

# 동적 제약 조건하에서 두 대 로봇이 공동으로 잡고 나르는 물체의 최대 가속도 범위 해석

이 지 흥, 심 형 원  
충남대학교 메카트로닉스공학과  
전화 : 042-821-7783 / 핸드폰 : 011-9402-3381

## Acceleration Bounds of Cooperating Two Robots under Dynamical Constraint

Jihong Lee\* and Hyungwon Shim\*\*  
Dept. of Mechatronics Engineering, Chungnam National University  
E-mail : jihong@cnu.ac.kr\* , s\_shw@cnu.ac.kr\*\*

### Abstract

In this paper, dynamic constraints are considered for the analysis of manipulability of robotics systems comprised of two cooperating arms. Given bounds on the torques of joint actuators for each robot, the purpose of this study is to derive the bounds of task acceleration of object carried by the system. Under the assumption of complete constraint contact, a set of examplar polytope describing acceleration bounds of two cooperating robots are included.

### I. 서론

로봇에 대한 최근의 많은 연구는 한 대의 로봇이 단순히 작업 대상체에 작업을 수행하도록 하는 상황에서 벗어나 여러 대의 로봇이 하나의 물건을 잡았을 때 발생하는 상황이나 여러 개의 다리로 바닥을 지지하여 걷거나 뛰는 상황 등 실질적으로 한 대 이상의 로봇이 하나의 시스템 안에서 동작하는 그런 분야의 연구가 많이 이루어지고 있다.[3,4]

로봇 조작도 해석이란 로봇의 관절을 구동하는 모터 등의 액츄에이터에 주어진 운동 능력(회전 속도, 회전 토크 등)을 로봇 손끝의 운동 능력(속도, 가속도 등)으로

변환시켜 그 결과를 분석하는 연구 내용을 총칭한다. 현재까지 여러대 로봇의 조작도 해석에 대한 연구는 기구학적 방법에 의해 로봇 시스템의 속도 등을 해석하는 수학적 방법을 정립화시키는 단계[2,3]까지 도달해 있다. 반면 동역학적 방법을 이용한 여러대 로봇 시스템의 가속도나 힘 등을 해석하는데는 로봇의 움직임에 관여하는 많은 요소들과 기구학적 제약 조건들로 인해 수학적으로 정립화시키지 못하고 있기 때문에 실제 시스템을 구현하는데 많은 어려움이 있다. 따라서 더욱 진보된 로봇 시스템을 구현하기 위해서는 이 분야에 대한 연구가 무엇보다 필요하다. 이런 이유로 본 논문에서는 이 연구의 일환으로 로봇 조작도 해석 중 회전 관절로만 구성된 두 대의 3축 로봇의 관절에 일정한 범위의 회전토크를 주었을 때 로봇의 동역학적 특성에 따라 로봇 팔끝이 잡고 있는 물체가 움직일 수 있는 최대 허용 가속도의 범위를 구하는 동역학식을 유도하였으며, 이 식을 Jihong Lee의 minimum  $l_{\infty}$ - norm solutions[3]을 이용하여 가속도 범위를 나타내는 다각형을 구하는 예제를 통해 유도한 동역학식을 검증해 보았다.

### II. 여러 대 로봇의 동역학식

#### 2.1 물체 동역학식

m 대의 로봇이 하나의 물체를 잡고 있다고 하고, 물체의 움직임을 나타내는 변수를 다음과 같이 정의하였다.

$$\ddot{\phi} = [\dot{r}^T \quad \dot{\omega}^T]^T \quad (1)$$

그리고 m대의 각 로봇의 손끝이 잡고 있는 물체에 모든 방향으로 힘과 모멘트를 전달할 수 있다고 가정하면(이런 접촉 조건을 very soft contact이라 명명한다[3]), 물체에 가하고 있는 힘( $f_i$ )과 모멘트( $n_i$ )는 다음과 같이

본 논문은 한국과학재단 기초과학연구사업(과제 : R05-2003-000-10215-0)의 지원하에 이루어졌음.

표시할 수 있다.

$$f_o = \sum_{i=1}^m f_i + m_o g \quad (2)$$

$$n_o = \sum_{i=1}^m (n_i + p_i \times f_i) \quad (3)$$

이 물체의 움직임을 기술하는 동력학식은

$$I_o \ddot{\phi} + Q_o = Q \quad \left( I_o = \begin{bmatrix} m_o E_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right. \quad (4)$$

$$\left. Q_o = (-m_o g^T \{ \omega \times (I \omega) \}^T)^T \right)$$

이 되며, 여기서  $I_o$ 는 물체의 관성항이고  $Q_o$ 는 중력 및 회전 속도에 관련된 항이다. 이 안의 기호 중에서  $I$ 는 물체의 관성 모멘텀을,  $m_o$ 는 물체의 질량을,  $E_3$ 는  $3 \times 3$  단위 행렬을 나타낸다.

### 2.2 로봇의 동역학식

로봇의 동력학식을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \tau_i &= M_i(q_i) \ddot{q}_i + V_i(q_i, \dot{q}_i) + J_i^T(q_i) F_i \\ &= M_i \ddot{q}_i + J_i^T F_i + V_i \end{aligned} \quad (5)$$

$i = 1, 2, \dots, m$

위 (5)식은 행렬꼴로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ M_2 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & M_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_1^T & 0 & \dots & 0 \\ J_2^T & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & J_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} \quad (6)$$

$M$ 은 관성항이고,  $V_i$ 는 전향력, 원심력, 중력항의 조합으로 이루어진다. 여기서 로봇이 정지( $\dot{q}_i = 0$ )하고 있다고 가정하면 중력항만 남는다. 그리고 로봇이 손끝으로 외부에 가하고 있는 힘이  $F_i \left( = \begin{bmatrix} f_i \\ n_i \end{bmatrix} \in R^6 \right)$ 이다.

로봇 관절에 주어지고 있는 토크( $\tau$ )의 제약 조건으로부터 물체의 허용 운동 가속도( $\ddot{\phi}$ )의 범위를 구하기 위해 이 식의 우변  $\ddot{q}$ (로봇 관절의 회전 가속도)와  $F$ 를  $\ddot{\phi}$ 로 변환하는 과정이 필요하다.

#### A. $\ddot{q}$ 과 $\ddot{\phi}$ 의 관계

기준좌표계에서 물체 무게중심점까지의 위치 벡터를  $r$ , 물체의 중심좌표계에서 로봇 팔끝까지의 위치 벡터를  $p_i$ , 그리고 기준좌표계에서 로봇 팔끝까지의 위치 벡터를  $h_i$ 라 하면  $r + p_i = h_i$ 의 관계가 성립한다. 이들의 속도 가속도 관계는 처음에 제시한 접촉 조건에 의해 물체와 로봇의 접촉점에서 각속도가 없게되므로( $\omega = 0$ )

$$\dot{h}_i = \dot{r} \quad \ddot{h}_i = \dot{\omega} \times p_i + \ddot{r} \quad (7)$$

로 표시된다. 위 (7)식으로부터 로봇 팔끝의 가속도는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\ddot{h}_i = [E_3 \quad -P_i] \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = [E_3 \quad -P_i] \ddot{\phi}$$

$$\text{단, } P_i = \begin{bmatrix} 0 & -p_{i3} & p_{i2} \\ p_{i3} & 0 & -p_{i1} \\ p_{i2} & p_{i1} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 물체의 무게 중심의 각가속도와 로봇 팔끝의 각가속도( $\ddot{\rho}_i$ )는 접촉 조건에 의해 같기 때문에 로봇 팔끝의 가속도( $\ddot{x}$ )는 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{x}_i = \begin{bmatrix} \ddot{h}_i \\ \ddot{\rho}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3 & -P_i \\ 0_3 & E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = B_v \ddot{\phi} \quad (9)$$

로봇 관절의 각가속도와 팔끝의 속도는  $\dot{x}_i = J_i \dot{q}_i$ 의 관계를 갖기 때문에 결론적으로 물체 중심의 가속도와 로봇 각 관절의 각가속도는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\ddot{x}_i = B_v \ddot{\phi} = J \ddot{q}_i \quad (10)$$

#### B. $F$ , $Q$ , $\ddot{\phi}$ 의 관계

로봇 팔끝이 물체에 가하고 있는 힘( $F = [f \ n]^T$ )과 물체의 무게중심이 받고 있는 힘( $Q$ )은 다음과 같은 관계를 가진다. 로봇이 물체에 가하고 있는 힘은

$$f = \sum f_i \quad (11)$$

초기 접촉 조건에 의해 임의의 방향으로 모멘트가 가해질 수가 있으므로 다음처럼 정리된다.

$$Q_i = \sum_{i=1}^m (n_i + p_i \times f_i) = \sum_{i=1}^m [P_i \quad E_3] \begin{bmatrix} f_i \\ n_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$Q = \begin{bmatrix} f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3 & 0_3 & E_3 & 0_3 & \dots & E_3 & 0_3 \\ P_1 & E_3 & P_2 & E_3 & \dots & P_m & E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ n_1 \\ \vdots \\ f_m \\ n_m \end{bmatrix} = W F \quad (13)$$

위 (13)식에 (4)식을 적용하여  $F$ 에 관해 나타내면

$$F = W^* (I_o \ddot{\phi} + Q_o) + N(W) \epsilon_F \quad (14)$$

$W^*$ 는  $W$ 의 pseudoinverse이고,  $\epsilon_F$ 는 임의의 벡터이다.

#### C. 로봇 동력학식과 물체 동역학식의 결합

초기 토크값을  $\tau_0 = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_m]^T$ 라 하면 (5)식은 다음과 같이 간단히 표현될 수 있다.

$$\tau = M \ddot{q} + J^T F + \tau_0 \quad (15)$$

적합 자유도[3]의 경우에 대해 (10)식의  $\ddot{x}_i = J \ddot{q}_i$ 에서

$\ddot{q}_i = J^{-1}\ddot{x}_i$ 가 성립하므로 위 (15)식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tau = MJ^{-1}\ddot{x} + J^T F + \tau_0 \quad (16)$$

초기 물체가 갖고 있는 속도가 없으며, 중력이 작용하지 않는다( $Q_0=0$ )고 가정하고 위 (16)식에 (10)식  $\ddot{x}_i = B_v \ddot{\phi}$ 과 (14)식  $F = W^*(I_o \ddot{\phi}) + N(W)\epsilon_F$ 을 적용하면, 로봇 동역학식에 물체의 동역학식을 결합한 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau &= MJ^{-1}B_v \ddot{\phi} + J^T(W^*(I_o \ddot{\phi}) + N(W)\epsilon_F) + \tau_0 \\ &= [MJ^{-1}B_v + J^T W^* I_o \quad J^T N(W)] \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \epsilon_F \end{bmatrix} + \tau_0 \end{aligned} \quad (17)$$

### III. 예제 적용

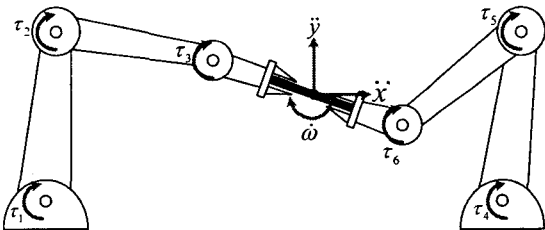


그림 1. 협조 작업하는 두 대의 3축 로봇

적합 자유도(물체의 위치와 자세를 로봇의 자유도에 의해 결정 가능)를 가진 2대의 로봇이 그림 1과 같이 질량  $M$ 인 하나의 물체를 very soft contact의 접촉 조건으로 잡고 있을 때 이 물체가 운동할 수 있는 직선 가속도(힘)와 회전 가속도(모멘텀)의 범위를 II장에서 구한 동역학 식을 통하여 구하는 것이 본 장의 내용이다.

로봇의 각 관절에 가해지는 토크에 대해 초기 토크값  $\tau_0=0$ 라하고 II장에서 구한 동역학식을 정리하면

$$\tau = [MJ^{-1}B_v + J^T W^* I_o \quad J^T N(W)] \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \epsilon_F \end{bmatrix} \quad (18)$$

과 같이 표현할 수 있다. (18)식으로부터 물체의 운동 가속도  $\ddot{\phi}$ 를 구하기 위해 각 관절에 걸리는 토크를  $|\tau_i| \leq \tau_{max}$ 로 제한하였으며,  $|\tau_i| \leq 1$  즉 minimum  $l_\infty$ -norm(무한대놈) solutions[3]을 적용하였다. 여기서 최대 허용 가속도의 범위를 구하기 위해 가속도 값 중 좌표 공간에서의 외각 점을 추출하여 물체 중심의 가속도에 대한 조각도 다면체와 다각형을 형성한다.

### 3.1 형상 I

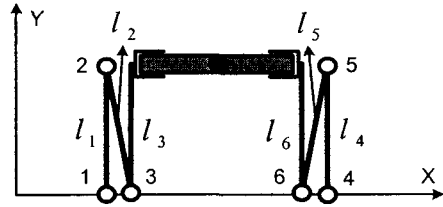


그림 2. 형상 I

로봇	관절 각도(단위:°)	$\theta_1=90, \theta_2=-179, \theta_3=179$ $\theta_4=90, \theta_5=179, \theta_6=-179$
	링크의 질량(단위:kg)	$m_{1,2,3,4,5,6}=1$
	링크의 길이(단위:m)	$l_{1,2,3,4,5,6}=1$
물체	질량(단위:kg)	$m_o=1$
	길이(단위:m)	$l_o=1$

표 1. 로봇과 물체 정의

그림 2와 같은 자세로 로봇이 물체를 잡고 있다고 가정했을 때 물체가 갖는 최대 허용 가속도는 다음과 같은다면, 다각형으로 나타낸다.

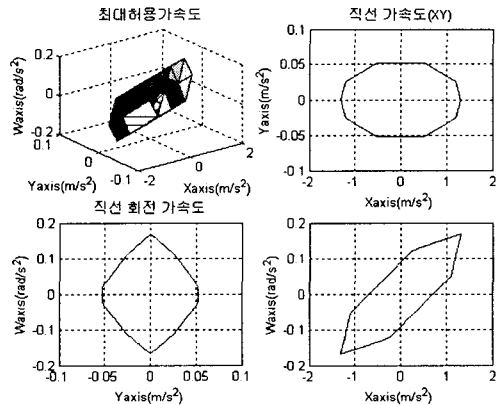


그림 3. 형상 I에 대한 가속도 공간에서의 조각도 다각형

형상 I을 물리적 직관으로 살펴보면 로봇과 물체의 접촉 조건에 의해 3,6번 링크와 물체가 'c'자 형태의 하나의 프레임의 형태를 형성한다. 프레임의 형상과 로봇의 위치, 자세를 고려하면 각 관절이 변하더라도 물체의 회전이 작게 일어남을 예측할 수 있다. 또한, 로봇이 취하고 있는 자세에 의해 각 관절이 각도가 조금만 변해도 물체가 x축 방향으로 쉽게 움직일 수 있는 반면 y축 방향에 대해서는 각 관절 각도가 많이 변한다해도 조금밖에 움직일 수 없다는 사실을 예측할 수 있다. 이런 물리적 직관과 실제 동역학식을 통하여 얻은 시뮬레이션의 결과가 일치함을 그림 3을 통해 알 수 있다.

### 3.2 형상 II

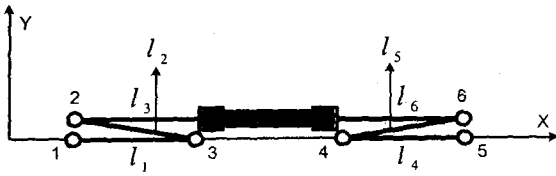


그림 4. 형상 II

형상 II는 형상 I에서 물체를 잡는 방향만을 달리한 것으로 로봇의 각 관절각은  $\theta_1=0, \theta_2=179, \theta_3=-179, \theta_4=180, \theta_5=-179, \theta_6=179$ (단위:°)이다.

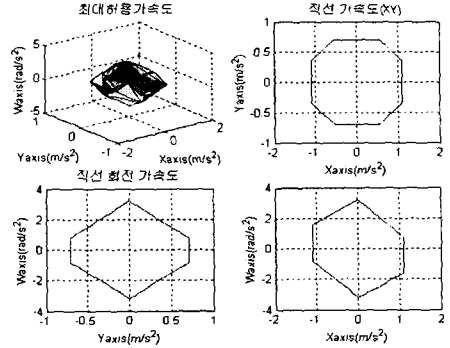


그림 7. 형상 III에 대한 속도 공간에서의 조각도 다각형

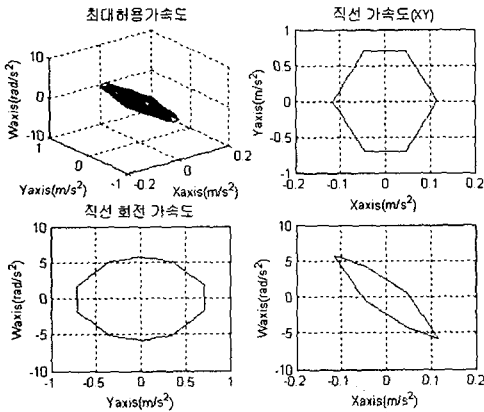


그림 5. 형상 II에 대한 속도 공간에서의 조각도 다각형

형상 II는 형상 I과 달리 3,6번 링크와 물체가 '—' 형태의 하나의 막대 형상을 하고 있어, 각 관절각이 조금만 변해도 물체의 회전이 크게 일어남을 예측할 수 있다. 또한 로봇의 자세와 위치를 고려하면 형상 I와 반대로 y축 방향으로 잘 움직일 수 있음을 예측할 수 있다. 이 물리적 직관에 의한 예측 결과와 시뮬레이션의 결과가 일치함을 그림 5를 통해 알 수 있다.

### 3.3 형상 III

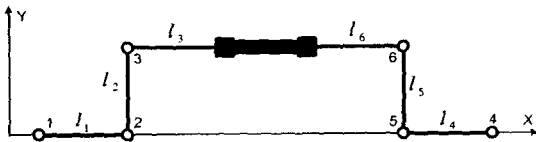


그림 6. 형상 III

## IV. 결론

본 논문은 2대의 로봇이 각 액츄에이터에 주어지는 구동기 제약 조건(각 관절에 걸리는 토크) 하에서 질량  $M$ 인 하나의 물체를 잡고 있을 때 로봇과 물체의 접촉 조건 및 자유도를 고려하여 이 물체가 운동할 수 있는 직선 가속도(힘)와 회전 가속도(모멘텀)의 범위를 구하는 수학적 체계에 대한 내용을 다루었다. 또한, 최종적으로 유도된 동역학식이 물리적으로 납득할 수 있는 결과를 산출한다는 사실을 예제를 통해 확인하였다.

본 논문의 연구 결과로부터 첫 번째로 다각 보행 로봇의 동력학 조각도 해석으로 연구를 확장시킬 수 있으며, 둘째로 마찰 개념을 도입한 여러 로봇의 물체 운반 문제로 확장시킬 수 있다. 더 나아가 여러 개의 손가락으로 물건을 집는 상황의 동력학적 해석으로 확장 연구할 수 있다고 판단된다.

## 참고 문헌

- [1] Tsuneo Yoshikawa, "Manipulability of robotic mechanisms," The International Journal of Robotics Research, vol. 4, no. 2, 1985, Also appearing Robotics Research, The Second International Symposium.
- [2] Antonio Bicchi, Claudio Melchiorri, and Daniele Balluchi, On the Mobility and Manipulability of General Multiple Limb Robots, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 11, no. 2, 1995, pp. 215-228.
- [3] Jihong Lee, "Velocity Workspace Analysis for Multiple Arm Robot Systems." Robotica vol. 19, no. 5, vol. 5, pp. 581-591, Sep, 2001
- [4] Insoo Ha and Jihong Lee, "Analysis on a minimum Infinity-norm solution for kinematically redundant manipulators," Trans. on Control, Automation, and System Engineering, vol 4. no. 2, Jun., 2002.