

동역학이 고려된 두 대 로봇의 가속도 타원 해석

이지홍*, 이원희**

충남대학교 메카트로닉스공학과

전화 : 042-821-7783 / 핸드폰 : 011-9939-5568

Acceleration ellipsoid of two cooperating robots with the limits of joint torques

Jihong Lee*, Wonhee Lee**

Dept. of Mechatronics Engineering, Chung-nam National University

E-mail : (*)jihong@cnu.ac.kr, (**)s_wonhee@cnu.ac.kr

Abstract

A mathematical framework for deriving acceleration bounds from given joint torque limits of two cooperating robots are described in this paper. Especially when the torque limits are given in 2-norm, the resultant geometrical configuration is ellipsoid(the ellipsoid is often called manipulability ellipsoid in many works). At first, the mathematical derivation starts from the dynamics of both object and robots as well as the kinematics of the robots, and is finally arranged in a form of equation relating joint torques to object acceleration through a complete constraint contact(or "very-soft contact"). To show the usefulness of the proposed method, two examples are included, and especially the case where friction effects the ellipsoid shape is also considered in the example.

I. 서론

로봇 조작도 해석은 로봇의 각각의 관절을 움직이는 actuator로부터 얻어지는 로봇의 운동 결과를 분석하는 연구를 총칭한다. 실제 로봇이 가지고 있는 구동 장치는 모터의 회전 각도의 제한, 회전 각 속도의 제한, 토크의 제한 등으로 인해 일정한 구동 능력의 한계를 갖고 있다. 주어진 제약조건 하에서 로봇이 움직일 수 있는 영역, 속도 영역, 가속도 영역을 구하여 로봇을 사용하는 파트에서 적절한 로봇을 선택하고 로봇이 특정 물체를 회피하여 운동하거나 특정 위치에 로봇 팔 끝이 빠르게 도달하도록 경로 계획을 하는데 사용된다.

현재까지 로봇 조작도 해석은 기구학적 조건에 의하여 로봇이 특정 자세에서 가질 수 있는 속도, 가속도

영역에 대한 해석이 주로 이루어졌다[1]. 또한 로봇 손끝이 물체와 접촉하고 있는 조건에 따라 hard contact, soft contact, very soft contact으로 나누고, 로봇이 가진 관절 수와 로봇이 움직이는 공간의 수에 따라 여유 자유도, 적합 자유도, 부족 자유도로 나누어 각각의 경우에 대하여 로봇이 일정한 영역의 토크를 물체에 가했을 때 물체가 가지는 속도, 가속도 영역을 구하는 연구가 진행되어 왔다[2]. 그리고 기구학적 조건에서 벗어나 동역학을 고려한 로봇의 속도, 가속도 영역을 구하는 연구가 이루어지고 있다[3].

본 논문에서는 회전 관절로만 구성된 여러 대의 로봇이 하나의 물체를 잡고 있는 시스템에 대하여 동역학을 고려하여 조작도 해석을 할 것이다. 첫 번째로 주어진 각 관절을 구동하는 구동장치가 가진 토크의 한계에 대해 로봇이 잡고 있는 물체 중심의 가속도 영역을 구하는 방법을 제안하고자 한다. 두 번째로 로봇과 물체 사이에 발생하는 마찰력을 고려하여 물체 중심의 가속도 범위를 얻어내는 방법을 제안하고자 한다.

본 논문에서 제안하는 방법은 다음과 같다. 첫 번째, 토크에 대한 물체 중심의 가속도를 구하기 위하여 여러 대의 로봇이 very soft contact으로 물체를 잡고 있는 시스템에 대한 동역학식을 구한다. 그리고 토크와 물체 중심의 가속도의 관계식을 유도한다. 마지막으로 $\|t\|_2$ [4]로 제한된 토크에 대한 물체 중심의 가속도 범위를 구한다. 두 번째, 연구 대상을 실제 시스템에 가깝게 설정하기 위하여 마찰력을 고려하였을 때는 물체와 로봇 사이에 발생하는 마찰력을 고려하여 동역학식을 만들고 토크에 대한 물체 중심의 가속도로 변환하여 2-norm solution으로 제한된 토크에 대한 물체 중심의 가속도 범위를 구한다.

2-norm solution은 각 관절 토크의 제곱을 합한 값을 제한하는 구속 조건을 부여하여 가속도 영역을 구하는 방법으로 이렇게 구한 가속도 영역은 타원을 띄게 된다.

본 논문은 한국과학재단 기초과학연구사업 (과제 : R05 -2003-000-10215-0)의 지원 하에 이루어졌음.

II. 여러 대 로봇의 동역학식

1.1 물체 동역학식

하나의 물체를 m 대의 로봇이 잡고 있을 때, 물체 중심의 움직임을 나타내는 변수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\dot{\phi} = [\dot{r}^T \quad \dot{\omega}^T]^T \in R^6 \quad (1)$$

단, $\dot{r} (\in R^3)$ 은 물체의 직선 가속도, $\dot{\omega} (\in R^3)$ 은 물체의 회전 가속도이다.

그리고 각 로봇의 손끝이 물체에 힘과 모멘트를 모든 방향으로 전달할 수 있는 very soft contact 조건을 갖는다고 가정하면, 로봇의 손끝이 물체에 가하고 있는 힘(f_i)과 모멘트(n_i)는 다음으로 표시된다[2].

$$f_o = \sum_{i=1}^m f_i + m_o g \in R^3 \quad (2)$$

$$n_o = \sum_{i=1}^m (n_i + p_i \times f_i) \quad (3)$$

물체 중심의 움직임을 동역학식으로 나타내면 다음과 같다.

$$I_o \ddot{\phi} + Q_o = Q \in R^6 \quad (4)$$

단, I_o 는 물체의 관성항, Q_o 는 중력 및 회전 속도에 관련된 항이다.

$$I_o = \begin{bmatrix} m_o E_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \in R^{6 \times 6} \quad (5)$$

$$Q_o = (-m_o g^T \quad \{\omega \times (I\omega)\}^T)^T \in R^6 \quad (6)$$

그리고 I 는 물체의 관성 모멘텀(momentum)이고, m_o 는 물체의 질량, E_3 는 3×3 단위 행렬이다.

1.2 로봇의 동역학식

로봇의 동역학식을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \tau_i &= M_i(q_i) \ddot{q}_i + V_i(q_i, \dot{q}_i) + J_i^T(q_i) F_i \\ &= M_i \ddot{q}_i + J_i^T F_i + V_i \in R^6 \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (7)$$

여기에서 M 은 관성항이고, V_i 는 전항력, 원심력, 중력항의 합이다. 로봇이 정지($\dot{q}_i = 0$)하고 있다고 가정하면 중력항만 남게 된다. $M_i(q_i) \ddot{q}_i$ 는 로봇이 스스로 움직이기 위해 사용하는 토크이고, $J_i^T(q_i) F_i$ 은 로봇이 물체에 가하는 토크이다.

토크와 물체 중심의 가속도간의 관계식을 구하기 위해서는 우변의 \ddot{q} (로봇 손끝의 가속도)과 F (로봇이 물체에 전달하는 힘)를 $\dot{\phi}$ (물체 중심의 가속도)으로 변환하는 과정이 필요하다.

(a) \ddot{q} 과 $\dot{\phi}$ 의 관계

기준좌표계에서 물체 무게중심점까지의 위치 벡터를 r , 물체의 중심좌표계에서 로봇 손끝까지의 위치 벡터를 p_i , 그리고 기준좌표계에서 로봇 손끝까지의 위치 벡

터를 h_i 라 하면 $r + p_i = h_i$ 의 관계가 성립한다. 이들의 속도 가속도 관계는 처음에 제시한 접촉 조건에 의해 물체와 로봇의 접촉점에서 각속도가 없게되므로 ($\omega = 0$) 다음과 같이 표현된다.

$$h_i = \dot{r} \quad (8)$$

$$\dot{h}_i = \dot{\omega} \times p_i + \ddot{r} \quad (9)$$

따라서, 로봇 손끝의 가속도는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\ddot{h}_i = [E_3 \quad -P_i] \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = [E_3 \quad -P_i] \dot{\phi} \quad (10)$$

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & -p_{i3} & p_{i2} \\ p_{i3} & 0 & -p_{i1} \\ -p_{i2} & p_{i1} & 0 \end{bmatrix}$$

여기서 물체의 무게 중심의 회전가속도와 로봇 손끝의 회전가속도($\ddot{\rho}_i$)는 접촉 조건에 의해 같기 때문에 로봇 손끝의 가속도(\ddot{x})는 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{x}_i = \begin{bmatrix} \ddot{h}_i \\ \ddot{\rho}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3 & -P_i \\ 0 & E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = B_v \ddot{\phi} \quad (11)$$

로봇 관절의 회전가속도와 손끝의 속도는 $\dot{x}_i = J_i \dot{q}_i$ 의 관계를 같기 때문에 결론적으로 물체 중심의 가속도와 로봇 각 관절의 회전가속도는 다음의 관계가 성립한다.

$$\dot{x}_i = B_v \dot{\phi} = J \dot{q}_i \quad (12)$$

(b) F , Q , $\dot{\phi}$ 의 관계

로봇 손끝이 물체에 가하고 있는 힘($F = [f \quad n]^T$)과 물체의 무게중심이 받고 있는 힘(Q)은 다음과 같은 관계를 가진다. 로봇이 물체에 가하고 있는 힘은

$$f = \sum f_i \quad (13)$$

초기 접촉 조건에 의해 임의의 방향으로 모멘트가 가해질 수가 있으므로 다음처럼 정리된다.

$$Q_i = \sum_{i=1}^m (n_i + p_i \times f_i) = \sum_{i=1}^m [P_i \quad E_3] \begin{bmatrix} f_i \\ n_i \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$Q = \begin{bmatrix} f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3 & 0_3 & E_3 & 0_3 & \dots & E_3 & 0_3 \\ P_1 & E_3 & P_2 & E_3 & \dots & P_m & E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ n_1 \\ \vdots \\ f_m \\ n_m \end{bmatrix} = WF \quad (15)$$

위 (12)식에 (4)식을 적용하여 F 에 관해 나타내면

$$F = W^* Q + N(W) \epsilon_F \quad (16)$$

이때 $W^* Q$ 는 로봇이 물체에 힘을 주어서 물체의 운동으로 나타나는 힘이고, $N(W) \epsilon_F$ 는 로봇이 힘을 주되 물체의 운동으로 반영이 되지 않는 힘이다.

1.3 로봇 동역학식과 물체 동역학식의 합

초기 토크 값을 $\tau_0 = [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_m]^T$ 라 하면 (5)식은 다음과 같이 간단히 표현될 수 있다.

$$\tau = M\ddot{q} + J^T F + \tau_0 \quad (15)$$

적합 자유도의 경우에 대해 (10)식의 $\dot{x}_i = J\dot{q}_i$ 에서 $\ddot{q}_i = J^{-1}\ddot{x}_i$ 가 성립하므로 위 (15)식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tau = MJ^{-1}\ddot{x} + J^T F + \tau_0 \quad (16)$$

초기 물체가 갖고 있는 속도가 없으며, 중력이 작용하지 않는다($Q_0=0$)고 가정하고 위 (16)식에 (10)식 $\dot{x}_i = B_v\dot{\phi}$ 과 (14)식 $F = W^*(I_o\dot{\phi}) + N(W)\epsilon_F$ 을 적용하면, 로봇 동역학식에 물체의 동역학식을 결합한 식을 얻을 수 있다.

$$\tau = MJ^{-1}B_v\dot{\phi} + J^T(W^*(I_o\dot{\phi}) + N(W)\epsilon_F) + \tau_0 \\ = [MJ^{-1}B_v + J^T W^* I_o \quad J^T N(W)] \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \epsilon_F \end{bmatrix} + \tau_0 \quad (17)$$

토크가 물체의 중심 가속도에 주는 영향을 파악하기 위하여 위 식에서 bias 항을 0으로($\tau_0=0, \epsilon_F=0$)하면 식은 다음과 같이 간단해진다.

$$\tau = [MJ^{-1}B_v + J^T W^* I_o] \ddot{\phi} = A\ddot{\phi} \quad (18)$$

로봇의 관절 토크가 $\|d\|_2 \leq 1$ 로 제한되었을 때, (19), (20)식에 의해 로봇이 토크를 가했을 때 발생하는 물체 중심의 가속도를 타원으로 만들 수 있다[4].

$$\|d\|_2 = \sqrt{\tau^T \tau} \quad (19)$$

$$\tau^T \tau = (A\ddot{\phi})^T (A\ddot{\phi}) = \ddot{\phi}^T (A^T A) \ddot{\phi} \quad (20)$$

2. 제한된 자세와 마찰력이 고려된 동역학식



그림 1. 로봇의 마찰력과 물체의 가속도 관계

마찰력이 고려되었을 때 두 대의 로봇의 손끝이 그림 1과 같이 물체를 잡고 있다고 가정한다. 물체가 y축으로 $\ddot{\phi}_y$ 의 가속도를 가지며 운동을 하면 물체를 잡고 있는 로봇은 x축으로 y축의 가속도에 비례하는 힘으로 눌러서 마찰력을 키워야 물체가 로봇 손끝에서 미끄러지지 않고 유지가 될 것이다.

물체의 무게 중심이 갖는 y축으로의 가속도가 다음의 관계식을 가질 때 물체와 로봇 손끝이 서로 미끄러지지 않는다.

$$m_o \ddot{\phi}_y = \mu F_x^1 + \mu F_x^2 \quad (21)$$

단, F_x^i 는 i번째 로봇이 x축으로 물체에 주는 힘이다. 마찰력은 작용 반작용에 의해 다음 식이 된다.

$$F_x^1 = F_x^2 = \frac{m_o \ddot{\phi}_y}{2\mu} \quad (22)$$

로봇이 물체에 가한 힘은 물체가 움직이는 힘과 마찰력의 합으로 나타나므로 식 (16)의 $N(W)\epsilon_F$ 은 F_x^i 로 대체된다.

$$F_i = W^* Q + F_x^i = W^* Q + \frac{m_o \ddot{\phi}_y}{2\mu} = W^* Q + \overline{\mu} \ddot{\phi} \quad (23)$$

$$\overline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_o}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

그래서 식 (17)은 다음과 같이 된다. ($\tau_0=0$)

$$\tau = MJ^{-1}B_v\dot{\phi} + J^T(W^* Q + \overline{\mu} \ddot{\phi}) + \tau_0 \\ = [MJ^{-1}B_v + J^T(W^* I_o + \overline{\mu})] \ddot{\phi} \quad (24)$$

III. 적용 예

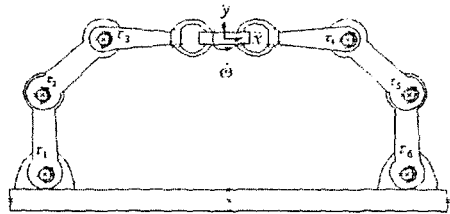


그림 2. 3축 협동 로봇

그림 2와 같이 3축을 가진 두 대의 로봇이 very soft

contact의 접촉 조건으로 질량이 m_o 인 물체를 잡고 있다.

본 장에서는 로봇의 각 관절의 토크가 $\|d\|_2 \leq 1$ 으로 제한되었을 때 첫 번째 예로 물체가 운동할 수 있는 직선 가속도(힘)와 회전 가속도(모멘텀)의 범위를 구하기 위해 가속도 값 중 좌표 공간에서의 외각 점을 추출하여 물체 중심의 가속도 타원을 형성한다. 그리고 두 번째 예로 마찰력을 고려한 동역학식 (20)을 이용하여 가속도 타원을 형성한다.

1. 마찰력이 고려되지 않은 가속도 타원

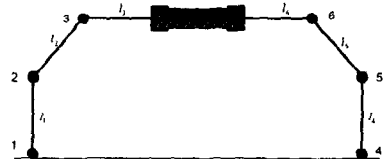


그림 3. 협동 로봇 시스템

로봇	관절 각도(단위:°)	$\theta_1 = 90, \theta_2 = -45, \theta_3 = -45$ $\theta_4 = 90, \theta_5 = 45, \theta_6 = 45$
	링크의 질량(단위:kg)	$m_{1,2,3,4,5,6} = 1$
물체	링크의 길이	$l_{1,2,3,4,5,6} = 1$
	질량(단위:kg)	$m_o = 1$
	길이(단위:m)	$l_o = 1$

표 1. 로봇과 물체 정의

그림 3의 자세로 로봇이 물체를 잡고 있을 때, 물체가

갖는 최대 허용 가속도는 다음과 같은 타원형으로 나타난다.

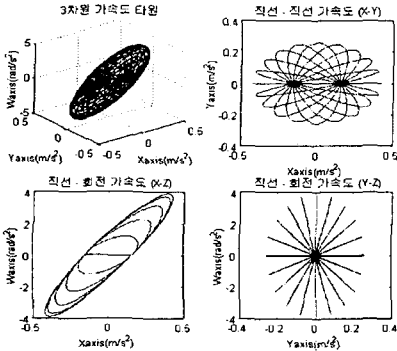


그림 4. 가속도 타원

로봇의 직선-직선 가속도 타원을 보면 x축보다 y축의 가속도가 더 크다. 이는 이 자세에서 x축보다 y축으로 보다 적은 힘으로 쉽게 움직일 수 있다는 것이다.

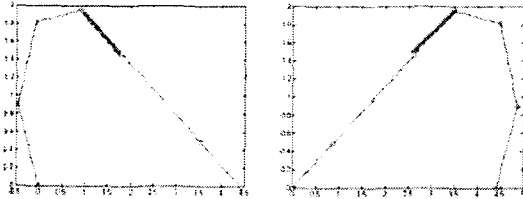


그림 5. 로봇의 자세

직선 - 회전 가속도(X-Z)는 그림 5와 같이 물체가 x축의 (+)방향으로 이동할 때 왼쪽 로봇은 팔을 펴고 오른쪽 로봇은 팔을 안으로 구부리며 물리나는 형상을 띄게 되어 물체의 각 가속도는 (+)가 되고, 반대로 물체가 x축의 (-)방향으로 이동할 때 왼쪽 로봇은 뒤로 물러나며 팔을 구부리고 오른쪽 로봇은 팔을 펴고 앞으로 누는 형상을 띄게 되어 물체의 각 가속도는 (-)가 된다.

2. 마찰력이 고려된 가속도 타원

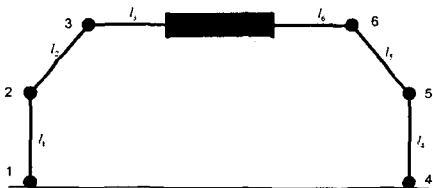


그림 6. 마찰이 고려된 협동 로봇 시스템

마찰을 고려하지 않았을 때를 solid(-)로 그리고 마찰 계수 0.1로 하여 마찰을 고려했을 때, dashed(-)로 가속도 타원을 그리면 그림 7과 같이 마찰력이 고려된 물체의 가속도 타원이 y축 방향으로 줄어든 형상을 띄게 된다.

물체의 y축 가속도가 증가하면 미끄러지지 않기 위해서 y축 가속도에 비례하여 x축으로 힘을 주어야 로봇 손끝이 미끄러지지 않고 물체를 따라갈 수 있다. 그런데 로봇이 가질 수 있는 토크가 제한되어 있기 때문에 결국

물체가 가질 수 있는 y축 방향의 가속도가 줄어들게 된다.

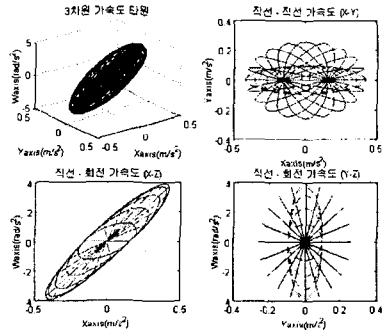


그림 7. 마찰이 고려된 가속도 타원

IV. 결론

본 논문은 회전 관절로 구성된 두 대의 로봇이 하나의 물체를 잡고 있는 시스템에 대하여 동역학적으로 운동식을 만들었다. 이 동역학식을 로봇의 토크와 물체의 중심 가속도의 관계식으로 표현하여 제한된 토크의 영역에서 물체의 중심 가속도의 변화를 알 수 있도록 수학적으로 정리하였다. 그리고 로봇과 물체 사이에 발생하는 마찰력을 고려하여 물체 중심의 가속도 범위를 얻어내는 방법을 제안하였다. 그리고 그 방법으로 구한 가속도 타원이 지닌 의미를 분석하였다.

본 논문에서 복수 개의 로봇의 협동 작업에 대하여 동역학적으로 조작도 해석이 가능하게 하였으며, 이전 연구에서보다 연구 대상을 실제 시스템에 가깝게 설정하기 위하여 마찰력을 고려한 동역학적 조작도의 해석을 연구하였다. 이 결과로 인해 조작도 해석이 보다 실제 시스템에 사용할 수 있는 연구로 한 걸음 나아가게 되었다.

참고 문헌

- [1] T. Yoshikawa, "Analysis and Control of Robot Manipulators with Redundancy", Robotics Research, eds. M.Brady and R. Paul, MIT Press, Cambridge, MA, 1984, pp. 735-747.
- [2] Jihong Lee, "Velocity Workspace Analysis for Multiple Arm Robot Systems." Robotica vol. 19, no. 5, vol. 5, pp. 581-591, Sep, 2001
- [3] Tsuneco Yoshikawa, "Manipulability of robotic mechanisms," The International Journal of Robotics Research, vol. 4, no. 2, 1985, Also appearing Robotics Research, The Second International Symposium.
- [4] Yoshihiko Nakamura, "Advanced Robotics : Redundancy and Optimization", Addison-Wesley Publishing Company, p30-41, 1991