시간지연 특이시스템의 관측기 기반 H_∞ 제어기 설계

김 종 해
선문대학교 전자정보통신공학부
전화 : 041-530-2352 / 핸드폰 : 016-213-1729

Observer-based H_∞ Controller Design for Delayed Singular Systems

Jong Hae Kim
Division of Electronics, Information, and Communication Eng., Sunmoon University
E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr

Abstract

In this paper, observer-based H_∞ controller design method for singular systems with time-varying delay by just one LMI condition is presented. The sufficient condition for the existence of controller and the controller design method are presented by one perfect LMI approach. The design procedure involves solving an LMI. Since the obtained condition can be expressed as an LMI form, all variables including feedback gain and observer gain can be calculated simultaneously by Schur complement and changes of variables.

I. 서론

대부분의 상태공간에서 제어이론을 적용하기 위해서는 비선형 형태의 미분방정식이나 차분방정식으로 표현된 모델이 필요하다. 하지만 비선형 방정식을 적절한 방법으로 선형화하면 흔히 특이시스템(singular systems)에 직면하게 된다. 대부분 제어기 설계시에는 이런 특이치 현상을 피하기 위해 제약조건을 주거나 시스템을 변화시켜 원래의 다이나믹스를 무시한 채 제어기를 설계한다. 따라서 불확실성이나 모델링 오차 등이 증가하여 실제 적용에서도 예상치 못한 임펄스(impulse)나 히스테리시스(hysterisys)등의 물리적 현상이 일어나고 이것들은 기존의 상태공간 모델로는 적절히 다룰 수가 없다. 결국 특이치 시스템을 다룰 경우 많은 자연현상의 동특성을 포함할 수 있다. 최근 특이시스템에 연구가 활발히 진행되고 있다[1-6] 하지만 대부분의 특이시스템에 대한 연구결과가 상태궤환에 대해 집중되어 있다. 또한, 출력궤환에 대한 연구결과들은 2개의 대수 리카티 방정식이나 2개의 선형행렬부등식으로부터 해를 얻으므로 상호결합성에 의해 최적의 해를 구하기가 힘들다. 또한 최근 시간지연이 시스템의 안정성과 성능에 영향을 끼치기 때문에 시간지연에 대한 연구[7,8]가 활발히 진행중이다. 따라서, 시간지연을 가지는 특이시스템의 출력궤환 문제를 볼록최적화가 가능한 하나의 선형행렬부등식으로 해결하는 방법이 필요하다.

본 논문에서는 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 관측기 기반 H_∞ 출력궤환 제어기 설계방법과 제어기 존재 충분조건을 볼록 최적화가 가능한 단 하나의 선형행렬부등식으로 표현하고자 한다. 제안한 알고리듬은 궤환 이득과 추정 이득을 포함하는 모든 변수의 견지에서 하나의 선형행렬부등식으로 표현하기 때문에 한번에 모든 해를 구할 수 있다.

"이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음." (KRF-2002-041-D00210)

II. 문제 설정

시변 시간지연을 가지는 선형 특이시스템

$$
\begin{aligned}
E\dot{x}(t) &= Ax(t)+A_d x(t-d(t))+B_1 u(t)+B_2 w(t)\\
z(t) &= C_1 x(t)+D_1 u(t)\\
y(t) &= C_2 x(t)+D_2 w(t)\\
x(t) &= \phi(t),\ t\in[-\bar{d},0]
\end{aligned} \tag{1}
$$

을 고려한다. 여기서, $x(t)\in R^n$는 상태, $z(t)\in R^q$는 제어될 출력, $y(t)\in R^q$는 측정 출력, $u(t)\in R^m$는 제어입력, $w(t)\in R^p$는 외란입력, E는 $rank(E)=r\le n$를 만족하는 특이행렬, $\phi(t)$는 연속 벡터 값을 가지는 초기함수이고, 모든 행렬은 적절한 차원을 가진다. 그리고, D_1은 완전 열계수이다. 여기서 시간지연은

$$
0\le d(t)\le \bar{d} < \infty,\ \dot{d}(t)\le\beta<1 \tag{2}
$$

을 만족한다. 시스템 (1)에 대하여 관측기 기반 H_∞ 제어기를

$$
\begin{aligned}
E\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t)+B_1 u(t)+L[y(t)-C_2\hat{x}(t)]\\
u(t) &= K\hat{x}(t)
\end{aligned} \tag{3}
$$

으로 선정한다. 여기서, $\hat{x}(t)\in R^n$는 추정치, L은 추정이득, K는 궤환이득이다. 상태벡터 오차를 $e(t)=x(t)-\hat{x}(t)$로 두면, 오차 다이나믹스는

$$
\begin{aligned}
E\dot{e}(t) &= (A-LC_2)e(t)+A_d x(t-d(t))\\
&\quad +(B_2-LD_2)w(t)
\end{aligned} \tag{4}
$$

이다. 또한, 폐루프시스템의 상태방정식은

$$
\begin{aligned}
E\dot{x}(t) &= (A+B_1K)x(t)-B_1Ke(t)\\
&\quad +A_d x(t-d(t))+B_2 w(t)
\end{aligned} \tag{5}
$$

으로 표현되고 제어될 출력 $z(t)$는

$$
z(t)=(C_1+D_1K)x(t)-D_1Ke(t) \tag{6}
$$

이다. 또한, H_∞ 성능지수는

$$
\int_0^\infty [z(t)^T z(t)-\gamma^2 w(t)^T w(t)]dt \tag{7}
$$

이다. 따라서, 본 논문의 목적은 폐루프시스템의 정규성, 임펄스프리, 점근적 안정성뿐만 아니라 미리 선정한 H_∞ 노옴 한계를 만족하는 추정이득 L과 궤환이득 K를 결정하는 것이다.

정의 1. $E\dot{x}(t)=Ax(t)$의 시스템에 대한 특이시스템의 성질을 간단히 정리한다.

i) $det(sE-A)\neq 0$이면 $(sE-A)$는 정규적(regular)이다.

ii) 특이시스템이 임펄스프리이기 위한 필요충분조건은 $rank(E)=\deg det(sE-A)$를 만족한는 것이다.

iii) 특이시스템이 가지는 모든 모드가 감소하면 시스템은 점근적으로 안정하다.

III. 관측기 기반 H_∞ 제어기 설계

본 절에서는 시간지연 특이시스템의 관측기 기반 H_∞ 제어기가 존재할 충분조건과 제어기 설계방법을 블록 최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 다룬다.

정리 1. 주어진 γ에 대하여, 아래의 행렬부등식

$$
E^TP_c=P_c^TE\ge 0 \tag{8}
$$

$$
E^TP_o=P_o^TE\ge 0 \tag{9}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\Gamma_1 & -P_c^TB_1K-(C_1+D_1K)^TD_1K & P_c^TA_d & P_c^TB_2\\
* & \Gamma_2 & P_o^TA_d & P_o^T(B_2-LD_2)\\
* & * & -(1-\beta)Q & 0\\
* & * & * & -\gamma^2 I
\end{bmatrix}<0 \tag{10}
$$

을 만족하는 역행렬이 존재하는 대칭행렬 P_c, P_o, 양한정 행렬 Q, 추정이득 L, 궤환이득 K가 존재하면, (3)은 폐루프시스템을 정규성, 임펄스프리, 점근적 안정성을 만족하는 관측기 기반 H_∞ 제어기이다. 여기서, $\Gamma_1=A^TP_c+P_c^TA+K^TB_1^TP_c+P_c^TB_1K+Q+(C_1+D_1K)^T(C_1+D_1K)$ $\Gamma_2=A^TP_o+P_o^TA-P_o^TLC_2-C_2^TL^TP_{o+K}^TD_1^TD_1K$이고, $*$는 대칭요소를 의미한다.

증명: 시스템 (4)와 (5)의 점근적 안정성을 위하여, $E^TP_c=P_c^TE\ge 0$와 $E^TP_o=P_o^TE\ge 0$ 성질을 만족하는

$$
\begin{aligned}
V(x(t)) &= x(t)^TE^TP_cx(t)+e(t)^TE^TP_oe(t)\\
&\quad +\int_{t-d(t)}^{t} x(\tau)^TQx(\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{11}
$$

리아푸노프 함수를 잡는다. Q는 양한정행렬이다. 식 (11)의 시간에 대한 미분은

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}(x(t))\\
&\le \dot{x}(t)^TE^TP_cx(t)+x(t)^TP_c^TE\dot{x}(t)\\
&\quad +\dot{e}(t)^TE^TP_oe(t)+e(t)^TP_o^TE\dot{e}(t)\\
&\quad +x(t)^TQx(t)-(1-\dot{d}(t))x(t-d(t))^TQx(t-d(t))\\
&\le \dot{x}(t)^TE^TP_cx(t)+x(t)^TP_c^TE\dot{x}(t)\\
&\quad +\dot{e}(t)^TE^TP_oe(t)+e(t)^TP_o^TE\dot{e}(t)\\
&\quad +x(t)^TQx(t)-(1-\beta)x(t-d(t))^TQx(t-d(t))\\
&:=V_d(x(t)).
\end{aligned} \tag{12}
$$

와 같다. 따라서, $w(t)=0$인 $V_a(x(t))<0$은 식 (4)와 (5)로 구성되는 폐루프시스템을 점근적으로 안정시킨다. 식 (7), (11)와 (12)로부터 폐루프시스템의 H_∞ 노옴 한계를 만족하기 위하여

$$V(x(t)) \le V_a(x(t)) < -z(t)^T z(t) + \gamma^2 w(t)^T w(t) < 0 \quad (13)$$

의 관계를 얻는다. 따라서, (13)의 관계로부터

$$\zeta(t)^T \begin{bmatrix} \Gamma_1 & -P_c^T B_1 K - (C_1 + D_1 K)^T D_1 K & P_c^T A_d & P_c^T B_2 \\ * & \Gamma_2 & P_o^T A_d & P_o^T (B_2 - L D_2) \\ * & * & -(1-\beta) Q & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \zeta(t) < 0 \quad (14)$$

이고, $\zeta(t) = [\,x(t)^T \; e(t)^T \; x(t-d(t))^T \; w(t)^T\,]^T$이다. ■

하지만, 정리 1은 충분조건이 선형행렬부등식의 형태가 아니고, 식 (8)과 (9)에는 등식의 조건을 포함하고 있어서 풀기가 쉽지 않다. 따라서 구한 충분조건을 완벽한 하나의 선형행렬부등식으로 변형하는 방법을 정리 2에서 소개한다.

정리 2. 주어진 γ에 대하여, 아래의 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 & 0 & P_1 A_{d1} + P_2^T A_{d3} & P_1 A_{d2} + P_2^T A_{d4} & P_1 B_{21} + P_2^T B_{22} & 0 \\ * & \Sigma_3 & 0 & 0 & P_3 A_{d3} & P_3 A_{d4} & P_3 B_{22} & 0 \\ * & * & \Sigma_4 & \Sigma_5 & P_4 A_{d1} + P_5^T A_{d3} & P_4 A_{d2} + P_5^T A_{d4} & P_4 B_{21} + P_5^T B_{22} - M_1 D_2 & \Sigma_7 \\ * & * & * & \Sigma_6 & P_6 A_{d3} & P_6 A_{d4} & P_6 B_{22} - M_2 D_2 & \Sigma_8 \\ * & * & * & * & -(1-\beta) Q_1 & -(1-\beta) Q_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -(1-\beta) Q_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

을 만족하는 양한정 행렬 P_1, P_4, Q_1, Q_3, 역행렬 존재하는 대칭행렬 P_3, P_6 및 행렬 P_2, P_5, Q_2, M_1, M_2가 존재하면, 아래의 행렬은

$$\begin{aligned} K &= -(D_1^T D_1)^{-1} (B_1^T P_c + D_1^T C_1) \\ L &= (P_o^T)^{-1} M \end{aligned} \quad (16)$$

은 각각 식 (3)의 관측기 기반 H_∞ 제어가의 궤환이득과 추정이득이다. 여기서, 변수들은

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= A_1^T P_1 + P_1 A_1 + Q_1 + C_{11}^T C_{11} \\ \Sigma_2 &= P_2^T A_4 + Q_2 + C_{11}^T C_{12} \\ \Sigma_3 &= A_4^T P_3 + P_3 A_4 + Q_3 + C_{12}^T C_{12} \\ \Sigma_4 &= A_1^T P_4 + P_4 A_1 - M_1 C_{21 - C_{21}^T} M_1^T \\ \Sigma_5 &= P_5^T A_4 - M_1 C_{22} - C_{21}^T M_2^T \\ \Sigma_6 &= A_4^T P_6 + P_6 A_4 - M_2 C_{22} - C_{22}^T M_2^T \\ \Sigma_7 &= -(P_1 B_{11} + P_2^T B_{12} + C_{11}^T D_1 D_1^T D_1)^{-1} D_1^T \\ \Sigma_8 &= -(P_3 B_{12} + C_{12}^T D_1)(D_1^T D_1)^{-1} D_1^T \end{aligned}$$

와 같다.

증명: 식 (10)의 행렬부등식은 식 (16)을 이용하면

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & P_c^T A_d & P_c^T B_2 \\ * & \Lambda_2 & P_o^T A_d & P_o^T B_2 - M D_2 \\ * & * & -(1-\beta) Q & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

으로 변형된다. 여기서, 변수들은

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= A^T P_c + P_c^T A + Q + C_1^T C_1 - K^T D_1^T D_1 K \\ \Lambda_2 &= A^T P_o + P_o^T A - M C_2 - C_2^T M^T + K^T D_1^T D_1 K \\ M &= P_o^T L \end{aligned}$$

으로 정의한다. 더욱이, 식 (18)의 행렬부등식은

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & P_c^T A_d & P_c^T B_2 & 0 \\ * & \Psi_2 & P_o^T A_d & P_o^T B_2 - M D_2 & -(D_1^T D_1)^{-1} (P_c^T B_1 + C_1^T D_1) D_1^T \\ * & * & -(1-\beta) Q & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

의 선형행렬부등식이 음한정이면 음한정이다. 여기서, 변수들은

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A^T P_c + P_c^T A + Q + C_1^T C_1 \\ \Psi_2 &= A^T P_o + P_o^T A - M C_2 - C_2^T M^T \end{aligned}$$

으로 정의한다. 구하려는 모든 변수의 견지에서 볼록 최적화가 가능한 선형행렬부등식을 만들고, 식 (8)과

(9)의 등식조건을 없애기 위하여 변수치환과 특이치분해 방법을 이용한다. 일반성을 상실함 없이[1,2], 식 (1)의 시스템 행렬은

$$E=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix},\ A_d=\begin{bmatrix} A_{d1} & A_{d2} \\ A_{d3} & A_{d4} \end{bmatrix},$$
$$B_1=\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix},\ C_1=[\,C_{11}\ \ C_{12}\,]$$
$$C_2=[\,C_{21}\ \ C_{22}\,],\ D_1=D_1,\ D_2=D_2 \tag{20}$$

의 특이치분해 형태를 가진다고 가정한다. 또한, 식 (8)과 (9)를 만족하기 위하여, 구하려는 해를

$$P_c=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$$
$$P_o=\begin{bmatrix} P_4 & 0 \\ P_5 & P_6 \end{bmatrix} \tag{21}$$

로 두고, 식 (20), (21), 및 (22)를 식 (19)에 대입하면 식 (19)는 식 (15)와 등가이다. 따라서 식 (15)는 구하려는 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식 형태이다. ■

참조 1. 식 (1)의 특이시스템에서 $E=I$이면, 식 (19)의 선형행렬부등식으로부터 일반적인 시간지연 상태공간 문제에 대한 해를 직접적으로 구할 수 있다. 따라서, 제안한 설계 알고리듬은 특이시스템뿐만 아니라 비특이시스템에 대한 관측기 기반 H_∞ 제어기를 설계할 수 있다. 또한, 대부분의 비특이시스템의 관측기 기반 H_∞ 제어기 설계 방법은 2개의 리카티 부등식으로부터 해를 구하는 반면에 제안하는 알고리듬은 단지 하나의 선형행렬부등식의 충분조건으로부터 해를 구할 수 있다는 장점이 있다.

예제. 제안한 알고리듬의 타당성을 보기 위하여 시간지연을 가지는 특이시스템

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} -0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.01 \end{bmatrix}x(t-d(t)) \\ &\quad+\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}w(t) \\ z(t) &= [\,0.2\ \ 0.1\,]\,x(t)+u(t) \\ y(t) &= [\,0.5\ \ 0.2\,]\,x(t)+w(t) \\ \beta &= 0.3,\ \gamma=1 \end{aligned} \tag{25}$$

을 다룬다. 정리 2의 최적화 문제는 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식이므로 LMI 도구상자[9]로부터 모든 해와 추정이득 및 궤환이득은

$$\begin{aligned} P_c &= \begin{bmatrix} 0.6719 & 0 \\ -0.8368 & -0.7520 \end{bmatrix},\ P_o=\begin{bmatrix} 0.4136 & 0 \\ -0.1071 & -0.7235 \end{bmatrix}, \\ M &= \begin{bmatrix} -0.0762 \\ -0.1516 \end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix} 1.4467 & 0.5616 \\ 0.5616 & 0.9914 \end{bmatrix}, \\ K &= [\,0.3070\ \ -0.8520\,],\ L=\begin{bmatrix} -0.1300 \\ 0.2095 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{26}$$

으로 구해지므로 최종 관측기 기반 H_∞ 제어기는

$$\begin{aligned} E\dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -2.5491 & 1.7301 \\ -0.4118 & 1.8101 \end{bmatrix}\hat{x}(t)+\begin{bmatrix} -0.1300 \\ 0.2095 \end{bmatrix}y(t) \\ u(t) &= [\,0.3070\ \ -0.8520\,]\,\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{27}$$

이다.

참고문헌

[1] I. Masubuchi, T. Kmitane, A. Ohara, and N. Suda, "H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach," *Automatica,* vol. 33, pp. 669-673, 1997.

[2] D. J. Bender and A. J. Laub, "The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, pp. 672-688, 1987.

[3] H. S. Wang, C. F. Yung, and F. R. Chang, "Bounded real lemma and H_∞ control for descriptor systems," *IEE-Proc. Control. Theory and Appl.*, vol. 145, pp. 316-322, 1998.

[4] J. D. Cobb, "Controllability, observability, duality in singular systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 29, pp. 1076-1082, 1984

[5] F. L. Lewis, "Preliminary notes on optimal control for singular systems," *Proc. Conf. on Decision and contr.*, pp.262-272, 1985.

[6] K. Takaba, N. Morihara, and and T. Katayama, "A generalized Lyapunov theorem for descriptor system," Systems & Contr. Lett., vol. 24, pp. 49-51, 1995.

[7] H. H. Choi and M. J. Chung, "Observer-based H_∞ controller design for state delayed linear systems," *Automatica,* vol. 32, pp. 1073-1075, 1996.

[8] J. H. Kim and H. B. Park, "H_∞ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system," Automatica, vol. 35, pp. 1443-1451, 1999.

[9] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1995.