다양한 단면 형태를 갖는 섬유의 비틀림 및 굽힘거동 해석

이경우
동아대학교 의상섬유학부 섬유공학전공

Kyung-Woo Lee
Division of Fashion & Textiles, Dong-A University, Busan, Korea

1. 서론

직물을 구성하는 기본 인자인 섬유의 단면 형태는 직물의 촉감,광택,투습성 등에 많은 영향을 미친다. 또한 최근 사용이 급증하고 있는 산업용 섬유제품과 부직포용 섬유제품 등에서는 보다 더 직접적으로 섬유의 단면 형태가 제품의 비틀림 및 굽힘거동에 직접적인 영향을 미친다. 본 연구에서는 섬유의 단면 형태를 general cardioid , 즉 극좌표 형식으로 표현 하였을 경우 다음과 같다고 가정하였다.

$$r = a[1 + \lambda Cos n\theta] \tag{1}$$

여기에서 r 은 섬유의 반지름, a,λ 는 상수, n 은 자연수이다. 식(1)을 이용하여 다양한 단면의 섬유를 표현할 수 있다.

2. 본론

2.1 비틀림 지배 방정식의 유도

비틀림 모멘트 (M) 과 단위길이당 회전각 (θ) 사이에는 다음과 같은 식이 성립한다.

$$M = G\theta D \tag{2}$$

여기에서 G 는 전단계수이고, D 는 비틀림 강성계수로써 다음과 같이 정의된다.

$$D = \int_R (x^2 + y^2 + x\frac{\partial\phi}{\partial y} - y\frac{\partial\phi}{\partial x})dxdy \tag{3}$$

즉 비틀림 문제는 비틀림 함수, $\phi(x,y)$ 를 구하면 모든 문제를 해결할 수 있으나 섬유의 단면 형태가 비교적 간단한 타원, 직사각형, 정삼각형 등에 대하여 비틀림 함수가 구해져 있으나, 복잡한 단면 형태에 대한 비틀림 함수는 구하기는 어렵다. N.I.Muskhelishvili 가 복소수를 사용하여 비틀림 함수를 구할 수 있는 새로운 방법을 개발하였다[1]. 이 방법의 핵심은 임의의 단면을 갖는 섬유의 비틀림 문제를 등각사상함수(Conformal mapping function)을 사용하여 임의의 단면의 내부를 반지름이 1 인 원으로 사상한 뒤 단면의 형태가 원래의 단면의 형태보다 훨씬 간단한 원의 내부에서 비틀림 문제를 복소수의 유수정리(Theorem of residues)를 사용하여 푸는 것이다. 따라서 등각사상함수만 구할 수 있으면 비틀림 문제를 해결 할 수 있지만 엄밀한 형태의 등각사상함수를 구하는 것이 어렵기 때문에 근사적인 등각사상함수를 구하기 위한 연구들이 진행되고 있다.

만약 등각사상함수가 다음과 같은 다항식의 형태로 주어지면 비틀림 문제는 복소수의 유수정리를 사용하지 않고 쉽게 구할 수 있다.

$$z = x + yi = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \zeta^p \tag{4}$$

여기에서 a_p 는 복소수이고 ζ 는 반지름의 크기가 1 인 원을 나타내는 좌표계의 독립변수이다.

즉 등각사상함수가 식(4) 의 형태로 주어지게 되면 비틀림 강성계수, D 는 다음과 같이 구할 수 있

다.

$$D=\frac{\pi}{2}\left[\, b_0\, c_0+\sum_{p=1}^{\infty}\left(c_p\, \overline{b_p} + \overline{c_{-p}}\, b_p-2p\, b_p\, \overline{b_p}\right)\right] \tag{5}$$

여기에서

$$b_p=\sum_{r=0}^{\infty} a_{p+r}\, \overline{a_r},\quad c_p=\sum_{r=0}^{\infty}(p+r)\, a_{p+r}\, \overline{a_r},\quad c_{-p}=\sum_{r=0}^{\infty} r\, \overline{a_{p+r}}\, a_r$$

이다.

여기에서 $\overline{a^p}$ 는 a^p 의 켤레복소수를 의미한다.

2.2. 근사 등각사상함수의 유도

본 연구에서 가정한 섬유의 단면 형태인 $r=a[1+\lambda Cosn\theta]$ 에 대한 엄밀한 형태의 등각사상함수가 존재하지 않으므로 근사적인 방법[2]을 사용하여 구하면 다음과 같다.

$$z=\sum_{p=0}^{6} a_{pn+1}\, \zeta^{pn+1} \tag{6}$$

여기에서

$$a_1=a\left[1-\frac{(2n+1)}{4}\lambda^2+\frac{(-1-3n+2\,n^3)}{16}\lambda^4\right]$$

$$a_{n+1}=a\left[\lambda-\frac{(n+3\,n^2)}{8}\lambda^3-\frac{(28n+114\,n^2+20\,n^3-90\,n^4)}{384}\lambda^5\right]$$

등으로 주어진다.

3. 결론

섬유의 비틀림 강성은 섬유의 꼬임에 대한 저항을 말하며 단위길이의 섬유를 단위꼬임만큼 꼬는데 필요한 모멘트를 의미하며 식(6)을 식(5)에 대입한 후 정리하면 다음과 같다.

$$D=\frac{\pi\, a^4}{96}\left[48+48(3-2n)\lambda^2+6(3-2n-4\,n^2+4\,n^3)\lambda^4+O(\lambda^6)\right] \tag{7}$$

여기에서 O 는 order를 나타낸다.

비틀림 형태계수(ε) 란 섬유의 단면이 원형이 아니지만 원형인 섬유와 단면적이 같을 때의 비틀림 강성을의 크기를 나타내 주는 상대적인 값으로 섬유의 단면이 $r=a[1+\lambda Cosn\theta]$ 로 주어지는 경우 다음과 같다.

$$\varepsilon=\frac{[48+48(3-2n)\lambda^2+6(3-2n-4\,n^2+4\,n^3)\lambda^4+O(\lambda^6)]}{12(\lambda^4+4\,\lambda^2+4)} \tag{8}$$

4. 참고문헌

1. N.I.Musheishvili, " Some basic problems of the theory of elasticity", Fourth ed, pp.291-315, Noordhoff International Publishing, 1977.
2. L.V.Kantorovich and V.I.Krylov, " Approximate methods of higher analysis", pp.414-445, Interscience Publishers, 1958.