

# 윗면이 평평한 엠보스 형상을 이용한 고유 진동수 극대화 Natural Frequency Maximization Using a Flat-top Emboss

송경호\*· 박윤식\*\* 박영진\*\*  
Kyungho Song, Younsik Park

**Key Words** : emboss, flat-top emboss, 엠보스

## ABSTRACT

Even though embossing is an effective SDM(Structural Dynamics Modification) technique, it is difficult to implement the method in fields owing to its geometric complexity. In this research low flat-top emboss shape, rather than general shape, is considered and a systematic procedure is derived in describing the emboss implementation procedure utilizing the fact that the emboss shape can be fully expressed only if the boundary elements are appropriately given. Best position to maximize natural frequencies is found using the procedure and usefulness of the suggested technique is illustrated.

## 1. 서론

본 연구에서는 Fig.1 과 같이 윗면이 평평한 엠보스 형상을 개념적으로 간단한 방법을 사용하여 그러한 형상의 엠보스가 평판에 추가되는 과정을 표현하는 과정을 도출하였다. 윗면이 평평한 엠보스 형상은 Fig.1 에서 보듯이 실제적으로 널리 구현되는 형상이다.

윗면이 평평한 엠보스는 임의의 형상을 가진 복잡한 엠보스에 대하여 여러 가지 이점을 가진다. 우선 윗면의 수학적 표현식이 기저 평판과 같아지게 된다. 다시 말해 기하학적으로는 다른 평면상에 있는 두 개의 평판이지만 수식적으로는 동일한 질량 및 강성 행렬로 표현된다. 따라서 임의의 경계 형상을 가진 윗면이 평평한 엠보스를 수식적으로 완전하게 표현하기 위해서는 Fig.2 에서 보는 바와 같이 경계를 이루는 요소에 대해서만 묘사하면 충분하다. 본 연구에서는 낮고 윗면이 평평한 엠보스 형상에 대해서 관심이 있으므로 경계의 요소는 하나의 수직인 유한 요소 만으로 표현하더라도 수치적인 오차를 유발하지 않는다고 가정하였다.

## 2. 경계 요소 유도

경계의 수직인 요소는 기저 평판의 유한 요소와는 달리 굽힘 평판 요소이면서 평면 응력 평판 요소이다. 따라서 아래에 기술한 방식을 이용하여 경계를 이루는 수직인 요소의 질량 및 강성 행렬을 유도한다. 다시 말해 굽힘 평판 요소와 평면 응력 평판 요소 각각에 대해서 질량 및 강성 행렬을 유도한 뒤 기저 평판에서 고려되는 자유도만을 추출하여 경계 요소의 질량 및 강성 행렬을 유도한다.

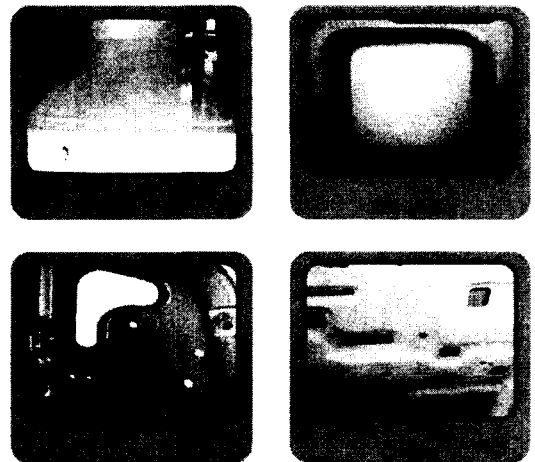


Fig.1

\*한국과학기술원 기계공학과  
E-mail : saintsong@kaist.ac.kr  
Tel : (042) 869-3060

\*\* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

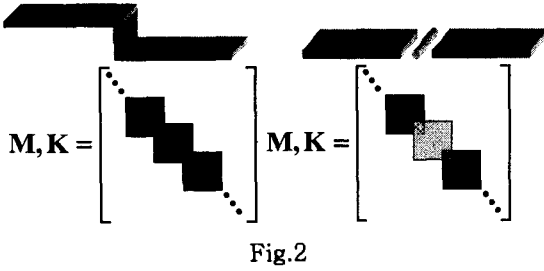


Fig.2

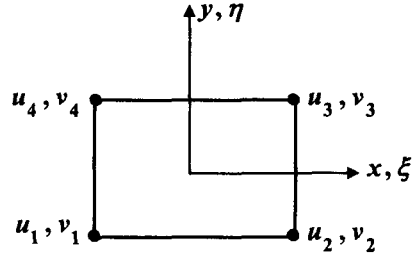


Fig.4

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$

$$u = \sum_{j=1}^4 N_j u_j, \quad v = \sum_{j=1}^4 N_j v_j$$

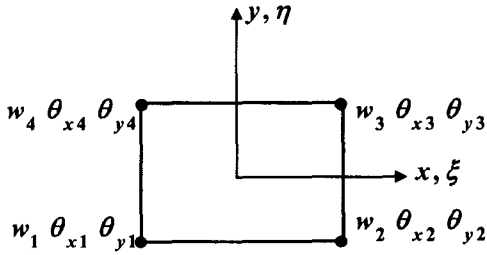


Fig.3

$$w = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \quad \xi^3\eta \quad \xi\eta^3] \{\alpha\}$$

$$\{\alpha\}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{12}]$$

$$w = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \{w\}_{node}$$

$$\{w\}_{node}^T = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}]$$

$$[m]_{e1} = \int_{A_e} \rho h [N]^T [N] dA$$

$$[k]_{e1} = \int_{A_e} \frac{h^3}{12} [B]^T [D] [B] dA$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [N], \quad [D] = \begin{bmatrix} E' & E'\nu & 0 \\ & E' & 0 \\ Sym & & G \end{bmatrix}$$

where

$$E' = \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$[m]_{e2} = \int_{A_e} \rho h [N]^T [N] dA$$

$$[k]_{e2} = \int_{A_e} \frac{h^3}{12} [B]^T [D] [B] dA$$

$$[M] = [T_1]^T [m]_{e1} [T_1] + [T_2]^T [m]_{e2} [T_2]$$

$$[K] = [T_1]^T [k]_{e1} [T_1] + [T_2]^T [k]_{e2} [T_2]$$

### 3. 엠보스 형상 부가 과정 유도

전술한 방식으로 유도한 엠보스의 경계 요소를 이용하여 기저 평판이 주어 졌을 때 낮고 윗면이 평평한 임의의 경계 형상을 가진 엠보스를 부가하는 과정을 유도하였다. 요약하면 다음과 같다.

첫째, 엠보스의 경계 요소들을 기준으로 하여 기저평판을 엠보스의 내부와 외부로 나누어 찢는다. 이 때 경계의 요소가 들어가기 위한 절점을 첨가한다. 이것은 질량 및 강성 행렬의 확장으로 표현된다.

둘째, 엠보스 내부의 절점들을 새로이 첨가된 절점과 연관시킨다. 이것은 질량 및 강성 행렬의 변환에 해당한다.

셋째, 표면적이 늘어남으로 인해서 두께는 줄어 들었으므로 이 때 발생하는 질량 및 강성행렬의 변화를 고려하고, 유도한 경계 요소의 질량 및 강성 행렬을 더한다.

위와 같은 과정은 행렬의 확장과 변환의 과정을

통해서 모두 표현되며 그 유도 및 구현 과정의 정확성은 상용 프로그램을 이용하여 확인하였다. 다시 말해서 기하학적인 정보만을 이용하여 자동으로 생성한 요소와 위의 방식으로 유도한 질량 및 강성 행렬의 값이 일치함을 알 수 있었다. Fig. 5는 위의 과정을 도식적으로 표현한 것이다.

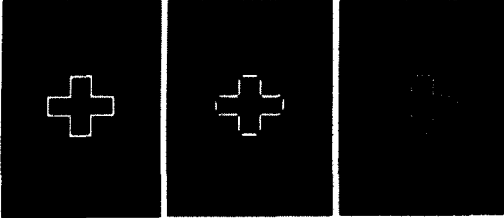


Fig.5

#### 4. 적용 I; 큰 엠보스 형상

기저 평판이 주어졌을 때 윗면이 평평한 엠보스 형상을 부가하는 과정을 앞에서 유도하였으므로 본 단락에서는 실제로 그러한 과정이 어떠한 식으로 이루어 지는지를 가상의 문제를 이용하여 실증하였다.

Fig.6은 기저 평판과 부가될 엠보스의 형상, 그리고 경계 조건을 보이고 있다. 그리고 Fig.7은 엠보스가 유발하는 모드 형상의 변화를 보이고 있다. Fig.6에서 볼 수 있듯이 이 문제의 경우 엠보스가 부가될 수 있는 위치가 절점이 일치된다는 조건하에서는 유한하다. 따라서 다음의 두 가지 방법을 통하여 기저 평판의 첫 번째 고유 진동수를 극대화 할 수 있는 엠보스 형상이 부가될 위치를 찾을 수 있다.

첫째, 엠보스가 부가될 수 있는 모든 경우의 수에 대하여 고유 진동수를 구하여 비교한다.

둘째, 최적화 알고리즘을 이용하여 최적의 엠보스 형상이 부가될 위치를 구한다.

우선 첫 번째 방식으로 구한 모든 위치에서의 고유 진동수 값을 명도를 이용하여 나타내면 Fig. 8과 같다. 표시한 부분이 고유 진동수가 가장 큰 부분이다. 두 번째 방법에서는 임의의 위치에서의 고유 진동수를 구하기 위해서 아래와 같이 잘 알려진 형상 함수를 사용하였다. 즉 임의의 위치에서의 고유 진동수는 그 위치에 존재하는 요소의 네 절점에서의 고유 진동수의 조합으로 표현된다. 최적화 알고리즘을 이용하여 구한 결과는 첫 번째

방법과 일치하였다. 하지만 많은 계산 시간이 소요되었다.

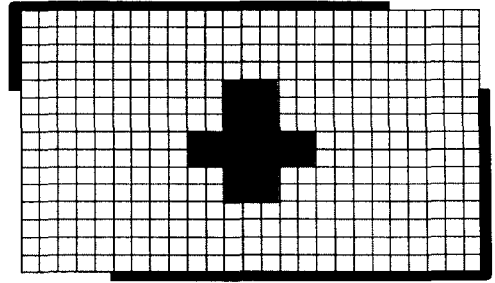


Fig.6

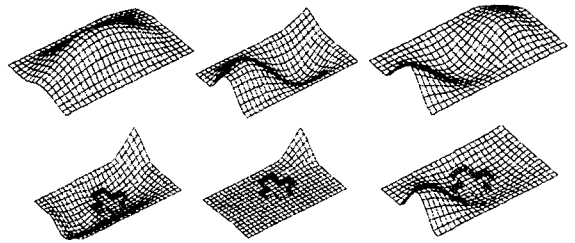


Fig.7

$$Freq. = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \{Freq.\}_{node}$$

$$\{Freq.\}_{node} = [f_{node1} \quad f_{node2} \quad f_{node3} \quad f_{node4}]^T$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

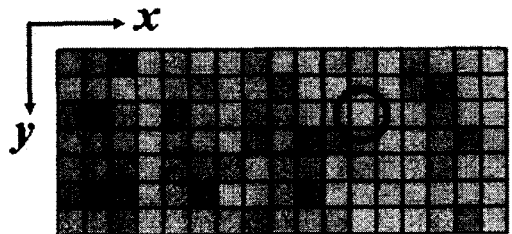
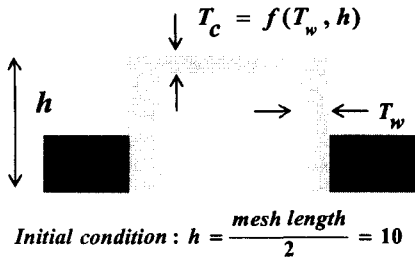


Fig.8

## 5. 적용 II; 작은 엠보스 형상



$$T_w = T_c = 0.516$$

Optimal solution :  $h = 10.55$

$$T_w = 0.5238, T_c = 0.4794$$

Fig.9

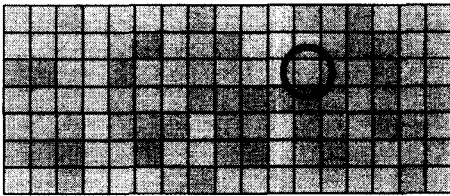


Fig.10

Fig. 9 는 이렇게 구한 최적의 위치에서 두께를 설계 변수로 두고 최적화를 수행한 결과를 보이고 있다. 경계 요소는 두꺼워지고 윗면은 얇아 졌다. Fig. 10 은 최적화된 두께를 이용하여 다시 한 번 모든 가능한 위치에서 고유 진동수를 구한 결과를 보이고 있다. 최적의 위치는 변하지 않았다. 하지만 전체적으로 고유 진동수 크기의 변화가 두께 최적화 전 후에 5% 이내였다. 다시 말해 두께는 엠보스 형상을 이용해서 구조물의 고유 진동수를 변경시키는 데에 있어서 위치보다 민감한 인자가 아님을 알 수 있다. 고유 진동수 비교 결과는 Fig. 11 과 같다.

Not embossed (Hz)	Best position (initial cond.)	Best position +optimization
68.6	112.3	113.1
90.5	113.1	113.2
122.0	141.3	141.1
126.8	173.7	173.6
164.5	251.8	251.8

Fig.11

엠보스 형상이 기저 평판에 비해서 작을 때에는 엠보스 형상이 부가될 수 있는 경우의 수가 많으므로 모든 경우의 수에 대해서 조사하는 방법과 형상함수를 이용한 방법 모두 많은 계산시간을 요구하여 비효율적이다. 따라서 다음과 같은 최적화 수행 방법을 제안하였다.

첫째, 변형 에너지를 이용하여 초기 위치를 설정한다. 즉 변형이 큰 곳에 강성이 증가하면 고유 진동수 증대 효과가 극대화 되므로 강성 증가와 유사한 엠보스 형상의 부가 위치를 결정하는데 있어서 최적화의 초기 조건으로 변형 에너지가 가장 큰 위치를 선택한다.

둘째, 절점 일치 조건이라는 제한 사항을 고려한 다음과 같은 간단한 알고리즘을 이용하여 초기 조건에 근접한 국부 최적점을 찾는다. 이 때 사용한 알고리즘은 다음의 Fig. 12 와 같다.

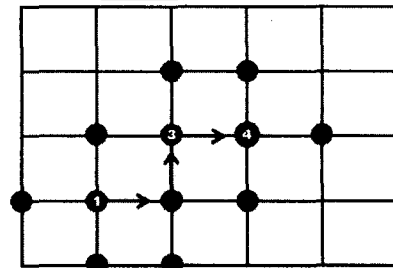
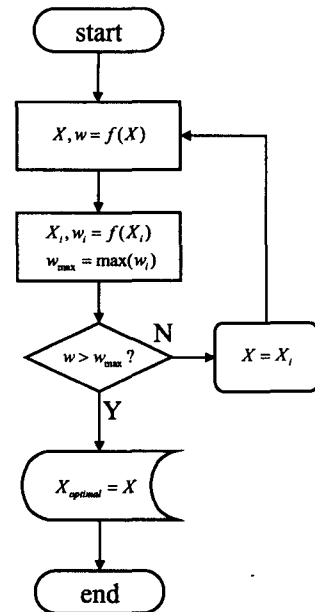


Fig.12

Fig. 13 은 기저 평판과 그 경계 조건, 초기 조건과 국부 최적점 그리고 전체 최적점을 보이고 있다. 두 점이 고정 지지된 경계 조건을 가지며 표시한 곳이 전체 최적점이다. 그리고 엠보스 형상이 부가 되기 전 기저 평판의 변형 에너지 분포는 Fig. 14 에서 보는 바와 같다. 각각의 경우에 대하여 고유 진동수 비교 결과는 Fig. 15 에 나타난다.

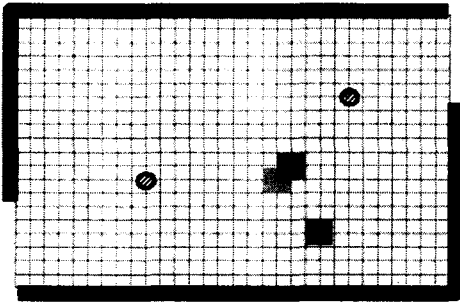


Fig.13

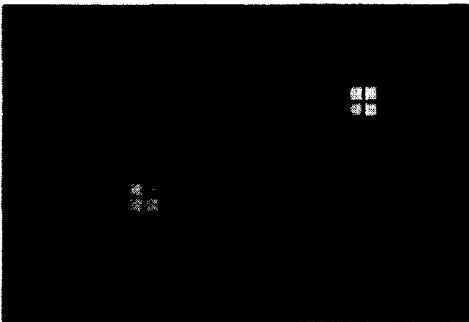


Fig.14

Not embossed (Hz)	Initial position (Strain energy.)	Local optimum	Global optimum
46.0	66.3	70.7	75.3
61.9	73.8	76.7	77.8
80.0	105.8	108.6	106.8
101.7	106.2	127.0	143.3
111.9	129.5	141.5	160.2

Fig.16

## 6. 결론

본 연구에서는 일반적인 엠보스 형상 대신에 실제적으로 많이 구현되면서 수식적으로는 몇 가지 가정을 이용하면 접근하기가 용이한 낮고 윗면이 평평한 엠보스 형상을 기저 평판에 구현하는 방법을 간단한 개념을 이용하여 유도하였다. 이러한 방법을 이용하면 기저 평판의 요소 분포의 범위 내에서 임의의 경계 형상을 가진 윗면이 평평한 엠보스 형상을 구현할 수 있으며 유도된 질량 및 강성 행렬의 계산을 이용하여 최적의 고유 진동수 극대화 위치도 제안된 여러 가지 방법을 이용하여 구해낼 수 있음을 알 수 있다.

## 후기

본 연구는 국가지정연구사업 “진동 저감을 위한 동특성 변경기술(2000-N-NL-01-C-148)”과 두뇌한국사업(BK21) 지원에 의한 것입니다.

## 참고문헌

- (1) Stephen H. Crandall, Norman C.Dahl, Thomas J. Lardner “An Introduction to the Mechanics of Solids”, 2nd ed, McGraw-Hill,1978,
- (2) Leonard Meirovitch “Computational Methods in Structural dynamics”, Sijthoff & Noordhoff International Publishers,1980.
- (3) Nuno Manuel Mendes Maia “Theoretical and Experimental Modal Analysis”, Research Studies Press, 1997.
- (4) Robert C. Juvinall, Kurt M. Marshek “Fundamentals of Machine Component Design”,2nd, John Wiley & Sons,1983.
- (5) T.Y.Yang “Finite Element Structural Analysis”, Prentice-Hall,Inc.Englewood Cliffs,N.J