타내고, ξ_i 는 무차원화된 스프링 위치를 나타낸다.

3. 수치해석 결과 및 검토

양단이 단순 지지되고 임의의 위치에 스프링 지지를 갖는 보의 동적응답을 구하기 위해, Runge-Kutta 적분법을 이용하였고, 질량비 μ 와 속도비 v_0 변화에 따라 계산하였다.

3.1 스프링 지지가 없는 경우

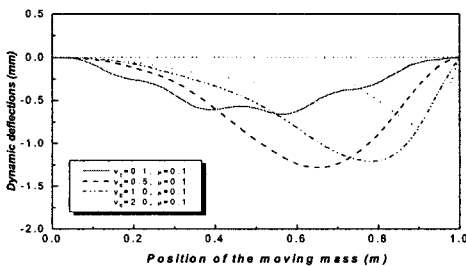


Fig. 3 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($\mu = 0.1$)

Fig. 3에서 4는 주행질량과 보 질량의 질량비 μ 가 각각 $\mu=0.1, 1.0$ 인 경우에 대해 속도비 v_0 를 변화시켜 가면서 이동질량 위치에서 보의 동적응답을 도시한 그림들이다. 먼저 Fig. 3의 $\mu=0.1$ 일 때, 속도비가 증가함에 따라 최대 동적 처짐을 일으키는 이동질량의 위치는 보의 우측 단 쪽

으로 이동하게 되며, 최대 동적처짐은 $v_0=0.5$ 에서 일어난다.

Fig. 4의 경우에 있어서는 이동질량의 속도가 증가함에 따라 임계속도인 $v_0=1.0$ 까지는 최대 동적 처짐을 유발하는 이동질량의 위치는 보의 오른쪽 단으로 이동해 가지만, 임계 속도의 2배에 해당하는 $v_0=2.0$ 의 경우는 그렇지 못함을 알 수 있다. 이 경우도 최대 동적 처짐은 속도비가 $v_0=0.5$ 인 경우에 일어난다.

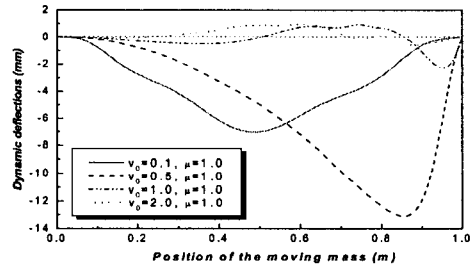


Fig. 4 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($\mu=1.0$)

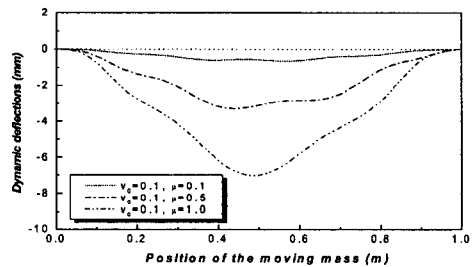


Fig. 5 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($v_0 = 0.1$)

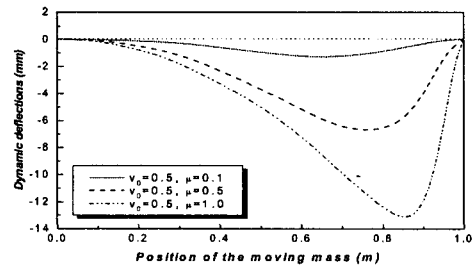


Fig. 6 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($v_0 = 0.5$)

Fig. 5와 Fig. 6은 이동질량의 속도비가 $v_0=0.1, 0.5$ 인 경우에 대해 이동질량의 질량비 μ 의 변화에 따른 보의 동적 처짐 값을 나타낸 그림들이다. 고정된 속도 비에 대해, 질량

비가 증가함에 따라 동적 처짐 값들은 증가함을 알 수 있다.

또한, 이동질량의 속도가 작은 Fig. 5의 경우, 최대 동적 처짐 값은 대략 보의 중앙에 가까운 쪽에서 발생함을 알 수 있지만, 속도비가 $v_0=0.5$ 인 경우의 Fig. 6에서는 질량비가 증가해 감에 따라 최대 동적 처짐을 유발하는 이동질량의 위치는 보의 오른쪽 단으로 이동해 간다.

3.2. 스프링 지지된 경우

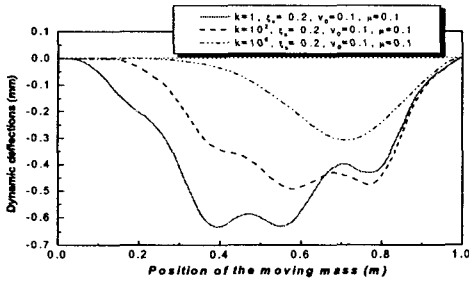


Fig. 7 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($v_0=0.1$, $\mu=0.1$, $\xi_s=0.2$)

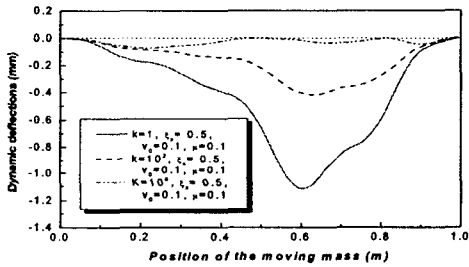


Fig. 8 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($v_0=0.1$, $\mu=0.1$, $\xi_s=0.5$)

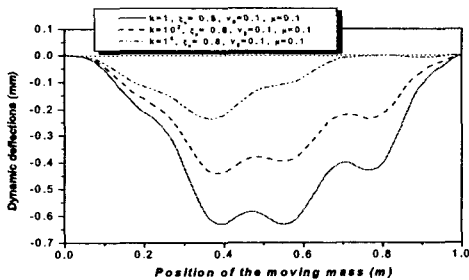


Fig. 9 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($v_0=0.1$, $\mu=0.1$, $\xi_s=0.8$)

Fig. 7에서 9는 이동질량의 속도비가 $v_0=0.1$, 질량 비 μ 가 $\mu=0.1$ 로 속도와 질량이 작은 경우, 스프링 상수 값과 위

치변화에 따른 보의 동적 처짐을 나타낸 그래프들이다. 스프링 강성이 작아지면 보의 최대 동적 처짐은 커지게 되는 현상은 세 그림들에서 모두 나타난다. 먼저, Fig. 7은 무차원 스프링 위치 ξ_s 가 $\xi_s=0.2$ 일 때에 대한 것이고, 스프링 상수 값이 증가됨에 따라 최대 동적 처짐을 유발하는 이동질량의 위치는 보의 우측 단 쪽으로 이동된다. Fig. 8은 $\xi_s=0.5$ 위치로서 스프링 강성이 큰 $K=10^6$ 의 경우, 이동질량이 보의 중간 지점을 통과하게 될 때, 이동질량 위치에서 동적 처짐은 거의 없게 됨을 알 수 있고, $K=10^6$ 을 제외한 스프링 상수 값에서 K 가 증가함에 따라 최대 동적 처짐을 유발하는 이동질량의 위치는 보의 우측 단으로 이동된다.

한편, Fig. 9는 $\xi_s=0.8$ 인 위치로서 이 경우는 스프링 강성이 증가하게 되면 최대 동적 처짐을 일으키는 이동질량의 위치는 보의 좌측 단 쪽으로 이동된다.

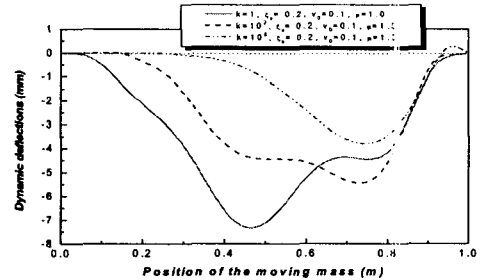


Fig. 10 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($v_0=0.1$, $\mu=1.0$, $\xi_s=0.2$)

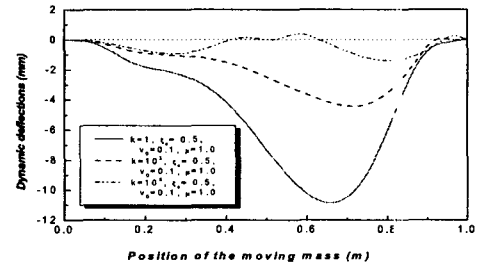


Fig. 11 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($v_0=0.1$, $\mu=1.0$, $\xi_s=0.5$)

Fig. 10에서 11은 $v_0=0.1$, $\mu=1.0$ 에 대한 경우로서, 이 그림들에 있어서도 스프링 강성이 증가하면 최대 동적 처짐은 감소되며, $\xi_s=0.2$ 와 0.5 인 Fig. 10과 11의 경우는 스프링 강성이 증가할수록 최대 처짐을 유발하는 이동질량의 위치는 보의 우측 단 쪽으로 이동되지만, $\xi_s=0.8$ 의 경우에 있어서는 강성이 증가하면, 최대 처짐 위치는 좌측 단으로 이동된다.

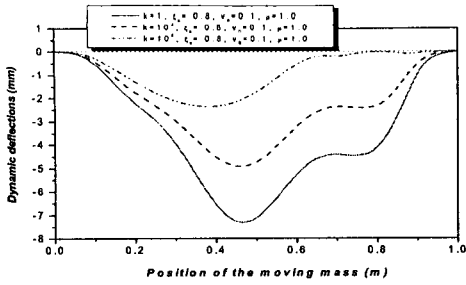


Fig. 12 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($v_0=0.1, \mu=1.0, \xi_s=0.8$)

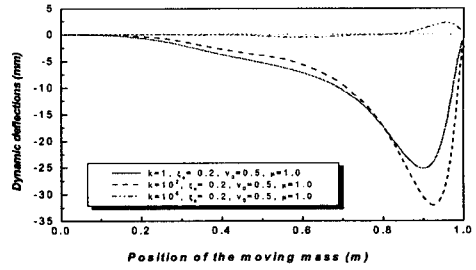


Fig. 15 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($v_0=0.5, \mu=1.0, \xi_s=0.2$)

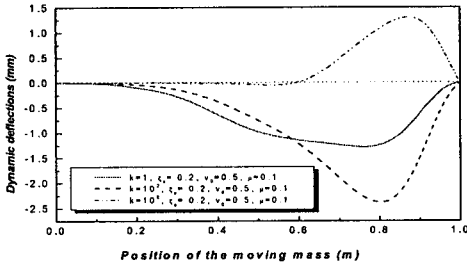


Fig. 13 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($v_0=0.5, \mu=0.1, \xi_s=0.2$)

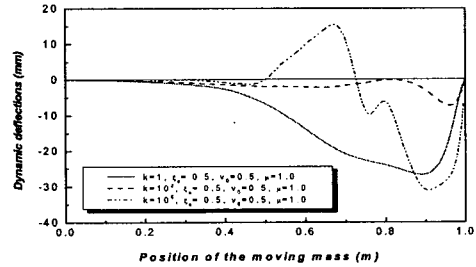


Fig. 16 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($v_0=0.5, \mu=1.0, \xi_s=0.5$)

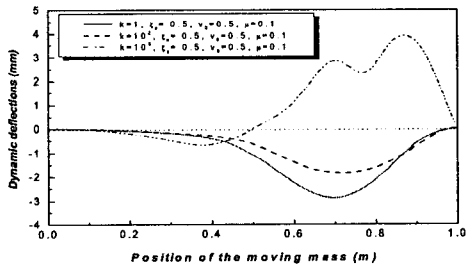


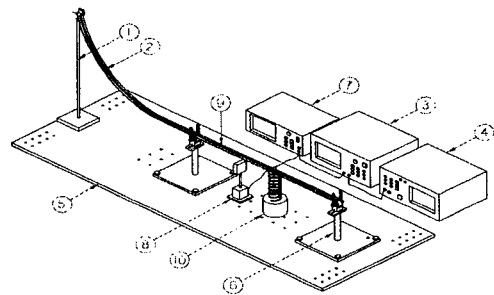
Fig. 14 Dynamic deflections at the position of the moving mass ($v_0=0.5, \mu=0.1, \xi_s=0.5$)

Fig. 13에서 14는 $v_0=0.5, \mu=0.1$ 에 대한 그래프로서 이동 질량의 속도가 증가되면 보의 최대 동적 처짐이 반드시 스프링 강성이 작은 경우에 발생되지 않는다. 예를 들어, $\xi_s=0.2$ 인 Fig. 13의 경우, 최대 동적 처짐은 $K=10^2$ 일 때 최대 동적 처짐 값이 더 크게 나타남을 알 수 있지만, $\xi_s=0.5$ 인 Fig. 14의 경우는 오히려 $K=10^6$ 인 경우가 최대 동적 처짐 값을 나타낸다.

Fig. 15에서 16의 경우는 $v_0=0.5, \mu=1.0$ 으로, 이 경우도 스프링 강성이 작다고 해서 최대 동적 처짐이 항상 크지는 않다.

4. 실험장치 및 실험

4.1 실험 장치



- ① Support column of the guide beam
- ② Guide beam
- ③ FFT Analyzer
- ④ Digital oscilloscope
- ⑤ Base sheet
- ⑥ simply-supported pole
- ⑦ Laser displacement meter
- ⑧ Laser sensor
- ⑨ Test beam
- ⑩ Elastic spring support

Fig. 17 Experimental set up

탄성 스프링 지지되고 이동질량에 의한 단순 지지보의 동적 처짐에 관한 실험적 검증용 위해 Fig. 17과 같은 실험 장치를 구성하였고, 시험보에 대한 제원은 Table 1에 나타난 바와 같다.

Table 1 Characteristic properties of the test beam

Material	Aluminum 6061
Modules of elasticity(Gpa)	7.07e+10
Density(kg/m^3)	2,678.0
Mass(g)	283.0
Length (mm)	1,000.0
Width (mm)	32.0
Thickness (mm)	4.0
Groove width (mm)	10.0
Groove depth (mm)	2.0

4.2 수치해석과 실험결과의 비교

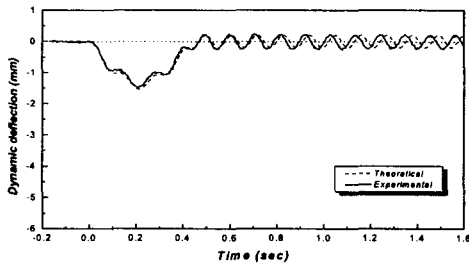


Fig. 18 Comparison theoretical results with experimental ones($v=2.2(m/s)$, $M=67(g)$)

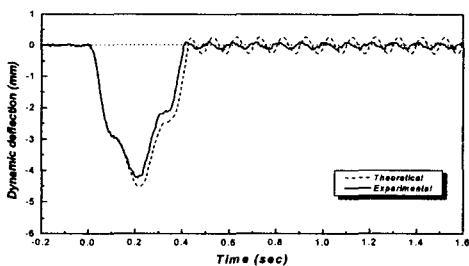


Fig. 19 Comparison theoretical results with experimental ones($v=2.2(m/s)$, $M=224.8(g)$, $\xi_s=0.8$)

Fig. 18과 19는 각각 스프링지지가 없는 경우와 있는 경우($k=404(N/m)$)에 대해, 시뮬레이션과 실험에 의한 처짐값을 비교한 것으로 비교적 근사한 일치를 이루고 있음을 알 수 있다.

5. 결론

스프링 지지되고, 이동질량에 의한 단순 지지보의 동적 응답 수치해석 및 실험을 통해 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 스프링 지지가 없는 경우, 이동질량의 속도 비 및 질량 비의 증가에 따라 최대 동적 처짐을 일으키는 이동질량의 위치는 보의 우측 단으로 이동된다.
2. 이동질량의 속도가 작은 경우 보의 최대 동적 처짐은 스프링 위치에 관계없이 스프링 강성이 작은 쪽이 크게 된다. 이동질량의 속도가 큰 경우는 항상 스프링 강성이 작은 쪽이 큰 동적 처짐을 유발하는 것이 아니다.
3. 이동질량의 속도가 작은 경우 전반적으로 무차원 스프링 위치 ξ_s 가 $\xi_s < 0.5$ 에서는 무차원 스프링 상수 K 값의 증가에 따라 최대 동적 처짐을 일으키는 이동질량의 위치는 보의 우측 단으로 이동되며, $\xi_s > 0.5$ 에서는 K 값의 증가에 따라 좌측 단으로 이동된다.
4. 이동질량을 받는 탄성지지스프링 지지된 보의 동적 처짐에 관한 실험결과는 수치해석 결과와 근사한 일치를 보임으로써 수치해석의 타당성이 검토 되었다.

참고 문헌

- (1) R. S. Ayre, L. S. Jacobsen and C. S. Hsu, 1951, " Transverse Vibration of One and Two-Span Beams under the Action of a Moving Mass Load", Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics, pp. 81~90.
- (2) E. C. Ting, J. Genin and J. H. Ginsberg, 1974, "A General Algorithm for Moving Mass Problems", Journal of Sound and Vibration, Vol.33, pp. 49~58.
- (3) E. Esmailzadeh and M. Ghorashi, 1992, "Vibration Analysis of Beams Traversed by Moving Masses," Proceedings of the International Conference on Engineering Application of Mechanics, Tehran, Iran, Vol. 2, pp. 232~238.
- (4) H. P. Lee, 1996, "Dynamic Response of a Beam on Multiple Supports with a Moving Mass," Structural Engineering and Mechanics, Vol. 4, No. 3, pp. 303~312.
- (5) D. Thambiratnam and Y. Zhuge, 1995, "Dynamic Analysis of Beams on an Elastic Foundation Subjected to Moving Loads," Journal of Sound and Vibration, Vol.198, pp.149~169.
- (6) R. T. Wang, 1997, "Vibration of Multi-Span Timoshenko Beams to a Moving Force," Journal of Sound and Vibration, Vol. 207, pp.731~742.
- (7) 김민수, 채수영, 이기수, 홍동표, 1999, "이동 질량 하중을 받는 유연한 구조물의 동특성 해석," 대한기계학회논문집(A), pp.781~786.