

# Weibull 신호원에 불일치된 양자기 성능에 관한 연구

강신규 □ 나상신  
아주대학교

## Study on the Performance of Mismatched Quantizers on Weibull Sources

Shinkyu Kang, Sangsin Na

Electrical Engineering Signal Processing and Communications

A-Jou University

E-mail: paura@ajou.ac.kr

### Abstract

Quantizers for digital coding systems are usually optimized with respect to a model of the probability density function of the random variable to be quantized. Thus a mismatch of the quantizer relative to the actual statistics of the random variable may be unavoidable. This paper presents the results of an experimental investigation of mismatched quantizers. For the modeling of the source statistics, various types of the Weibull distribution are used, and the optimization of the quantizer is carried with respect to the minimum mean-square error (mse) criterion. The goal of this paper is to find an estimate formula for the mismatched quantizer on Weibull sources.

지며, 이들 매개 변수를 선별함에 따라 모양이 다른 분포도를 나타낼 수 있다. 예를 들면, 영상 신호의 1 차원적 분포인 레일리 분포나 음성의 모형으로 주로 사용되는 지수확률 분포는 Weibull 분포의 특별한 형태로 간주될 수 있다. 다음의 그림 1은  $\alpha$ 와  $\beta$  값에 따라 다양한 분포를 가지는 Weibull 확률밀도함수를 나타낸다.

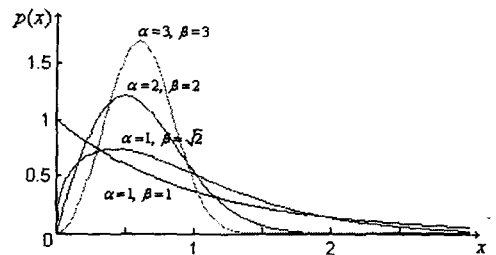


그림 1. Weibull 밀도함수의 다양한 분포

### I. 서론

#### 1.1 Weibull 신호원

신호원에서 발생된 신호의 확률분포  $p(x)$ 가 다음의 식(1)로 표현되면, 이러한 신호원을 Weibull 신호원이라고 한다.

$$p(x) = \alpha\beta x^{\beta-1} \exp(-\alpha x^\beta), \quad x > 0, \alpha, \beta > 0 \quad (1)$$

$p(x)$ 의 동작은  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 값에 따라 다양한 분산을 가

그림 1에서 확인되듯이 일반적인 Weibull 신호원은 여러 가지 신호분포를 표현할 수가 있고, 그것의 연구 결과는 레일리나 지수확률 분포의 신호원에 대해서도 적용이 가능하다.

#### 1.2 최적 양자기

먼저, 본 논문에서 논하는 양자기는 양자점, 경계값, 양자함수의 3 가지 요소로 표현되는 홀양자기(scalar quantizer)임을 밝혀둔다. 양자점은 양자영역을 대표하

는 값으로서 그림 2 와 같이  $y_1, y_2, \dots, y_N$  으로 표시하기로 하고, 경계값은  $x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$  로 표시하기로 하자. 양자함수인  $Q(\cdot)$  는  $x \in [x_i, x_{i+1})$  일 때,  $Q(\cdot) = y_i$  의 값을 갖는 일종의 다대일 함수이다. 값 연속 신호원  $\{X_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  의 제 1 차 확률밀도함수  $p(x)$  가 주어진 경우에 ' 최소 평균제곱오차(mean-square error)  $N$ -점 홀양자기를 설계한다는 것' 은 평균제곱 오차를 최소화하는  $N$  개의 양자점  $\{y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*\}$  과  $N-1$  개의 경계값  $\{x_2^*, x_3^*, \dots, x_N^*\}$  을 설정하는 것을 의미한다. (Weibull 신호원을 대상으로 하는 최적양자기 설계는 일반적으로  $x_1^* = 0, x_{N+1}^* = \infty$  로 설정된다.)

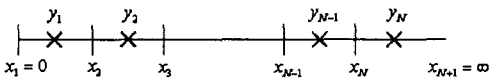


그림 2. 홀양자기의 표현

양자기를 설계하는 방법으로는 로이드-맥스(Lloyd-Max) 알고리즘을 사용하여, 확률밀도함수의 지지역(support)의 오른쪽 끝에서부터 양자점과 경계값을 번갈아 구할 수 있다. 로이드-맥스 알고리즘은 어떠한 양자기가 최적으로 설계되었을 때, 그 양자기의 양자점은 인접한 2 개의 경계값 사이에서의 확률밀도함수의 무게 중심이 되고, 경계값은 인접한 2 개의 양자점의 중간값이 된다는 사실을 응용한 것이다. 이것을 수식으로 표현하면 식(2)와 (3)이 된다.

$$y_i = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} x \cdot p(x) dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx} \quad (2)$$

$$x_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \quad (3)$$

로이드-맥스 알고리즘에 의해서 최적양자기를 설계하는 것은 실제로 어려움이 따르는데, 그것은 설계준비 단계에서 초기값을 정확히 알 수 있는 지표가 없기 때문이다. 따라서, 한 개의 양자점이나 경계값을 임의로 설정하고 양자기를 설계를 마친 후에 초기값 설정에 대한 평가를 할 수가 있고, 초기값을 매번 수정하여 같은 방법을 되풀이 해야 한다. 본 논문에서는 초기값의 설정 지표로 [6]에서 밝힌 수식을 이용할 것이며, 필요에 따라서는 로이드-맥스 알고리즘을 생략하고, [6]에서

제시한 최적양자기 구하기 위한 근사식을 사용하여 양자기를 설계하고, 이렇게 구한 것을 최적 양자기로 받아들일 것이다.

신호원의 확률밀도함수가  $p(x)$ 로 주어질 때,  $N$ -점 양자기  $Q_N$ 의 성능을 가능할 수 있는 평균제곱오차 왜곡  $D(Q_N)$ 은 다음 식(4)로 표현된다.

$$D(Q_N) = E_p \left\{ (X - Q_N(X))^2 \right\} \quad (4)$$

여기에서  $E_p\{\cdot\}$ 는 확률밀도함수  $p(x)$ 에 대한 평균값을 의미한다.

### 1.3 양자기 불일치

실제 통신 시스템에서는 입력 신호원의 통계적 특성이 때때로 변화하여, 설계된 양자기와 사용되는 신호원이 일치하지 않는 양자기의 불일치가 발생할 수 있다. 다시 말하면, 양자기 불일치란 어떤 신호원에 최적으로 동작하도록 설계된 양자기에 확률적 분포가 다른 신호원이 사용되어, 설계된 의도에 따라 동작을 하지 않는 상황을 일컫는 말이다. 이러한 양자기의 불일치는 불일치 내용에 따라서 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 첫째는 다른 종류의 확률밀도함수를 갖는 신호원 사이에서의 불일치이고, 둘째는 같은 종류의 확률밀도함수를 갖는 신호원 사이에서의 불일치이다. 흔히 양자기를 설계할 단계에서는 입력된 신호원의 통계적 특성을 정확히 모르는 경우가 많기 때문에 앞에서 본 양자기 불일치의 두 가지 중에서 같은 확률밀도함수는 같지만 분산이 달라서 발생하는 양자기 불일치에 대한 연구는 그 가치가 특별하고 할 수 있다[4].

본 논문에서의 연구 대상은 Weibull 신호원이고, 매개 변수에 따라서 신호원의 분산이 달라지는 것 이외에, 특별한  $\alpha$  값이나  $\beta$  값을 선정함에 따라서 모양이 다른 확률분포함수로 해석할 수 있기 때문에 앞에서 지수확률분포와 레일리분포 사이의 종류가 다른 확률밀도함수를 갖는 신호원사이의 양자기 불일치에 대한 것도 포함된다.

## II. 양자기 불일치 근사식

### 2.1 베넷의 적분공식(Bennett's formula)

양자기를 설계하는 단계에서 사용한 Weibull 신호원을  $q(x)$ 라 하고, 이렇게 설계된  $N$ -점 양자기  $Q_N$ 에 입

력으로 사용되는 불일치된 Weibull 신호원을  $p(x)$  라고 하자 (그림 3).

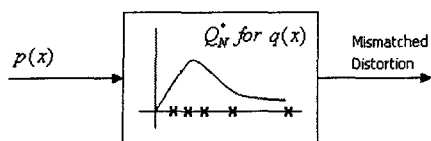


그림 3. 양자기 불일치 계산 블록

그림 3 과 같이 동작하는 불일치된 양자기의 평균계급 오차는 식(4)와 같은 방법으로 구할 수 있다. 식(4)에서 불일치된 신호원을 구분하기 위해 인덱스를 붙여서 다시 정의하면 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$D_p(Q_{N,q}^*) = E_p \left\{ \left( X - Q_{N,q}^*(X) \right)^2 \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( x - Q_{N,q}^*(x) \right)^2 \cdot p(x) dx \quad (5)$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} \left( x - y_i^* \right)^2 \cdot p(x) dx$$

식(5)를 이용해서 실제로 불일치된 양자기의 에러를 구하려면 최적 양자기를 설계해야 하는 어려움과 거듭된 적분값을 구해야 하는 부담이 따르게 되기 때문에 실용적이지 못하다. 선행된 연구[3]에서 불일치된 양자기의 에러를 구하는 근사식이 제시되었다.

$$D_p(Q_{N,q}^*) \approx \frac{1}{12N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{\lambda^2(x)} dx. \quad (6)$$

여기서  $\lambda(x) = \frac{q^3(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} q^3(x)}$

베넷 적분식으로 알려져 있는 식(6)은 실제로 최적 양자기를 구하지 않고도 불일치된 양자화 에러를 근사적으로 구할 수 있다는 장점이 있다. 하지만, 식(6)의 적분기호 안의 식이 확률밀도함수의 분산에 따라서 발산하는 경우에는 적분값이 무한대가 되어서 근사값을 제시하지 못하게 된다. 아무리 잘못 설계된 양자기라 할지라도 양자화 에러가 무한대인 경우는 없는 것이다. Weibull 신호원인  $q(x)$  와  $p(x)$  가 다음과 같을 때,

$$q(x) = \alpha_q \beta_q x^{\beta_q - 1} \exp(-\alpha_q x^{\beta_q}) \quad (7)$$

$$p(x) = \alpha_p \beta_p x^{\beta_p - 1} \exp(-\alpha_p x^{\beta_p})$$

$\beta_p = \beta_q$  라면, 적분식의 수렴조건은  $\alpha_p > \frac{2}{3} \alpha_q$  가 된다.

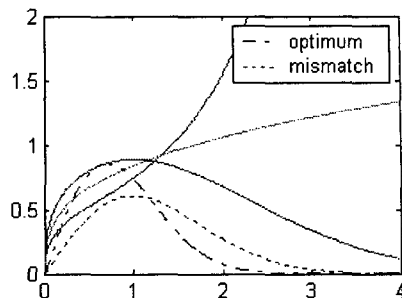


그림 4. 베넷 적분식의 발산

그림 4 에서는 적분식이 각각 수렴/발산하는 경우인데, 이는 베넷 적분식으로 양자화 에러의 근사값을 구하는 것이 항상 가능한 것이 아님을 보여준다.

### 2.2 수정된 베넷의 적분공식

양자기의 에러를 계산하는 식(6)의 마지막 등식에서 적분함을 분리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$D_p(Q_{N,q}^*) = \sum_{i=2}^{N-1} \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} \left( x - y_i^* \right)^2 \cdot p(x) dx \quad (8)$$

$$+ \int_{x_1^*}^{x_2^*} \left( x - y_1^* \right)^2 \cdot p(x) dx + \int_{x_N^*}^{x_{N+1}^*} \left( x - y_N^* \right)^2 \cdot p(x) dx$$

식(8)의 첫째 항은 양자영역  $[x_2, x_N]$  에서의 왜곡의 값으로 안왜곡(inner distortion)이라 부르기로 하고,  $D_{p,i}(Q_{N,q}^*)$  라 표시하기로 하자. 또 둘째 항과 셋째 항은 가장 바깥쪽 양자점들에 의한 왜곡의 값으로 이를 바깥 왜곡(outer distortion)이라 부르기로 하고, 이를 각각  $D_{p,o1}(Q_{N,q}^*)$  와  $D_{p,o2}(Q_{N,q}^*)$  라 표기하기로 하자.

안왜곡과 바깥왜곡을 구하는 식을 Weibull 신호원인 가지는 정의구간으로 표현하면 다음 식(9)를 얻는다.

$$D_{p,i}(Q_{N,q}^*) = \sum_{i=2}^{N-1} \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} \left( x - y_i^* \right)^2 \cdot p(x) dx \quad (9)$$

$$D_{p,o1}(Q_{N,q}^*) = \int_0^{x_2^*} \left( x - y_1^* \right)^2 \cdot p(x) dx$$

$$D_{p,o2}(Q_{N,q}^*) = \int_{x_N^*}^{\infty} \left( x - y_N^* \right)^2 \cdot p(x) dx$$

식(9)에서 바깥 왜곡은 직접 계산하고, 안왜곡은 베넷 적분식을 적용하면 불일치된 양자기의 전체 왜곡을 구할 수 있다.

$$D_p(Q_{N,q}^*) = \frac{1}{12N^2} \int_{x_2^*}^{x_N^*} \frac{p(x)}{\lambda^2(x)} dx \quad (10)$$

$$+ \int_0^{x_2^*} \left( x - y_1^* \right)^2 \cdot p(x) dx + \int_{x_N^*}^{\infty} \left( x - y_N^* \right)^2 \cdot p(x) dx$$

식(10)이 식(6)의 베넷적분식과 다른 점은 적분구간의 값이 발산을 하더라도 적분구간이 한정되어서 불일치된 신호원의 분산에 관계없이 적용할 수 있다는 것이다. 하지만, 식(10)에서는 안왜곡과 바깥왜곡을 구분하는 두 개의 최적 양자점  $x_2^*$ 과  $x_N^*$ 을 먼저 구해야 하는데, 이는 곧 최적 양자기를 설계하는 어려움과 같다. 이러한 문제는 최적 양자기 설계단계를 거치지 않고,  $x_2^*$ 과  $x_N^*$ 의 값을 구할 수 있는 근사식을 식(10)에 적용하여서 해결할 수 있다[6].

$$x_2^* \equiv u_N = \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left[ \left(\frac{\beta+1}{2\beta N}\right) \Gamma\left(\frac{\beta+2}{3\beta}\right) \right]^{\frac{3}{\beta+2}} \quad (11)$$

$$x_N^* \equiv v_N = \left[ 1 - \frac{3(2\beta+3)}{2(\beta+2)N} + \frac{4\beta-1}{2(2\beta+1)} \left(\frac{\beta+1}{2\beta N}\right) \Gamma\left(\frac{\beta+2}{3\beta}\right) \right]^{\frac{3\beta}{\beta+2}} \quad (12)$$

$$= \left( \frac{3}{\beta} \ln \frac{2N}{3\Gamma\left(\frac{\beta+2}{3\beta}\right)} - \frac{2(\beta-1)}{\alpha\beta} \ln \ln N + \frac{4(\beta-1)^2}{3\alpha\beta^2} \frac{\ln \ln N}{\ln N} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (12)$$

식(10)에 식(11)과 식(12)을 대입하여, 최적 양자기를 구하지 않고, 불일치 양자기의 왜곡을 계산할 수 있는 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$D_p(Q_{N,q}^*) \equiv \frac{1}{12N^2} \int_{u_N}^{v_N} \frac{p(x)}{\lambda^2(x)} dx + \int_0^{u_N} (x-y_i^*)^2 \cdot p(x) dx + \int_{v_N}^{\infty} (x-y_i^*)^2 \cdot p(x) dx \quad (13)$$

### III. 수치결과

수정된 베넷의 적분식(13)을 평가하기 위해서, 최적 양자기를 구하여 식(5)와 식(10)에 의해 구한 불일치 왜곡값과 비교하였다. 최적 양자기 설계의 모델로 사용한 Weibull 신호원은  $\alpha_q=1, \beta_q=2$  이고, 불일치된 입력 신호원은  $\alpha_q=0.5, \beta_q=2$  인 경우로 하였다.

표 1. 불일치된 양자기의 왜곡값

| N   | 식(5)        | 식(10)       | 식(13)       |
|-----|-------------|-------------|-------------|
| 4   | 0.089650669 | 0.084335926 | 0.125507843 |
| 8   | 0.032397603 | 0.030591046 | 0.037358707 |
| 16  | 0.011274590 | 0.010849169 | 0.012243820 |
| 32  | 0.003841995 | 0.003751978 | 0.004107167 |
| 64  | 0.001296114 | 0.001277033 | 0.001385691 |
| 128 | 0.000435660 | 0.000431334 | 0.000467922 |
| 256 | 0.000146412 | 0.000145326 | 0.000158033 |

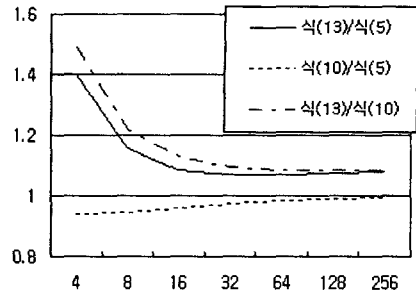


그림 5. 불일치된 양자기의 왜곡값 비교

### V. 결론

본 논문에서는 베넷적분공식에 의한 불일치된 양자기의 오차를 구하는 근사식의 문제점과 해결방법을 제시하였다. 또한, 수정된 베넷적분공식을 이용하여 실제로 계산한 결과를 수치적으로 보임으로써 본 논문의 주장이 타당함을 뒷받침해준다. 수정 후에도 여전히 남아있는 안왜곡을 구하기 위한 베넷적분식을 더욱 간략하게 보임은 다음의 연구과제로 가치가 있다.

### 참고문헌

- [1] S. P. Lloyd, "Least squares quantization on PCM," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, pp. 129-136, Mar. 1982.
- [2] J. Max, "Quantizing for minimum distortion," *IRE Trans. on Inform. Theory*, IT-6, pp. 7-12, Mar. 1960.
- [3] W. R. Bennett, "Spectra of Quantized Signals," *Bell System Tech. J.*, pp. 446-472, July 1948
- [4] W. Mauersberger, "Experimental Results on the Performance of Mismatched Quantizers," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, IT-25 No. 4, July 1979
- [5] N. S. Jayant and P. Noll, *Digital Coding of Waveforms*, Prentice-Hall, 1984
- [6] 임실규, "On the Support Region of a Minimum Mean-Square Error Scalar Quantizer for a Weibull Source," *공학석사학위논문*, Aug. 2002
- [6] 구기일, "Distortion of Variance Mismatched-Quantization of a Generalized Gamma Source", *공학석사학위논문*, Feb. 2001