

# 상태지연을 갖는 2차 시스템의 LQ-PID 제어기 동조

권 호 제, 서 병 설  
한양대학교 전기공학과

전화 : 02-2290-0364 / 핸드폰 : 016-255-3243

## LQ-PID Controller Tuning For Second Order Systems with State delay

Ho Je Kwon, Byung Suhl Suh  
Dept. of Electrical Engineering, Hanyang University  
E-mail : ihoje@ihanyang.ac.kr

### Abstract

This paper presents an optimal robust LQ-PID controller design method for the second-order systems with state delay to satisfy the design specification in time domain. The Sensitivity approach concept is utilized for its optimization.

### I. 서론

산업 공정에서, 임의의 한 시스템의 다른 부분들 사이에서 정보나 물질의 전송 시, 시간 지연이 발생하는 제어공정시스템, 운송시스템, 통신시스템, 그리고 전자기 시스템이 시간지연 시스템의 전형적인 예라고 할 수 있다<sup>[1]</sup>. 이러한 시간 지연은 상태 지연과 입력지연으로 나뉘며, 상태 지연 시스템은 특성 방정식에 포함되어 지연요소에 의해서 무한개의 극점들을 갖는 무한 차원의 시스템으로서, 시스템의 안정도 해석에 있어서 차원의 시스템에 비해 상대적으로 어렵다. 제어에 지연이 발생하는 입력 지연 시스템은 많은 산업에서 종종 접하게 되는데, 유압장치(Hydraulic actuator)사이의 전달 지연이 이에 해당된다. 입력 지연 시스템을 제어하는 간단한 방법은 예측기(predictor)를 이용하여 지연의 영향을 제거하는 것이므로 인해 유한 차원 시스템에 대하여 개발된 제어를 사용할 수 있다. 이러한 개념에 근거한 방법 중의 하나로 Smith Predictor를 들 수 있다. 위와 같은 시간 지연의 발생은 시스템의 안정도나 성능 상 심각한 악화를 가져올 수 있기 때문에, 그에 대해

강인성을 보장하는 제어기 구현이 필요하다.

실제 산업공정에서는 구조가 간단하고 기술자들에게 친숙한 PID 제어기가 많이 사용되어지고 있기 때문에, 강인 제어를 설계하기 위한 노력으로 최적 강인 설계 이론을 PID 제어기에 접목시키려는 연구가 있었다.

입력 지연이 있는 시스템에 대한 연구로는, He<sup>[2]</sup> 등이 입력 지연을 갖는 1차 시스템에 대하여 시간 영역에서 최적 PI/PID 제어기를 설계하는 방법을 제시하였으며, Suh<sup>[3]</sup> 등은 입력 지연을 갖는 2차 시스템에 대하여, LQR 구조로 제어기를 설계하여 최적화는 물론 강인성을 보장시키는 LQ-PID 제어기 설계방법을 제안하였다.

본 논문에서는 상태 지연을 갖는 2차 시스템에 대해, Jamshidi<sup>[4]</sup> 등이 제안한 Sensitivity approach 개념을 도입하고, 또한, LQR구조로 PID 제어기를 해석하여 최적화는 물론 강인성을 보장시키며, 시간영역에서 주어진 설계사양을 만족시킬 수 있는 제어기 설계방법을 제안한다.

### II. Sensitivity Approach

다음의 2차 시스템을 고려하자.

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a_1 \frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) + b_1 \frac{d}{dt}y(t-h) + b_0y(t-h) = u(t) \quad (1)$$

여기서,  $y(t)$ 는 출력변수,  $u(t)$ 는 제어변수, 그리고,  $a_1, a_0, b_1, b_0$ 는 플랜트 계수이다. 초기조건  $\frac{d}{dt}y(t_0), y(t_0), t_0 - h \leq t \leq t_0$ 는 정의되어진다.

출력변수에 적분요소를 첨가시킨 새로운 상태 변수

를 도입하면 상태변수  $x(t)$ 는 다음과 같다.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t y(\tau) d\tau \\ y(t) \\ -\frac{d}{dt} y(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

식(1)은

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + Du(t) \quad (3)$$

여기서,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_0 & -b_1 \end{bmatrix}$ ,

$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  이고, 식(4)와 같은 초기조건식이 주어진다.

$$x(t) = \psi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0 \quad (4)$$

LQR로 해석하기 위해서 식(5)와 같은 2차 가격함수를 고려하자.

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (5)$$

여기서  $Q$ 는 양의 반한정(positive semi-definite) 대칭행렬인 상태가중행렬이고,  $R$ 은 양의 한정(positive definite)대칭행렬인 제어가중행렬이다.

시스템(3)을 제약조건으로 하면서, 가격함수(5)를 최소화하는 최적제어법칙을 얻기 위해서,

$$J^* = J + \int_{t_0}^{t_f} p^T [Ax(t) + Bx(t-h) + Du(t)] dt \quad (6)$$

의 1차 변분

$$\delta J^*(\delta x(t), \delta x(t-h), \delta u(t)) = 0 \quad (7)$$

을 만족하는 식이 필요하다.

그에 따라 Hamiltonian  $H$ 는 아래와 같이 정의하고,

$$H(x, p, u) = \frac{1}{2} [x^T Q x + u^T R u] + p^T [Ax(t) + Bx(t-h) + Du(t)] \quad (8)$$

아래와 같은 조건식이 얻어진다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + Du(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (9)$$

$$\dot{p}(t) = -Qx(t) - A^T p(t) - B^T p(t+h), \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (10)$$

$$= -Qx(t) - A^T p(t), \quad t_f - h \leq t \leq t_f \quad (11)$$

$$u(t) = -R^{-1} D^T p(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (12)$$

식(9)-(12)를 살펴보면, 식(10),(11)에서 보듯, 시간  $t_f - h$ 를 기준으로 두 구간으로 나뉘어서 수식을 표현한 것을 볼 수 있는데, 이를 통해, 두 구간 사이에서 얻어지는 최적가격함수의 형태가 다르게 나타남을 알 수 있다. 그리고, 식(10)에서 보듯이,  $p(t+h)$ 와 같은

미래의 시간을 의미하는 항이 나타나게 되는데, 그것은 위의 조건식을 이용해서 일반적인 최적제어법칙을 적용할 수가 없음을 의미한다.

그래서, 식(3),(4)와 같은 시스템에 대해서 최적제어법칙을 얻기 위해 Jamshidi<sup>[4]</sup>등이 제시한 Sensitivity Approach 개념을 이용하고자 한다.

Jamshidi등은 최적화에 근접하는 제어기 구현을 위해 민감도 매개변수(Sensitivity parameter)  $\epsilon$ 을 갖는  $u(t, \epsilon)$ 의 MacLaurin급수를 사용했으며, 지연이 없는 시스템에서의  $x^{(0)}$ ,  $p^{(0)}$ 를 구해서 그것으로부터 무한 급수의 계수를 얻었다.

최적제어법칙  $u(t)$ 를 얻기 위해서, 식(9)-(12)와 유사한 형태를 갖는, 민감도 매개변수를 포함하는 조건식을 도입하자.

$$\dot{x}(t, \epsilon) = Ax(t, \epsilon) + \epsilon Bx(t-h, \epsilon) + Du(t, \epsilon), \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (13)$$

$$\dot{p}(t, \epsilon) = -Qx(t, \epsilon) - A^T p(t, \epsilon) - \epsilon B^T p(t+h, \epsilon), \quad t_0 \leq t \leq t_f - h \quad (14)$$

$$= -Qx(t, \epsilon) - A^T p(t, \epsilon), \quad t_f - h \leq t \leq t_f \quad (15)$$

$$u(t, \epsilon) = -R^{-1} D^T p(t, \epsilon), \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (16)$$

$$x(t, \epsilon) = \psi(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (17)$$

$$p(t_f, \epsilon) = 0 \quad (18)$$

식(13)-(18)은  $\epsilon$  ( $0 \leq \epsilon \leq 1$ )에 대해서,  $\epsilon = 1$ 일 때 기존의 조건식(9)-(12)과 동일하게 되며,  $\epsilon = 0$ 일 때 아래의 형태로 변화하게 된다.

$$\dot{x}^{(0)} = Ax^{(0)}(t) + Du^{(0)}(t) \quad (19)$$

$$\dot{p}^{(0)} = -Qx^{(0)}(t) - A^T p^{(0)}(t) \quad (20)$$

$$u^{(0)}(t) = -R^{-1} D^T p^{(0)}(t) \quad (21)$$

$$x^{(0)}(t_0) = \psi(t_0), \quad p^{(0)}(t_f) = 0 \quad (22)$$

위에서 보듯이,  $x(t-h)$ 와  $p(t+h)$ 항이 소거되어 식(19)-(22)에 대해서 해를 얻을 수 있으며, 여기서 얻어지는  $x^{(0)}$ ,  $p^{(0)}$ 등은 최적제어에 근접하도록 반복적으로  $u^{(i)}$ 값을 구하고자 할 때 초기값과 같은 역할을 한다고 할 수 있다.

$\epsilon$ 항을 포함하는 식(13)-(18)을 이용해서, 최적제어법칙을 얻기 위해서,  $u(t, \epsilon)$ ,  $x(t, \epsilon)$ ,  $p(t, \epsilon)$ 가 식(23),(24),(25)와 같이  $\epsilon=0$ 에서 무한히 미분이 가능하다고 가정하자.

$$u(t, \epsilon) \approx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} u^{(i)}(t) \quad (23)$$

$$x(t, \epsilon) \approx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} x^{(i)}(t) \quad (24)$$

$$p(t, \epsilon) \approx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} p^{(i)}(t) \quad (25)$$

그러면,  $u^*(t)$ 는 식(23)에서  $\epsilon=1$ 일 때의 계수  $u^{(i)}(t)$ 를 결정함으로써 얻어지며, 임의의  $N$ 차 항까지를 고려하고자 할 경우, 식(23)의 무한 급수를  $N$ 차 항까지

취함으로서 얻어진다.  $i=1$ 일 때 나타나는 조건식은 식(26)-(31)과 같이 나타난다.

$$x^{(1)}(t) = Ax^{(0)}(t) + Bx^{(0)}(t-h) - DR^{-1}D^T p^{(1)}, \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (26)$$

$$p^{(1)}(t) = -Qx^{(1)}(t) - A^T p^{(1)}(t) - B^T p^{(0)}(t+h), \quad t_0 \leq t \leq t_f-h \quad (27)$$

$$= -Qx^{(1)}(t) - A^T p^{(1)}(t), \quad t_f-h \leq t \leq t_f \quad (28)$$

$$u^{(1)}(t) = -R^{-1}D^T p^{(1)}(t) \quad (29)$$

$$x^{(1)}(t_0) = 0 \quad (30)$$

$$p^{(1)}(t_f) = 0 \quad (31)$$

조건식(26)-(31)은 새로운 경계치 조건식이 되며, 여기서,  $x^{(0)}(t-h)$ 와  $p^{(0)}(t+h)$ 는 조건식(19)-(22)의 해를 얻음으로써 얻어지는 항이다. 식(26)-(31)로부터  $u^{(1)}(t)$ 의 해를 얻기 위해서,

$$p^{(1)}(t) = Kx^{(1)}(t) + g_1(t) \quad (32)$$

로 두자. 여기서,  $g_1(t)$ 는 지연 요소에 의해 발생하는 항들을 고려하기 위해서 도입된 adjoint vector로서, 식(32)와 (26),(27),(28)에 의해서 얻어지는 조건식은 아래와 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} & \dot{g}_1 + (A^T - KD R^{-1} D^T) g_1 \\ & + KB x^{(0)}(t-h) + B^T p^{(0)}(t+h) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_f-h \quad (33) \\ & \dot{g}_1 + (A^T - KD R^{-1} D^T) g_1 + KB x^{(0)}(t-h), \quad t_f-h \leq t \leq t_f \quad (34) \end{aligned}$$

또한,  $p^{(1)}(t_f) = 0$  와 식(32)로부터

$$g_1(t_f) = 0 \quad (35)$$

이 성립함을 알 수 있다. 따라서, 식(33),(34),(35)로부터 각 구간에 대하여  $g_1(t)$ 을 얻을 수 있게 된다. 이렇게 얻은  $g_1(t)$ 는 식(26),(32)에 의해서  $x^{(1)}(t)$ 을 구하는 데 이용되며,  $p^{(1)}(t)$ ,  $u^{(1)}(t)$ 도 얻어진다.

동일하게  $g_2(t)$ ,  $x^{(2)}(t)$ ,  $p^{(2)}(t)$ ,  $u^{(2)}(t)$ 의 경우, 식(13)-(18)을  $\epsilon$ 에 대해 두 번 미분하여 얻어진 조건식으로부터, 앞서 언급한 방법으로 얻을 수 있다.

위와 같이 임의의  $u^{(i)}(t)$ 는

$$u^{(i)}(t) = -R^{-1}D^T(Kx^{(i)}(t) + g_i(t)) \quad (34)$$

의 형태가 되며, 식(23),(24)로부터 식(35)가 얻어진다.,

$$u(t, \epsilon) = -R^{-1}D^T[Kx(t, \epsilon) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} g_i(t)] \quad (35)$$

임의의  $N$ 차 항까지의 최적제어법칙은,

$$u(t, \epsilon) = -R^{-1}D^T[Kx(t, \epsilon) + \sum_{i=1}^N \frac{\epsilon^i}{i!} g_i(t)] \quad | \quad \epsilon=1 \quad (36)$$

가 되며, 구현되는 제어기의 형태는 그림1.과 같이 표현되어진다.

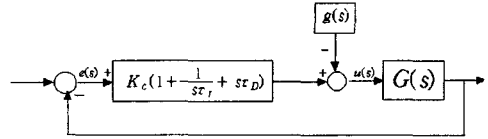


그림1. 구현된 제어기

### III. LQ-PID 제어기

Sensitivity Approach 개념으로부터 얻어지는 제어기의 형태는 상태 피드백 항과 시간 지연의 영향을 고려하여 부가적인 이득으로 표현되는 피드포워드 항이 결합된 형태로 나타나기 때문에 상태 피드백 항을 LQ-PID 제어기로 구현할 수 있다.

식(36)은  $u(t) = -Gx(t) - g(t)$ 로 쓸 수 있고,

$$u_1(t) = -Gx(t), \quad u_2(t) = g(t) \quad (37)$$

로 두자. 상태 피드백 부분  $u_1(t)$ 를 살펴보면, 제어 이득  $G$ 는

$$G = R^{-1}D^TK \quad (38)$$

이다. 여기서,  $K$ 는 양의 한정 대칭행렬로서, 다음의 Riccati식의 해가 된다.

$$A^TK + KA - KD R^{-1}D^TK + Q = 0 \quad (39)$$

단,  $K$ 는

$$K = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{10} & K_{20} \\ K_{10} & K_{11} & K_{21} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (40)$$

피드백 항을 계산하면,  $u_1(t)$ 는 식(41)과 같은 PID제어기 형태가 되며,

$$u_1(t) = -\frac{1}{R} \left( K_{22} \frac{d}{dt} y(t) + K_{21} y(t) + K_{20} \int y(t) dt \right) \quad (41)$$

또한, 기존의 PID 제어기 형태는 다음과 같다.

$$u_1(t) = -K_c \left( y(t) + \tau_D \frac{d}{dt} y(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (42)$$

식(41)과 (42)를 비교하면, 이득  $K_{ij}$ 와 동조 파라미터인  $K_c$ ,  $\tau_I$ ,  $\tau_D$  사이의 관계를 알 수 있다. 상태가중행렬  $Q$ 를 식(43)과 같이 두고,

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{00} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Riccati 식 (39)에 대입하면, PID동조 파라미터를 구하기 위한  $K$ 를  $Q$ 와  $R$ 에 대한 관계식으로 나타낼 수 있으며,  $Q$ 와  $R$ 의 선정은 Suh가 제안한 것처럼, 고려되어진 목표함수의 특성다항식과 폐루프 시스템의 특성다항식 사이의 계수 일치율을 통해 이루어진다. 얻어진  $Q$ ,  $R$ 값은 Riccati 식에 의해 제어이득  $K_{ij}$ 를 선정하는데 쓰이며, PID제어기 동조 계수는  $K_{ij}$ 와의 관계로부터 얻어진다.

#### IV. 예제

다음의 상태 방정식을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

시간영역에서의 설계사양인 정착시간은 입력크기의 약  $\pm 0.01\%$  이내에 안정화되는 시간으로 설정하여  $t_s=2$ 로 주어졌으며,  $p=0.9$ ,  $r=1.4122$ 로 주어졌다.

$w_n$ 에 대한 정규화된 그래프로부터  $t_{ms}=14$ 를 얻을 수 있으며, 요구되어지는 정착시간을 만족하기 위해  $w_n=7$ 로 정할 수 있다. 그리고,  $R=1$ 로 결정하면,  $Q, K$ 값을 아래와 같이 얻어진다.

$$Q = \begin{bmatrix} 117649 & 0 & 0 \\ 0 & 7782.4 & 0 \\ 0 & 0 & -188.5942 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 34535 & 1177 & 343 \\ 1177 & 2 & 100 \\ 343 & 100 & 2 \end{bmatrix}$$

따라서, 제어기의 상태 피드백 항에 해당되는 PID 제어기의 계수는 아래와 같이 나타나게 된다.

$$[K_p, K_i, K_d] = [100 \ 343 \ 2]$$

시간지연의 영향을 고려하는 피드포워드 항  $g(t)$ 은 식 (33),(34),(35)와 같이 최종시간의 경계 조건 식으로부터 거꾸로 계산하여 얻어지는데, 여기서는  $N=1$ 일 때의 값을 수치적인 방법을 이용하여 두 구간에 대하여 얻을 수 있다. 위와 같은 과정에 의해서 구현되는 제어기에 의해서 얻어지는 응답곡선은 그림2. 와 같다.

구현된 제어기에 의해 얻어지는 응답 곡선은 요구되어지는 설계 사양과는 달리 정착시간이 2.7초 정도로 나옴을 확인 할 수 있다. 본 논문에서는  $N=1$  일 때의 항까지 값을 취해서 얻어진 응답이므로, 얻어지는  $N$ 의 차수가 늘어날수록 설계사양을 만족하는 응답을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

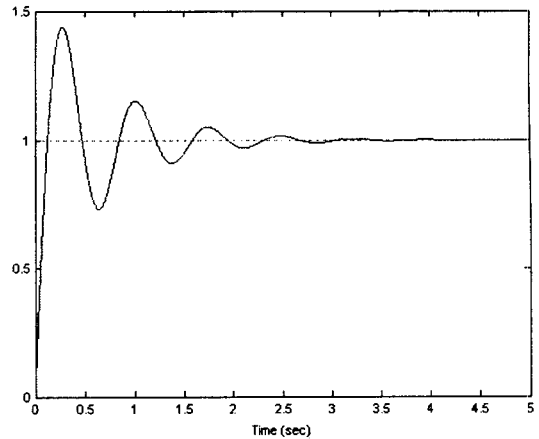


그림2. 구현된 제어기의 단위계단 응답

#### V. 결론

본 연구는 상태 지연이 있는 2차 시스템에 대해, Jamshidi 등이 제안한 Sensitivity Approach 개념을 이용하였으며, 시간 영역에서의 설계사양을 만족시키기 위해서 LQ-PID 제어기 동조 방법을 도입하였다.

#### [참고문헌]

- [1] Y. S. Moon, "Robust Control of Time-delay Systems Using Linear Matrix Inequalities", Ph. D. dissertation, School of Electrical Engineering, Seoul National University, Seoul, Korea, 1998.
- [2] J. B. He, Q. G. Wang and T. H. Lee, "PI/PID controller tuning via LQR approach". *Chemical Engineering Science*, Vol. 55, No. 13, pp. 2429-2439, 2000.
- [3] T. S. Park and B. S. Suh, "LQ-PID Controller Tuning for a Second-Order System with Time-Delay", *대한전자공학회 추계학술대회*, pp. 67-70, December, 2002
- [4] M. Jamshidi and M. Malek-Zavarei, "Suboptimal design of Linear control systems with time delay", *Proc. of the IEE*, Vol.119, pp. 1743-1746, 1972.
- [5] B. Suh, "Tuning of PID Regulator for a Second Order System via LQR Approach", *15th International Conference on Electrical Machines*, Brugge Belgium, 25-28, August 2002.
- [6] D. H. Eller, J. K. Aggarwal and H. T. Banks, "Optimal Control of Linear Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-14, No 6, pp. 678-687, 1969.