

특이성을 가진 비선형 시스템에 대한 퍼지 제어

임기성, 정정주

한양대학교 전자통신전파공학과

전화 : 02-2298-5307 / 핸드폰 : 016-725-0994

Fuzzy Control of Nonlinear Systems with Singularity

Ki-Sung Lim, Chung Choo Chung

Dept. of Electronics Eng, Hanyang University

E-mail : sozzuck@scl.hanyang.ac.kr

Abstract

In nonlinear control fields, for irregular nonlinear systems, control form which consists of approximate tracking control law and exact tracking control law and which switches between two laws has been proposed recently.

In this thesis, we design new switching control law which connect approximate linearization control law and exact linearization control law by fuzzy rules for irregular nonlinear system, ball and beam system. Fuzzy switching controller designed by fuzzy concept is proved that designed scheme overcomes singularities of irregular system, improves unstability problem of switching procedure, and has more efficient control value through simulation. Stability of fuzzy control system proved by Lyapunov's stability theorems.

I. 서론

퍼지 제어기는 선형 제어기와 달리 제어대상의 차수나 비선형도에 관계없이 구현될 수 있다는 장점으로 큰 주목을 받아왔으나 안정성에 대한 검증이 미흡한 단점이 있었다. 그 후 Tanaka-Sugeno(TS) 퍼지 시스템 형태가 제안되면서 안정하기 위한 충분 조건이 Lyapunov direct method를 통해 제시되었다[2]. 이런 과정으로 퍼지 비선형 제어기를 병렬 분산 보상(PDC) 형태로 나타

낼 수 있게 되면서 제어기로서의 안정성을 검증할 수 있게 되었다[6].

비선형 시스템에 적용하는 제어 방법 중 피드백 선형화는 상태 피드백을 통한 선형화의 방법으로 비선형 시스템의 입출력 관계를 정확히 선형화 할 수 있는 방법으로 발전, 비선형 제어기 개발에 많은 연구결과를 가져온 분야이다[1]. Tomlin은 irregular한 비선형 시스템에 기존의 근사(approximate) 피드백 선형화법과 정확(exact) 피드백 선형화법을 스위칭 시키는 제어 방법을 사용하여, 시스템이 특이성(singularity)을 극복하고 안정성을 얻을 수 있음을 제안했다[3].

본 논문에서는 근사 추적 제어와 정확 추적 제어를 스위칭 시키는 방식을 변형하여, 퍼지 개념으로 가중치를 다르게 하는 smooth combination형태의 제어기를 만들었다. 이러한 새로운 스위칭 제어 방법을 구현하여 시스템의 특이성을 극복하는 동시에 스위칭을 통해 나타날 수 있는 불안정한 parameter를 개선시키는 효과를 얻고자 한다. 본 연구에서는 볼과 빔 시스템을 대상으로 하여 근사 추적 제어기와 정확 추적 제어기를 퍼지 룰로 병합시켜 적용시키는 새로운 스위칭 제어기를 설계하고 Lyapunov 안정성 이론을 통해 그 안정성과 타당성을 검증하려 한다.

II. 특이성에 대한 스위칭 제어

2.1 Ball and Beam system

볼과 빔에서 그림과 같이 공이 지울대가 상하로 움직

일 경우, 항상 저울대에 접촉된 상태를 유지하고 있다고 가정할 때 이 시스템의 dynamics는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= B(x_1 x_4^2 - G \sin x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= u \\ y &= x_1 - r_0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} B &= M/(J_b/R^2 + M) \\ G &: \text{중력가속도} \\ J_b &: \text{공의 관성모멘트} \\ M &: \text{공의 질량} \\ R &: \text{공의 반경} \end{aligned}$$

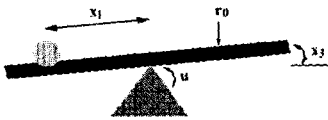


그림 1. Ball and Beam system

2.2 Tomlin의 Switching control law의 구조

구성된 볼 과 빔은 irregular system, 즉 시스템의 상대 차수가 일정하지 않게 나타난다. 정확 입출력 선형화를 이용하여 구현할 경우 $L_g L_f^2 f(x) = 2Bx_1 x_4$ 이므로, $x_1 x_4 = 0$ 인 경우 control law가 정의되지 않게 된다.

Tomlin은 $|x_1 x_4|$ 이 0에 가까워질 경우, 근사 입출력 선형화를 이용, 그 외 영역에서는 정확 입출력 선형화를 이용한 제어 법칙을 스위칭 하도록 설계하였다. 근사 입출력 선형화를 이용한 제어 법칙의 설계 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 \\ \xi_2 &= \xi_3 \\ \xi_3 &= \xi_4 + 2Bx_1 x_4 u^{app} \\ \xi_4 &= B(Bx_1 x_4^2 - BG \sin x_3)x_4^2 + BGx_4^2 \sin x_3 \\ &\quad + (2Bx_2 x_4 - BG \cos x_3)u^{app} \end{aligned} \quad (2)$$

$$u^{app} = \frac{[-B(Bx_1 x_4^2 - BG \sin x_3)x_4^2 - BGx_4^2 \sin x_3 + v]}{(2Bx_2 x_4 - BG \cos x_3)} \quad (3)$$

$$v = y_D^{(4)} - \sum_{i=1}^4 \alpha_i (\xi_i - y_D^{(i-1)}) \quad (4)$$

또한 정확 입출력 선형화를 이용한 control law의 설계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 \\ \lambda_2 &= \lambda_3 \\ \lambda_3 &= Bx_2 x_4^2 - BGx_4 \cos x_3 + 2Bx_1 x_4 u^{ex} \\ \lambda_4 &= u^{ex} \end{aligned} \quad (5)$$

$$u^{ex} = \frac{[-Bx_2 x_4^2 + BGx_4 \cos x_3 + v]}{2Bx_1 x_4} \quad (6)$$

$$v = y_D^{(3)} - \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\xi_i - y_D^{(i-1)}) \quad (7)$$

이 때의 α_i 는 $s^4 + \alpha_4 s^3 + \alpha_3 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1$ 와 $s^3 + \alpha_3 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1$ 를 hurwitz하게 만족하는 상수로써 시스템을 안정화시키도록 설계된 parameter이다.

2.3 특이성에 대한 퍼지 제어

볼 과 빔 dynamics를 퍼지 추론식에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} R_1 : \text{ IF } |x_1 x_4| \gg \delta \\ \text{ THEN } \dot{x} = f_1(x) + g_1(x)u \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} R_2 : \text{ IF } |x_1 x_4| \ll \delta \\ \text{ THEN } \dot{x} = f_2(x) + g_2(x)u + d_2(x) \end{aligned} \quad (9)$$

정확 입출력 선형화와 근사 입출력 선형화를 통하여 transformation해 주면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_1 : \text{ IF } x \in M_0 \\ \text{ THEN } \lambda = A_1 \lambda + B_1 v_1 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} R_2 : \text{ IF } x \in M_+, M_- \\ \text{ THEN } \xi = A_2 \xi + B_2 v_2 + D\lambda(\xi)\xi \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,

$$D(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_4^2 \\ \frac{BG^2 \cos^2(\arcsin(\xi_3/(-BG)))}{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

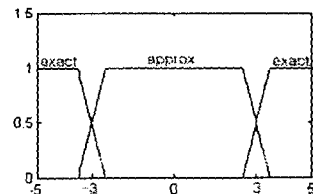


그림 2. 퍼지 소속 함수

이 때 제어 법칙의 경계를 결정하는 δ 와 소속 함수의 기울기가 이 제어 법칙을 결합시키는 design parameter로 작용한다.

III. 퍼지 스위칭 시스템의 안정도 조건

3.1 퍼지 시스템의 점근적 안정성

정리 1.(참고문헌 [5]) 선형 시스템이 다음과 같이 주어졌을 때,

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + D\Delta(\xi)\xi \quad (13)$$

피드백 제어 이론에 따라 $u = -K\xi$ 를 대입하면,

$$A_c^T P + PA_c + \epsilon PP + \frac{1}{\epsilon} (D\Delta)^T (D\Delta) < 0 \quad (14)$$

위의 algebraic Riccati inequality가 $\epsilon > 0$ 에서 양의 대칭 행렬(positive-definite symmetric matrix) P를 가지면 V이 음의 값을 갖게되므로 시스템이 점근적 안정하다고 말할 수 있다. 여기서, $A_c = A - BK$ 이고, stable matrix이다.

3.2 퍼지 Lyapunov 함수의 정의와 membership function의 제한

가중치가 적용된 dynamics를 다음과 같이 표현한다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i - B_i K_i)x(t) \quad (15)$$

여기서, $h_i(z(t))$ 는 각각 rule에 대해 정규화된 weight 이다. 즉, $h_i(z(t)) \geq 0$ 이고, $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ 이다. Lyapunov 함수 $V(x(t))$ 의 시간 도함수는 다음과 같다.

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\bar{x}^T(t)P_i x(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \times \{ \bar{x}^T(t)P_i x(t) + x^T(t)P_i \dot{x}(t) \} \quad (16)$$

식(15)를 대입하면,

$$\sum_{\rho=1}^r \bar{h}_{\rho}(z(t))P_{\rho} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \times \{ A_{ij}^T P_i + P_i A_{ij} \} < 0. \quad (17)$$

와 같이 정리되고, 여기서 $A_c = A - BK$ 이다.

위의 퍼지 Lyapunov 함수에서 $\bar{h}_{\rho}(z(t))$ 를 일반적인 수치 해석 방법으로 구하기 어려우므로, upper bound로 식(18)과 같이 대치하여 수학적으로 본다.

$$|\bar{h}_{\rho}(z(t))| \leq \phi_{\rho} \quad (18)$$

위 식에서 ϕ_{ρ} 를 작은 값을 선택할수록 좋다. 즉, if-then rule 사이를 느리게 스위칭 시킬수록 시스템이 더 안정할 수 있다. 그러나, 페루프 시스템의 응답 속도를 고려한다면 빠른 스위칭이 필요하므로, 안정도와 응답 속도는 상호 보완적인 관계에 있다. 본 논문에서는 LMI(Linear Matrix Inequalities)문제로 전환하여 양의 대칭 행렬 P를 구할 수 있는 범위내의 소속함수를 정하여 퍼지 스위칭 시스템을 시뮬레이션 하고, 안정성을 고찰한다.

IV. Simulation

4.1 퍼지 스위칭을 이용한 simulation에서 error와 control에 대한 성능 검증

기준 입력 신호는 스위칭이 일어날 수 있도록 $2.3\sin(1.3t)$ 로 조절하고, 결과를 Tomlin 논문에서 제시한 스위칭 제어 방법 결과와 비교하였다. 이 때 비퍼지 스위칭과 퍼지 스위칭의 결과는 둘 다 기준 신호를 비교적 큰 차이 없이 tracking 하는 결과를 보인다.

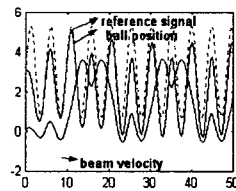


그림 3. 비퍼지 스위칭

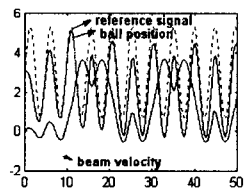


그림 4. 퍼지 스위칭

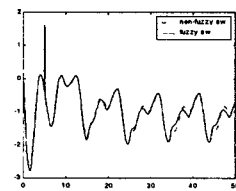


그림 5. error값 비교

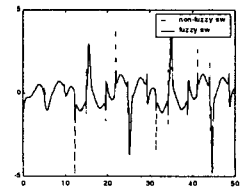


그림 6. 제어입력값 비교

그림 5, 6은 기준 입력신호에 일시적인 (T=5 sec) disturbance를 가했을 때 error와 control에 대한 영향과 성능이 어떻게 달라지는지 보았다.

이 때 error값은 큰 차이를 보이지 않았지만, 제어 입력 값의 경우에는 비퍼지 스위칭에서 불안정하게 급변하는 현상이 두드러짐을 볼 수 있다. 이런 제어 값은 실제 시스템에서는 구현 불가능한 제어 값을 가정할 수도 있고, 구동부에도 치명적인 영향을 미칠 수 있으며, unmodelled dynamics를 excite시킬 경우 시스템의 안정성을 깨뜨릴 수 있는 가능성을 지닌다.

4.2 퍼지 Lyapunov 함수의 시간 응답

입력의 초기 조건에 대해서 정확, 근사 입출력 선형화 각각의 Lyapunov 함수의 시간 응답 곡선을 보고, 퍼지 소속 함수에 의해서 가중치가 달라질 때, 어떻게 달라지는지를 보았다.

$$V_1(x(t)) = \lambda^T P_1 \lambda \{ |x_1 x_4| \gg \delta \}$$

$$V_2(x(t)) = \xi^T P_2 \xi \{ |x_1 x_4| \ll \delta \}$$

위와 같이 구간에 따라 Lyapunov 함수를 다르게 구하고, 퍼지 스위칭을 하는 구간에서는 Lyapunov 함수를 $V = h_1 \lambda^T P_1 \lambda + h_2 \xi^T P_2 \xi$ 로 잡아서 시뮬레이션 해 보았다.

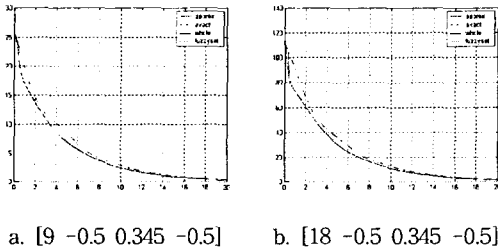


그림 5.20 초기값에 따른 Lyapunov 함수의 시간 응답 곡선

그림 5.20 에서 정확 입출력 선형화와 근사 입출력 선형화에 서 초기값에 대해 Lyapunov 함수가 단조 감소 하다는 것을 알 수 있을 뿐 아니라, 각각을 퍼지 제어 기법을 이용하여 가중치를 다르게 하여 스위칭 하였을 때의 Lyapunov 함수도 단조 감소하여 시스템이 안정할 수 있다는 것을 알 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 비선형 시스템의 특이성을 극복하기 위해 영역에 따라 제어 방법을 달리하여 퍼지 개념으로 두 제어 방법을 병합시키는 새로운 스위칭 제어 방법을 구

현하였다. 이 스위칭 제어 방법은 기존의 성능과 다름없이 시스템의 특이성을 극복하는 동시에 스위칭을 통해 나타날 수 있는 불안정한 요소를 개선시키고, 제어 값에서도 효율적인 효과를 보였다. 또한, Lyapunov 안정성 이론을 통하여 안정하기 위한 조건을 알아보았다. 이런 결과는 여러 가지 제어 방법이 적용되어야 하는 시스템에서 각각 다른 제어기들의 스위칭 되는 순간의 불안정한 상태 값으로부터, 퍼지 개념을 통한 결합으로 그 불안정한 영향을 개선시킬 수 있는 가능성을 보여주는 하나의 예시가 된다.

이 논문은 2001년 한양대학교 교내연구비 지원으로 연구 되었음.

참고문헌

- [1] S. Sastry, *Nonlinear Systems Analysis, Stability, and Control*, Springer, New York, 1999.
- [2] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, pp. 135-156, 1992.
- [3] C. J. Tomlin, "Switching through singularities," *Systems & Control Letters*, vol. 35, pp. 145-154, 1998.
- [4] H. O. Wang, K. Tanaka and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues," *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, vol. 4 no. 1, February 1996.
- [5] Y. Guo, D. J. Hill, Z. Jiang, "Global nonlinear control of the ball and beam system," *35th Conference on Decision and Control*, pp. 2818-2823, 1996
- [6] K. Tanaka, T. Hori, H. Wang, "New parallel distributed compensation using time derivative of membership functions: A fuzzy Lyapunov approach," *40th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3942-3947, 2001.
- [7] S. Boyd *et al.*, "Linear matrix inequalities in systems and control theory," SIAM, Philadelphia, PA (1994).
- [8] Matlab LMI Control Toolbox, The Mathworks.