

비정적 상관관계를 고려한 공간적응적 잡음제거 알고리즘

김창원, 박성철, 강문기
연세대학교 전기전자공학과
서울특별시 서대문구 신촌동 134

Spatially Adaptive High-Resolution Denoising Based on Nonstationary Correlation Assumption

Chang Won Kim, Sung Cheol Park and Moon Gi Kang
Yonsei University, Dept. of Electrical & Electronic Engineering
E-mail: freezer98@yonsei.ac.kr

요약

The noise in an image degrades image quality and deteriorates coding efficiency of compression. Recently, various edge-preserving noise filtering methods based on the nonstationary image model have been proposed to overcome this problem. In most conventional nonstationary image models, however, pixels are assumed to be uncorrelated to each other in order not to increase the computational burden too much. As a result, some detailed information is lost in the filtered results. In this paper, we propose a computationally feasible adaptive noise smoothing algorithm which considers the nonstationary correlation characteristics of images. We assume that an image has a nonstationary mean and can be segmented into subimages which have individually different stationary correlations. Taking advantage of the special structure of the covariance matrix that results from the proposed image model, we derive a computationally efficient FFT-based adaptive linear minimum mean square error filter. The justification for the proposed image model is presented and the effectiveness of the proposed algorithm is demonstrated experimentally.

I. 서론

신호 독립적 혹은 의존적 잡음으로 인한 영상의 열화를 제거하기 위하여 다양한 잡음제거 방법들이 제안되어 왔다. 잡음제거 알고리즘의 효율성은 적용된 영상 모델의 정당성에 의존한다. 비정적(nonstationary) 평

균(mean) 가우시안 모델에서는 영상이 비정적 평균에 대해서 정적(stationary)인 변화를 가진다고 모델링 된다^[1]. 비정적 평균 비정적 분산(NMNV) 모델은 비정적 가우시안 모델의 공분산(covariance) 행렬에 영상의 비정적 특성을 반영한 영상 모델이다^[2]. 이러한 영상의 비정적 가정은 영상의 정적 가정이 맞지 않는 영상의 에지(edge)와 같은 영역에 적합하게 된다. 하지만, 기존의 알고리즘들은 영상이 백색과정(white process)이라고 가정한다. 다시 말해서, 화소 사이에 상관관계(correlation)가 없다고 가정한다. 일반적으로 영상에 대하여 비정적 상관관계 모델링이 가장 정확하지만 계산량이 너무 많게 되므로, 비정적 가정 혹은 상관관계가 정 중 한 가지 가정은 생략되고 있다.

본 논문에서는 Linear Minimum Mean Square Error(LMMSE) 필터를 바탕으로 영상의 비정적 상관관계 특성을 고려하면서 계산적으로 아주 효율적인 잡음제거 알고리즘을 제안한다. 제안된 영상모델에서는 전체 영상이 국부 통계(local statistics)에 의존하여 부분영상(subimage)으로 분리된다고 가정되며, 각각의 부분영상이 비정적 평균에 대하여 서로 다른 정적 상관관계를 가진다고 가정된다. 제안된 영상모델을 바탕으로 영상 벡터 재정렬(reordering)과 블록 토폴리츠(Block Toeplitz) 행렬의 블록 순환(Block Circulant) 행렬 근사화를 이용하여, 영상의 비대각(nondiagonal) 공분산 행렬의 역행렬을 효율적으로 계산하는 FFT기반의 잡음제거 알고리즘을 유도한다. 제안된 알고리즘의 결과가 NMNV 모델에 근거한 알고리즘의 결과보다 영상의 세부정보(detailed information)를 더 잘 보존함을 실험적으로 보인다. 본 논문의 구성은 2장에서 기존의 LMMSE 필터를 간단히 설명하고, 3장에서 새로운 적응적 잡음제거 알고리즘을 유도하고 제안된 영상모델의 정당성을 입증한다. 4장에서 제안된 알고리즘의 실험결과를 보이고, 5장에서 결론을 맺는다.

II. 이론적 배경

이번 장에서는 제안하는 알고리즘의 기본이 되는 LMMSE 필터^[2]를 간단히 설명한다. 잡음에 의해서만 열화된 영상의 복원을 고려하면 영상의 열화 과정은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g = f + n \quad (1)$$

여기서 g , f 그리고 n 은 각각 사전배열식 (lexicographically)으로 정렬된 열화된 영상, 원래 영상, 그리고 평균이 0인 잡음을 나타낸다. 본 논문에서는 신호 독립적인 가산 잡음만을 고려하기로 한다. 원래 신호 f 에 대한 Minimum mean square error(MMSE) 추정치 (estimate)는 잘 알려진 바와 같이 조건부 평균 $E[n|f]$ 이지만, 일반적으로 비선형이며 f 와 n 의 확률밀도함수에 의존한다. 여기에 $E[n|f] = 0$ 이라는 가정과 선형 속박 (constraint)을 가하면 다음과 같은 LMMSE 추정치를 얻을 수 있다.

$$\hat{f}_{LMMSE} = E(f) + C_f C_g^{-1} (g - E(g)) \quad (2)$$

여기서, $E(f)$, $E(g)$ 는 f 와 g 의 앙상블(ensemble) 평균이며 C_f 와 C_g 는 각각 f 와 g 의 공분산 행렬을 나타낸다. 공분산 행렬은 가정된 영상 모델에 의해 다양한 형태로 표현 될 수 있다. NMNV 모델에서는 영상이 백색 (white process)이고 비정적이라고 가정하므로 공분산 행렬은 각각의 대각 요소가 화소 각각의 국부 분산을 나타내는 대각 행렬이 된다. 이러한 NMNV 가정으로부터 다음과 같이 화소 단위의 연산인 LMMSE 필터를 유도할 수 있다^[2].

$$\hat{f}_{LMMSE}(i, j) = E(f(i, j)) + \frac{\sigma_f^2(i, j)}{\sigma_f^2(i, j) + \sigma_n^2(i, j)} (g(i, j) - E(g(i, j))) \quad (3)$$

여기서, σ_f^2 과 σ_n^2 는 각각 f 와 n 의 비정적 분산을 나타낸다. 식 (3)에서 앙상블 통계 치들은 영상의 열화 모델에 근거하여 열화된 영상으로부터 국부 공간 통계 치로 대체되어야만 한다. 그러므로 적응적 잡음제거 필터의 성능은 국부 공간 통계치의 추정에 사용된 방법에 크게 의존하게 된다. 국부 공간 통계치를 추정하기 위한 가장 간단한 방법은 다음과 같이 샘플(sample) 평균 및 분산을 정방향 마스크로부터 취하는 것이다.

$$\bar{g}(i, j) = \frac{1}{h} \sum_{k, j \in h} g(k, l) \quad (4)$$

$$\sigma_g^2(i, j) = \frac{1}{h} \sum_{k, j \in h} [g(k, l) - \bar{g}(i, j)]^2 \quad (5)$$

여기서, h 는 국부 마스크의 적용범위이며 $\bar{g}(i, j)$, $\sigma_g^2(i, j)$ 는 각각 $g(i, j)$ 의 국부공간평균 및 분산이다. 이러한 샘플 통계치는 영상의 평탄한 (flat) 영역에서는 추정 결과가 좋지만 영상의 에지를 심하게 번지게 하는 단점이 있다. 이러한 점을 극복하기 위하여 다양한 예지 적응적 국부 공간 평균 추정 방법이 제안되어져 왔

다^[3,5]. 예지 적응적 국부 공간 평균 추정 방법의 바탕이 되는 아이디어는 국부 공간 평균값이 예지의 한쪽 영역에서만 추정되어야 된다는 점이다. 예지를 가로질러 국부 공간 평균값을 계산하지 않도록 본 논문에서는 다음과 같이 추정 구조에 간단히 이진 가중치 (weight) 함수를 적용한다.

$$\bar{g}(i, j) = \frac{1}{\sum_{k, l} w_{k, l}} \sum_{k, l \in h} w_{k, l} [g(i, j) - g(k, l)] g(k, l) \quad (6)$$

여기서, 이진 가중치 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$w_{k, l}(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \eta < T \\ 0 & \text{if } \eta \geq T \end{cases} \quad (7)$$

여기서, T 는 미리 정해진 임계치 (threshold)이며 본 논문에서는 경험적으로 결정한다. 이러한 예지 적응적 국부공간평균 추정 방법을 통하여 차영상 $f - \hat{f}$ 는 샘플 평균치를 사용했을 때보다 더욱 백색잡음에 가까워지며 NMNV 모델은 필터링된 영상에서 예지의 선명도를 잘 유지하게 된다. 하지만, NMNV 모델은 근본적으로 화소 사이에 상관관계가 없다고 가정하므로 영상의 세부 정보들을 잃거나 예지에 위치한 잡음들을 잘 제거하지 못하게 된다. 이러한 점을 극복하기 위하여 다음 장에서 영상의 비정적 모델에 상관관계 가정을 포함시키는 방법을 소개한다.

III. 상관관계를 고려한잡음제거 필터

일반적으로 영상은 백색 과정이 아니며 비정적이다. 이러한 경우, 영상의 공분산 행렬은 NMNV모델과는 달리 대각행렬이 아니며, 또한 비정적 가정에 의해 FFT를 이용한 공분산 행렬의 연산이 불가능하게 되어, 식 (2)의 추정치를 구하기 위한 계산 량의 부담이 매우 커지게 된다. 이러한 일반적인 영상 모델을 계산 량의 부담 없이 근사적으로 고려하기 위해서 본 논문에서는 영상이 식 (6)의 비정적 평균을 가지고 화소들 간의 상관관계가 오직 이웃한 영역(부분영상)에서만 정적으로 존재하며, 각각의 부분영상들은 서로 다른 상관관계 구조를 가진다고 가정한다. 그런 다음, 영상 벡터 재 정렬 및 블록 토플리츠 행렬의 블록 순환 행렬 근사화에 근거한 공분산 행렬의 특수한 구조를 이용한다.

편의상 영상 X 의 크기가 $MN \times MN$ ($N \ll M$, $N = 2^n$)이라고 가정하면 영상 X 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_M \\ X_{M+1} & X_{M+2} & \dots & X_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{M^2-M+1} & X_{M^2-M+2} & \dots & X_{M^2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기에서, 부분영상 X_k ($k = 1, 2, \dots, M^2$)의 크기는 $N \times N$ 이다. 재정렬된 벡터 x 는 $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{M^2}]^T$ 로 정의되며 여기서 x_k ($k = 1, 2, \dots, M^2$)는 해당하는 부분 영상 X_k 의 사전배열식으로 정렬된 벡터이다. 화소의 상

관관계가 오직 정해진 부분영상 내에서만 존재한다는 가정 아래, 재정렬된 벡터 x 의 공분산 행렬은 다음과 같이 블록 대각 형태가 된다.

$$C_x = \begin{bmatrix} C_x^{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_x^{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_x^{M^2 M^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서, $C_x^i (i=1, 2, \dots, M^2)$ 는 i 번째 부분영상의 공분산 행렬이며, 각 부분영상 내에서의 정적 상관관계 가정에 의해 $C_x^i (i=1, 2, \dots, M^2)$ 는 블록 토폴리츠 형태가 된다. 여기에서 유의해야 할 점은 각 부분 영상의 상관관계 특성이 다르므로 C_x 는 블록 토폴리츠 형태가 아니라는 점이다 (즉 $i \neq j$ 에 대하여 $C_x^{ii} \neq C_x^{jj}$).

FFT 기반의 잡음제거 알고리즘을 유도하기 위하여 다음과 같이 $M^2 N^2 \times M^2 N^2$ 변환 행렬 \bar{W} 를 정의한다.

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} W & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기에서, $N^2 \times N^2$ 변환 행렬 W 는 2차원 역방향 DFT를 나타낸다.

\bar{W} 의 역행렬 \bar{W}^{-1} 은 다음과 같다.

$$\bar{W}^{-1} = \begin{bmatrix} W^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W^{-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서, $N^2 \times N^2$ 변환 행렬 W^{-1} 는 2차원 정방향 DFT를 나타낸다.

크기 $N^2 \times N^2$ 인 블록 순환행렬 H 는 W 와 W^{-1} 에 의하여 다음과 같이 대각화될 수 있다.^[6]

$$D = W^{-1} H W \quad (12)$$

여기서, D 는 H 의 고유치 (eigenvalue)를 원소로 가지는 대각행렬이다. 다시 말해서, 식 (12)는 2차원 DFT를 통한 블록 순환행렬의 대각화를 나타낸다. 또한, i 번째 재정렬된 벡터 x_i 의 DFT는 W^{-1} 에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$x_i^{DFT} = W^{-1} x_i \quad (13)$$

여기서 $N^2 \times 1$ 벡터 x_i^{DFT} 는 x_i 의 DFT이다. 유사하게, 역변환은 다음과 같이 된다.

$$x_i = W x_i^{DFT} \quad (14)$$

블록 토폴리츠 행렬의 블록 순환 행렬 근사화는 영상 복원에서 영상입력 시스템 행렬의 역행렬을 DFT를 이용하여 구하는데 사용되어져 왔다. 블록 토폴리츠 행렬의 블록 순환 행렬 근사화의 정당성은 참고문헌^[7]에서 입증된 바 있다. 블록 토폴리츠 행렬의 블록 순환 행렬 근사화^[7]와 식 (12)에서 정의된 대각화를 이용하면, 식 (9)의 C_x 는 다음과 같이 대각화될 수 있다.

$$\bar{W}^{-1} C_x \bar{W} = \begin{bmatrix} W^{-1} C_x^{11} W & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & W^{-1} C_x^{M^2 M^2} W \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서, $W^{-1} C_x^i W$ 의 대각 성분들은 i 번째 부분영상의 공분산 행렬을 2차원 DFT를 통하여 대각화한 것으로, C_x^i 의 원소들을 DFT한 값을 갖는다.

영상 열화 과정 (1)을 재정렬된 g, f, n 으로 정의한 후, 식 (2)의 양변에 \bar{W}^{-1} 을 곱하면 각각의 부분 영상에 대하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$W^{-1} f_i = W^{-1} f_{i+} + (W^{-1} C_f^i W) (W^{-1} C_g^i W)^{-1}$$

$$W^{-1} (g_i - \bar{g}_i), \text{ for } i = 1, 2, \dots, M^2. \quad (16)$$

C_g 는 $g - \bar{g}$ 의 자기상관관계 (autocorrelation) 행렬이고, $C_f^i = C_g^i - C_n^i$, $E(f) = E(g)$ 이므로 식 (16)을 주파수 영역에서 i 번째 부분영상에 대하여 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\hat{F}_i(u_1, u_2) = \bar{G}_i(u_1, u_2) + \frac{S_{g_i - \bar{g}_i}(u_1, u_2) - S_{n_i}(u_1, u_2)}{S_{g_i - \bar{g}_i}(u_1, u_2)} \times (g_i(u_1, u_2) - \bar{g}_i(u_1, u_2))$$

for $i=1, \dots, M^2$ and $u_1, u_2=0, 1, \dots, N^2-1$ (17)

여기서 $\hat{F}_i, G_i, \bar{G}_i$ 는 각각 f_i, g_i, \bar{g}_i 의 DFT이고, $S_{g_i - \bar{g}_i}(u_1, u_2), S_{n_i}(u_1, u_2)$ 는 각각 $g_i - \bar{g}_i$ 와 n_i 의 파워 스펙트럼 (power spectrum)이다. 식 (17)의 필터링된 결과 $\hat{f}_i(u)$ 는 다음과 같이 해석될 수 있다. $S_{g_i - \bar{g}_i}(u_1, u_2)$ 는 신호의 고주파 성분의 파워를 나타낸다. 영상의 평탄한 영역에서는 $S_{g_i - \bar{g}_i}(u_1, u_2) \approx S_{n_i}(u_1, u_2)$ 이므로 필터링된 결과는 잡음이 긴 영상의 국부 평균값이 되어 잡음을 평활화 (smoothing)시킨다. 한편, 영상의 에지 영역에서는 $S_{g_i - \bar{g}_i}(u_1, u_2) \gg S_{n_i}(u_1, u_2)$ 이므로, 필터링된 결과는 국부 평균값에 신호의 고주파 성분을 더 더해준 결과가 되어 영상의 선명도가 잘 보존되게 된다. 신호 독립적인 가산 잡음을 고려할 때, 영상입력시스템에서 $S_{n_i}(u)$ 는 측정할 수 있다고 가정한다.^[8]

IV. 실험결과 및 분석

제한된 잡음제거 방식의 성능을 평가하기 위하여 테스트 영상에 백색 잡음을 부가한 후 잡음제거에 대한 주관적 평가와 ISNR (Improved SNR) 및 MSE 관점에서의 객관적 평가를 수행해 보았다. 제안된 필터는 식 (4)와 (5)의 샘플 평균 및 분산을 이용한 LMMSE 필터와 식 (6)과 (19)의 가중치 평균 및 분산을 이용한 WLLMMSE 필터의 결과와 비교되었다. 이 실험에서는 7X7 2차원 마스크가 사용되었고 가중치 함수의 임계치는 60이 사용되었으며, 부분영상의 크기는 8x8로 고정

되었다.

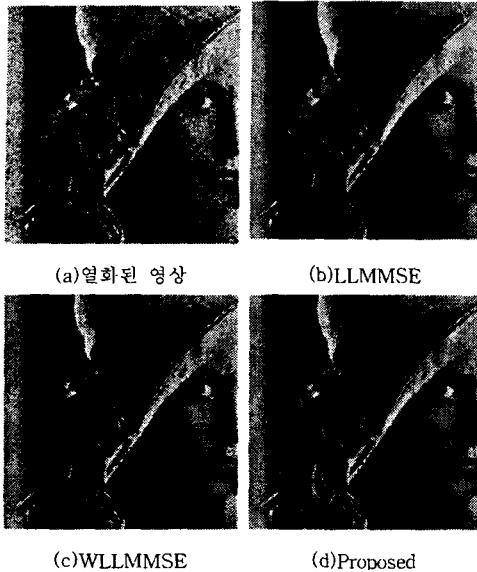


그림 1 : 필터링된 결과

그림 1은 10dB 가산 가우시안 잡음이 첨가된 영상에 대한 필터링된 결과를 보여준다. 그림 1(b)의 LMMSE의 결과와 비교했을 때, 그림 1(c)의 WLLMMSE의 결과는 국부 통계치가 에지를 가로질러 계산되어지지 않아 시각적으로 더 좋은 결과를 나타낸다. 이러한 결과는 표 1의 ISNR 및 MSE에도 반영되어 WLLMMSE의 객관적 성능이 더 우수함을 알 수 있다. 하지만, 이러한 NMNV 모델에 근거한 필터링의 결과에는 화소간의 상관관계가 없다는 가정으로 인하여 영상의 세부 정보들이 훼손되거나 에지 부분의 잡음이 잘 제거되지 않고 있다. 반면에, 상관관계 가정에 근거한 제안된 필터의 결과에는 잡음을 잘 제거 하면서도 영상의 세부 정보들이 보존되어 있음이 그림 1(d)에서 시각적으로 관찰되어 지며, 이러한 결과는 표 1의 정량적 측정에도 반영되어 제안된 필터의 결과가 높은 ISNR 및 낮은 MSE를 가진다.

Algorithm	LLMMSE	WLLMMSE	Proposed
MSE	94.06	88.54	52.11
ISNR(dB)	4.58	4.84	7.14

표 1 : 결과영상에 대한 비교

V. 결론

본 논문에서는 LMMSE 필터를 바탕으로 영상의 비정적 상관관계 특성을 고려하면서도 계산적으로 효율적인 적응적 잡음제거 알고리즘을 제안하였다. 비대각 공분

산 행렬의 역행렬을 계산 량의 부담 없이 계산하기 위하여, 본 논문에서는 영상의 평균값이 비정적이고 화소간의 정적인 상관관계가 오직 이웃하는 부분영상에만 존재한다고 가정한다. 다시 말해서, 각각의 부분영상은 비정적인 평균값에 대하여 서로 다른 정적인 상관관계 구조를 가진다고 가정된다. 제안된 영상 모델의 정당성을 정규화된 차영상을 조사함으로써 규명하였다. 벡터 재정렬과 블록 토플리즈 행렬의 블록 순환 행렬 근사화를 통하여 공분산 행렬의 특수한 구조를 이용, FFT에 기반한 LMMSE 필터를 유도하였다. 실험 결과, 제안한 필터의 결과가 NMNV 영상모델에 근거한 필터의 결과보다 성능이 더 좋음이 관찰되었다. 영상의 비정적 상관관계 가정을 통하여 개선된 결과가 정량적 평가 및 시각적인 측면에서 확인되었다.

Reference

- [1]B. R. Hunt and T. M. Cannon, "Nonstationary assumptions for Gaussian models of images," IEEE Trans. Syst., Man., Cybern., vol. SMC-6, pp. 876-881, Dec., 1976.
- [2]D. T. Kuan et al, "Adaptive Noise Smoothing Filter for Images with Signal-Dependent Noise," IEEE Trans. Pattern Anal., Machine., Intell., vol. PAMI-7, no. 2, pp. 165-177, 1985.
- [3]S. Jiang and A. A. Sawchuk, "Noise Updating repeated Wiener filter and other adaptive noise smoothing filters using local image statistics," Applied Optics, vol. 25, no. 14, pp. 2326-2337, July, 1986.
- [4]W. J. Song and W. A. Pearlman, "Edge-Preserving Noise Filtering Based on Adaptive Windowing," IEEE Trans. Circuits and Systems., vol. 35, no. 8, pp. 1048-1055, Aug., 1988.
- [5]R. M. Rangayyan, M. Ciuc, and F. Faghieh, "Adaptive neighborhood filtering of images corrupted by signal-dependent noise," Applied Optics, vol. 37, no. 20, pp. 4477-4487, July, 1998.
- [6]B. R. Hunt, "The application of constrained least squares estimation to image restoration by digital computer," IEEE Trans. Comput., vol. C-22, pp. 805-812, 1973.
- [7]R. M. Gray, "On the asymptotic eigenvalue distribution of Toeplitz matrices," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-18, pp. 725-730, Nov., 1972.
- [8]H. C. Andrews and B. R. Hunt, Digital Image Restoration. NJ: Prentice-Hall, 1977.