

# 비선형 탄성 복합재료 기둥의 임계 좌굴하중 계산 및 안정성 평가

주기호, 정재호, 강태진

서울대학교 공과대학 재료공학부

## Stability Evaluation & Determination of Critical Buckling Load for Non-Linear Elastic Composite Column

Ki Ho Ju, Jae Ho Jung, and Tae Jin Kang

*School of Material Science and Technology, Seoul National University*

**Key Words** : low temperature carbon fiber, carbon/phenolic hybrid composites, thermal conductivity

### ABSTRACT

Buckling and post-buckling Analysis of Ludwick type and modified Ludwick type elastic materials was carried out. Because the constitutive equation, or stress-strain relationship is different from that of linear elastic one, a new governing equation was derived and solved by 4<sup>th</sup> order Runge-Kutta method. Considered as a special case of combined loading, the buckling under both point and distributed load was selected and researched. The final solution takes distinguished behavior whether the constitutive relation is chosen to be modified or non-modified Ludwick type as well as linear or non-linear. We also derived strain energy function for non-linear elastic constitutive relationship. By doing so, we calculated the criterion function which estimates the stability of the equilibrium solutions and determines critical buckling load for non-linear cases. We applied this theory to the constitutive relationship of fabric, which also is the non-linear equation between the applied moment and curvature. This results has both technical and mathematical significance.

### 1. 서론

복합재료의 구조를 이루는 보강섬유 및 기지재는 고분자 물질(polymeric material)로서 그 물성이 종종 비선형 형태를 보이곤 한다. 이와 같이 물성이 비선형, 특히 비선형 탄성체(non-linear elastic material)의 거동을 보이는 경우는 대변형 상태의 고분자 재료, 항복점(yield point)을 지난 금속의 거동 등에서 관찰되는데, 이를 설명하여 주는 대표적인 조성방정식은 아래의 식으로 정의되는 Ludwick type elastic material 이다.

$$\begin{aligned} \sigma &= E\epsilon^n \\ \sigma &= E\{(\epsilon + \epsilon_a)^n - \epsilon_a^n\}, \quad \epsilon_a = \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{1-n}}, \quad n^{\frac{1}{1-n}} \quad (1a, b) \\ (\epsilon > 0, n=1, 0.9) \end{aligned}$$

식 (1)로 표현되는 Ludwick type non-linear elastic

material 은 zero strain 영역에서의 stress gradient 가 무한대가 되는 단점이 있기 때문에 작은 strain 영역에서 식 91a)를 직접 사용하는 것은 곤란하고 본 논문에서 제시한 식 (1b)와 같은 modified Ludwick type constitutive relation 을 사용하는 것이 좋다. Ludwick type 조성방정식을 어떻게 선택하는냐는 차치하고서라도 비선형 탄성체의 좌굴거동에 대한 연구는 거의 이루어진 바가 없다. 따라서 본 논문에서는 두가지의 비선형 탄성 모델 - modified and unmodified Ludwick type non-linear elastic model - 의 좌굴 거동을 선형탄성체의 경우와 비교 해석하고자 한다.

이 해석에는 좌굴거동을 나타내는 지배방정식의 유도, 해를 구하는 방법 및 결과, 계의 안정성을 나타내는 에너지함수 유도부분 및 결과 등이 포함되는데 선형탄성체의 그것과는 뚜렷한 차이를 보인다.

## 2. 이론

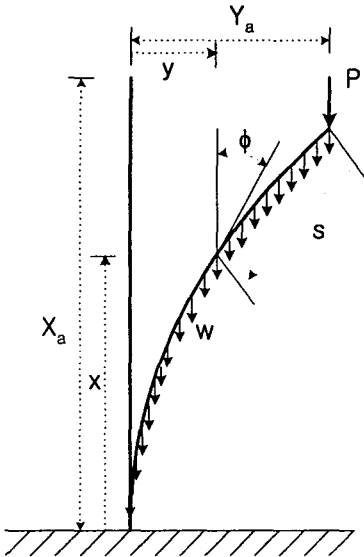


fig 1. Coordinate system of a beam under combined buckling load

위 그림 1 과 같은 형태의 좌굴 거동에 대하여 유도된 지배방정식은 아래와 같다.

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = -\frac{I_0 L^{n-1} (\beta + \gamma\xi) \sin\phi}{\int_A nt^2 \{(|\bar{\kappa}|t + L\varepsilon_a)^{n+1} - (L\varepsilon_a)^{n+1}\} dA} \quad (2)$$

$$\xi = \frac{s}{L}, \beta = \frac{PL^2}{EI_0}, \gamma = \frac{wL^3}{EI_0}, I_0 = \int_A t^2 dA, \bar{\kappa} = -\frac{d\phi}{d\xi}$$

단, s 는 tip point 에서부터의 arc length, P & w 는 하중, E 는 재료의 young's modulus,  $\bar{\kappa}$  는 normalized curvature 이다. 또한 normalized 경계조건은 아래와 같다.

$$\phi = 0, \frac{d^2\phi}{d\xi^2} = 0 \text{ at } \xi = 1, \phi = \phi_0, \frac{d\phi}{d\xi} = 0 \text{ at } \xi = 0$$

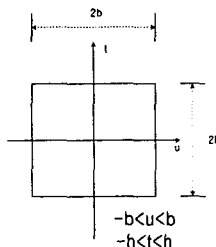


fig 2. Shape & equation of shape for rectangular cross-section

식 (2)를 풀기 위해서는 단면의 형태가 주어져야 하는데 위 그림 2 와 같이 단면의 형태가 직사각형이라고 가정하였다.

또한, 구하여진 해의 물리적인 안정성을 평가하는 에너지 함수는 아래와 같이 얻어지는데 그 물리적인 의미는 하중에 의해 계가 한 일(work done by load P, w)과 계에 저장된 변형에너지(strain energy)의 차이를 뜻한다.

$$Q = \int_0^1 \left[ -\int_0^h \frac{4b}{I_0} \left\{ \frac{(|\bar{\kappa}|t + L\varepsilon_a)^{n+1} - (L\varepsilon_a)^{n+1}}{(n+1)L^{n-1}} - \varepsilon_a^n L |\bar{\kappa}| t \right\} dt + (\beta + \gamma\xi)(1 - \cos\phi) \right] d\xi \quad (3)$$

## 3. 결과 및 고찰

단면의 형태가  $b=h=1\text{mm}$  로 주어진 직사각 기둥에 대하여 column 의 길이가  $L=10\text{cm}, 100\text{cm}$  두 경우로 주어졌을 때의 결과를 그림 3 ~ 10 으로 나타내었는데, 그림 3 ~ 6 은 기둥의 길이  $L=10\text{cm}$  일 때의 점, 분포하중에 대한 끝 처짐각  $\phi_0$  의 변화에 따른 하중계수  $\beta$  및 에너지 함수 Q 의 데이터를 나타내고 그림 7 ~ 10 은 기둥의 길이  $L=100\text{cm}$  일 때의 결과를 나타낸다.

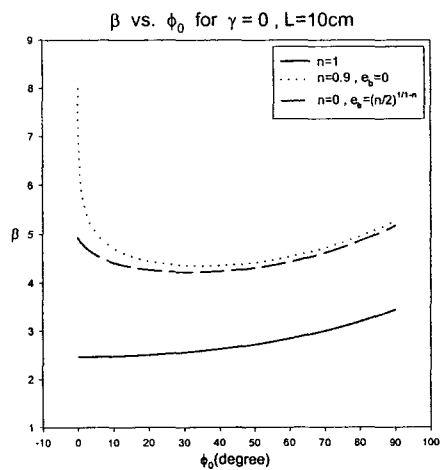


fig 3

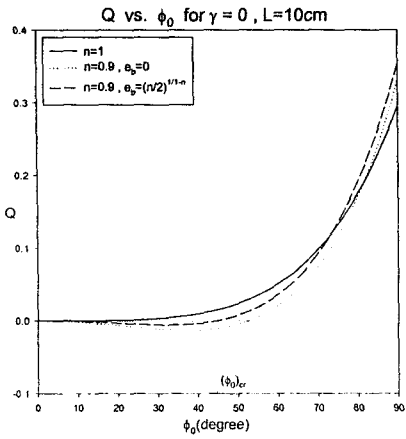


fig 4

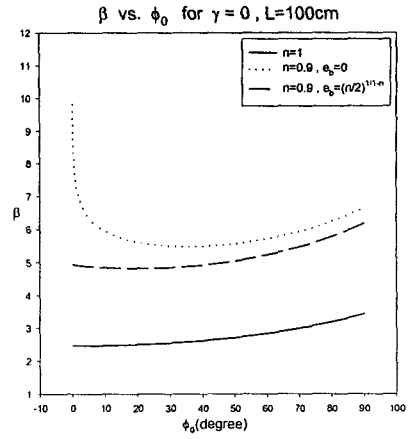


fig 7

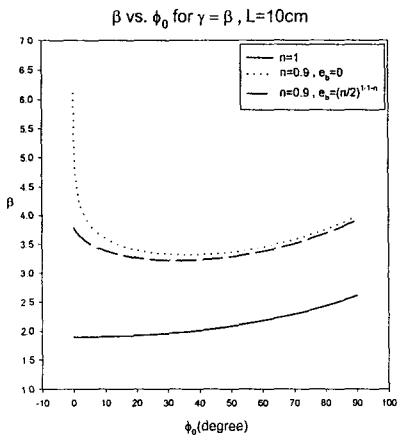


fig 5

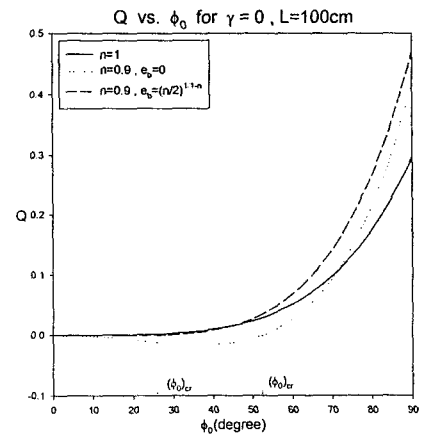


fig 8

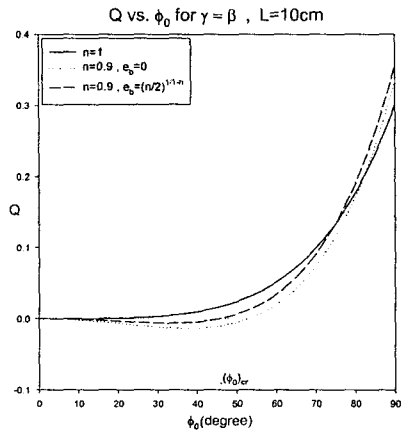


fig 6

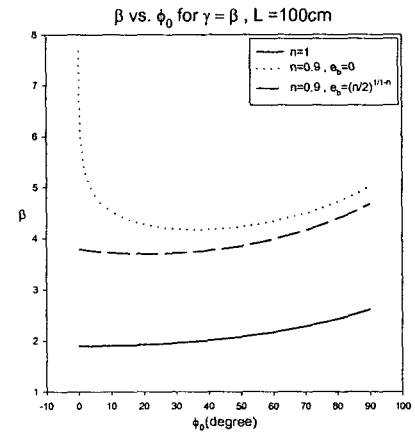


fig 9

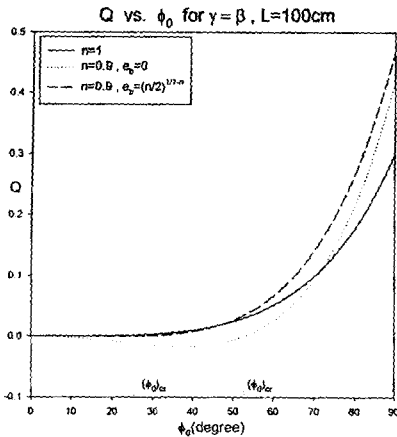


fig 10

위 그림들에서 알 수 있듯이 기둥의 길이에 따른  $\beta$  및  $Q$ 의 변화는 같은 경향을 나타낸다. 다만 주의해야 할 점은 그림 4, 6, 8, 10에서  $Q$ 의 값을 음수로 만드는  $\phi_0$ 의 값은 물리적으로 불안정한 해를 뜻한다는 것이다. 즉, 그림에 표기된  $(\phi_0)_c$  보다 작은 영역은 물리적으로 불안정하기 때문에 좌굴이 일어나지 않는 영역을 뜻하며,  $(\phi_0)_c$  보다 큰 값의  $\phi_0$ 를 가지도록 하는  $\beta$ 에서 만 좌굴현상이 일어나게 된다. 이러한 결과를 토대로 임계 좌굴하중과 임계 좌굴 각도를 구할 수 있는데 이를 표 1에 나타내었다.

$\beta_c, (\phi_0)_c$		$\beta$			
		4.2628	44.67	3.2561	45.72
Unmodified	L=10cm	4.2628	44.67	3.2561	45.72
	L=100cm	4.8328	26.59	3.7056	27.99
	L=10cm	4.4433	52.65	3.3806	52.98
	L=100cm	5.5938	52.65	4.2559	52.98

Table 1 critical load and angle for loading with different beam length L= 10, 100cm

표 1의 결과를 해석하여보면, L=10cm 일 때의 combined loading에서의 Unmodified Ludwick type의 경우 임계 하중 및 임계 좌굴각이

$\beta = 3.3806, \phi_0 = 52.98^\circ$  이란 뜻은 이 기둥에 좌

굴이 일어나려면  $\frac{PL^2}{EI} = 3.3806$  이상의 하중을 가해야 좌굴이 일어나며 이때의 후 좌굴 형상(post buckled shape)의 끝 처짐각도는 항상  $52.98^\circ$  보다 크다는 의미이다. 이는 대부분의 고분자 물질이 좌굴이 일어난 후에 형상이 왜 직선이 아닌 휘어진 형상 - 처짐각도도  $52.98^\circ$ 로 상당히 많이 기울어짐 - 이 되는가를 설명하는 강력한 증거가 된다. (선형탄성체의 경우 후 좌굴 후 끝처짐각이 취할 수 있는 범위는  $\phi_0 > 0$ 임을 그림 4, 6, 8, 10에서 확인할 것. 또한 이 사실은 구하여진 해를 elliptic integral로 변형한 뒤 에너지함수를 구함으로써 증명할 수도 있다) 또한, 표 1의 결과를 보면 조성방정식을 modified로 선택했을 경우 임계 좌굴각도가 기둥의 길이에 의존함에 비해 unmodified Ludwick type을 선택했을 때는 임계좌굴 각도가 길이에 의존하지 않고 일정한 값을 가짐을 알 수 있는데 이는 식 (1a)의 unmodified Ludwick type constitutive relation을 이용하여 식 (2)를 유도하면  $\epsilon_n = 0$ 이 되므로 아래와 같은 추가적인 normalization을 통해 길이의 효과를 완전히 배제시킬 수 있기 때문이다.

$$\beta = \frac{PL^{n+1}}{EI_n}, \gamma = \frac{wL^{n+2}}{EI_n}, I_n = \int_A |t|^{n+1} dA$$

#### 4. 결론

물성이 비선형 탄성인 복합재료/보강섬유에 대하여 modified/unmodified Ludwick type constitutive relation을 통하여 column의 좌굴현상을 나타내는 지배방정식을 유도하여 해를 구하고 해의 안정성을 나타내는 에너지함수를 유도하여 임계좌굴하중 및 임계 좌굴각도를 구하였다. 그 결과 고분자 물질의 좌굴현상에 대한 본질을 설명할 수 있었다. 또한, 조성방정식을 어떻게 택하느냐에 따라 임계 좌굴하중 및 임계좌굴각도와 길이의 의존성 여부를 판단할 수 있었다. 이와 같이 조성방정식의 차이는 좌굴현상 자체에 상당한 차이를 주며 이는 선형탄성체의 모델로는 설명할 수 없는 현상이다.

## 참고문헌

- (1) Timoshenko "Theory of Elastic Stability"
- (2) Kyung Woo Lee, "Large Deflections of cantilever beams of non-linear elastic material under combined loading" *International Journal of non-linear mechanics*, 37, 439-443 (2002)