하이퍼큐브에서의 정점을 공유하지 않는 커버링사이클 집합

박 원, 임 형 석
전남대학교 전산학과
전화 : 062-530-0755 / 팩스 : 062-530-3439

Vertex disjoint covering cycle set in hypercubes

Won Park, Hyeong-Seok Lim
Dept. of Computer Science, Chonnam National University
E-mail : eurobeat@dreamwiz.com

Abstract

In interconnection network for parallel processing, the cycle partitioning problem for parallel transmission with faulty vertieces or edges is very important. In this paper, we assume that $k(\leq m-1)$ edges do not share any vertices of m dimension hypercube Q_m and show that it is possible to construct a cycle set which consists of k cycles covering all the vertices of the hypercube and one cycle including one of the given edges. This cycle set can be used to parallel transmission between two vertices joined by faulty edges.

I. 서론

병렬처리를 위한 컴퓨터는 크게 공유 기억 장치를 갖는 다중 프로세서 시스템과 분산 기억 장치를 갖는 다중 컴퓨터 시스템으로 나눌 수 있다. 다중 프로세서 시스템은 공유 기억 장치 접근 시 병목 현상으로 시스템 성능의 저하를 초래할 수 있으며 고장 허용도가 낮다. 반면에 분산 기억 장치를 갖는 다중 컴퓨터 시스템은 고장 노드들을 사용하지 않음으로써 쉽게 고장을 극복할 수 있으므로 대규모의 프로세서들을 사용하기 위해서는 분산 기억 장치를 갖는 메시지 전송 방식의 다중 컴퓨터가 선호되고 있다. 다중 컴퓨터 시스템에서 각 프로세서들은 각각의 지역 기억장치를 갖고, 프로세서들은 상호 연결망에 의해 연결된다. 이들 프로세서들 사이의 통신은 상호 연결망을 통해 메시지 전송에 의해 이루어진다. 여기에서 메시지 전송이란 데이터와 코드들이 한 프로세서에서 다른 프로세서로 가장 가까운 인접 프로세서 열을 따라감으로써 전송됨을 의미한다. 상호 연결망의 구조 및 프로세서 간의 통신 방법, 프로세서 구조, 그리고 이를 지원하는 시스템 소프트웨어 등이 다중 컴퓨터 시스템의 성능에 크게 영향을 미친다.

이 중 다중 컴퓨터의 프로세서들을 연결하기 위한 상호 연결망 구조는 전체 시스템의 성능 및 시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다. 지금까지 많은 상호 연결망들이 제안 되었는데 이들 중 가장 널리 알려지고 사용되고 있는 것 중의 하나가 하이퍼큐브이다.

하이퍼큐브는 그것이 지닌 정규성, 재귀적 구조, 분할 가능성, 강한 연결도 등 여러 장점 때문에 병렬처리 시스템에서도 유용하게 쓰이고 있다[2]. 상호 연결망을 평가하는 여러 가지 망 척도 중 하드웨어의 비용과 관련된 분지수와 메시지의 전송시간과 관련된 지름은 상호간에 상관관계를 가지고 있다. 같은 크기의 노드를 갖는 다른 상호 연결망들과 비교하여볼 때 하이퍼큐브는 분지수와 지름이 상대적으로 작기 때문에 여러 종류의 병렬 알고리즘을 효율적으로 수행할 수 있다.

상호연결망에서는 정점이나 에지의 고장시 병렬전송 가능 여부가 중요한 문제이다. 그에 따라 해밀토니언 사이클 또는 경로의 존재, 사이클 분할가능 여부등의 문제가 거론되며 증명되어 왔다. 재귀원형군 $G(2^m,2^k)$에서는 사이클의 길이가 l인 $\lfloor 2m/l \rfloor$개의 같은 크기

의 서로 소인 사이클이 존재함이 증명되었으며[6] 이 분그래프에서는 선택되어진 에지를 포함하며 정점을 서로 공유하지 않는 사이클들로의 분할이 가능함이 증명되었다[1].

본 논문에서는 하이퍼큐브에서 선택되어진 $k(\leq m-1)$개의 에지에 대해 각 에지를 포함하고 모든 정점을 지나는 사이클들로 분할이 가능함을 하이퍼 큐브의 재귀적인 성질을 이용하여 증명한다. 이는 하이퍼큐브의 차원보다 적은 수의 에지들이 고장일때 그 에지와 연결된 두 정점들사이에 병렬적인 데이터 전송이 가능함을 보여 준다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 그래 프의 몇가지 용어 및 정의, 본 논문에 필요한 하이퍼 큐브의 성질등을 먼저 살펴본 후, 3장에서는 하이퍼 큐브 내에서의 정점을 공유하지 않는 커버링 사이클 집합이 존재함을 증명하고, 4장에서는 증명결과를 이용하여 사이클 집합을 구성하는 알고리즘을 제시한다. 마지막으로 5장에서 결론을 맺도록 한다.

II. 용어 및 정의

2.1 정점을 공유하지 않는 커버링 사이클 집합

정의2-1. 연결된 그래프 내의 사이클 집합이 모든 정점을 포함하며 서로 공유하는 정점이 존재하지 않으면 이 사이클 집합을 정점을 공유하지 않는 커버링 사이클 집합(Vertex Disjoint Covering Cycle-set:VDCC)이라 한다.

[그림1]과 같이 연결된 그래프가 존재할 때, 이 그래프(G)에서 이루어지는 두 사이클 abfea, cdhgc는 서로 공유하는 정점이 없으며 그래프의 모든 정점을 포함한다. 이때, 이 두 사이클은 이 그래프의 VDCC(G)이다.

예2-3) VDCC(G) = {abfea, cdhgc}

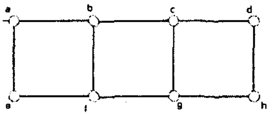


그림 1. 4X2 매쉬

2.2 하이퍼큐브의 속성

하이퍼큐브 Q_m은 2^m개의 정점과 그 정점들 간의 에지로 이루어진 그래프로서 여기서 m을 하이퍼큐브의 차원이라고 한다.

정점은 각각 m개의 비트인 $b_1b_2b_3...b_m$으로 표기할 수 있고 $1\leq i\leq m$인 i에 대해 $b_1...b_i...b_m$인 정점과 $b_1...\overline{b_i}...b_m$인 정점끼리 연결되어 모두 $m2^{m-1}$개의 에지가 존재하며 각 정점의 차수는 m으로써 동일하다.[2] 이 때 i번째 비트에 대해 연결된 에지를 i차원 에지라 한다. 하이퍼큐브는 정점 및 에지에 대해 대칭(symmetric)이며 해밀토니언 사이클을 갖는다[3,4].

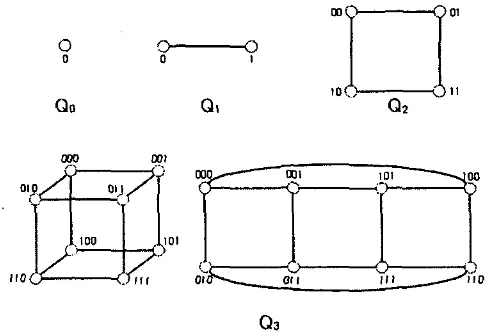


그림 2. 0~3차원 하이퍼큐브

2.3 하이퍼큐브의 대칭

정의2-2. m차원 하이퍼큐브 내에서 i차원의 에지로 연결되어 있는 두 정점을 i차원 에지에 대해 서로 대칭인 정점이라하며 그 정점에 연결되있는 $j(1\leq j\leq m, j\neq i)$차원 에지들도 서로 대칭이라 한다.

2.4 하이퍼큐브의 재귀적 성질

m차원 하이퍼큐브 Q_m은 두 개의 m-1차원 하이퍼큐브 Q_{m-1}(Q^0_{m-1}과 Q^1_{m-1})을 이용해 생성할 수 있다. E_c를 Q^0_{m-1}과 Q^1_{m-1}을 연결하는 에지의 집합이라고 하면 다음과 같은 식이 성립한다[5].

$$E_c = \{\ (u,u')\,|\,(u,u'\in E(Q_m), u\in V(Q^0_{m-1})\ \text{and}\ u'\in V(Q^1_{m-1})\ \}$$

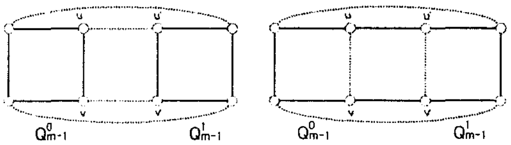
즉 u와 u'가 m-1차원 하이퍼큐브 Q^0_{m-1}과 Q^1_{m-1}의 서로 대칭되는 정점이라 하면 이 두 정점을 연결하는 에지들(m차원 에지)을 추가함으로써 m차원 하이퍼큐브 Q_m을 만들 수 있으며 반대로 m차원 하이퍼큐브에서 임의의 차원에 해당하는 에지를 제거함으로써 m-1차원 하이퍼큐브 2개로 분할 할 수 있다. 이 때 분할 할 수 있는 차원의 에지가 m가지 있으므로 분할 방법 역시 m가지이다.

2.5 하이퍼큐브의 사이클 머지

m차원 하이퍼큐브 Q_m를 Q^0_{m-1}과 Q^1_{m-1}로 구성한다고 가정할 때 Q^0_{m-1}내에 존재하는 하나의 사이클을 그

와 대칭으로 Q^1_{m-1}내에 존재하는 사이클과 머지하여 하나의 사이클로 만드는 방법에 대해 설명 한다.

[그림 3]의 (a)에서 Q^0_{m-1}내의 임의의 사이클과 그와 대칭되는 Q^1_{m-1}의 사이클이 있고 이 사이클 내의 모든 정점들은 각각 점선으로 표시한 에지들로 연결되어 있다. 이때 Q^0_{m-1}내의 임의의 인접한 두 정점 u, v 와 이와 대칭되는 Q^1_{m-1}내의 두 정점 u', v'를 택하여 u, v를 연결한 에지 (u,v)와 u', v'를 연결한 에지 (u',v')를 각각의 사이클에서 제거하고 서로 대칭되는 정점끼리 연결한 에지 (u,u'), (v,v')를 사이클에 추가하게 되면 (b)와 같이 하나의 사이클로 머지 할 수 있다.



(a) (b)

그림 3. 대칭되는 두 사이클 머지

III. 정점을 공유하지 않는 사이클 집합

본 장에서는 $m(\geq 2)$차원 하이퍼큐브 Q_m에서 $k(k\leq m-1)$개의 에지를 선택했을 때 각 사이클은 선택된 에지들 중 하나를 포함하고 정점을 공유하지 않는 커버링 사이클들이 존재함을 하이퍼큐브의 재귀적 특성을 이용하여 수학적 귀납법으로 증명한다. 그래프 내에 적어도 하나 이상의 사이클이 부그래프로서 존재하기 위해서는 최소한의 정점의 개수가 3개 이상이며 모든 정점의 차수가 2 이상이어야 한다. 그러므로 이 조건을 만족하는 하이퍼큐브는 2차원(Q_2) 이상이 되어야 한다.

정리3-1. $m(m\geq 2)$차원 하이퍼큐브 Q_m에서 정점을 공유하지 않는 $m-1$개 이하의 에지를 각각 포함하는 VDCC(Q_m)이 존재한다.

(증명) m에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다.
수학적 귀납법으로 증명하기 위한 귀납기초와 귀납가설는 다음과 같다.
귀납기초 : $m=2$ 일때 Q_2는 임의의 1개 이하의 에지를 선택하더라도 모든 정점을 지나는 한 개의 사이클을 구성 할 수 있다.

귀납가설 : $m\geq 2$인 모든 m에 대하여, Q_m에서 $m-1$개 이하의 정점을 공유하지 않는 커버링 사이클 집합을 구할 수 있다.

귀납가설이 성립한다고 가정하고, Q_{m+1}일 때 m개 이하의 VDCC(Q_{m+1})을 구할 수 있음을 보임으로써 본 가설이 성립함을 증명한다.

2.6에서 언급한 식 $Q_{m+1} = Q^0_m \cup (E_c) Q^1_m$ 의 전제하에 문제를 해결하기 위해 Q_{m+1}에서 m개의 에지를 선택하는 방법의 가지 수를 다음의 두 가지 경우로 나누어 보도록 한다.

경우1: 정수 i, j $(0\leq i<m,\ 0\leq j<m,\ i+j\leq m)$에 대해 Q^0_m에서 i개의 에지와 Q^1_m에서 j개의 에지를 선택한 경우
경우2: 한 쪽의 Q_m에서 m개의 에지를 선택한 경우

경우1: 귀납가설에 의해 Q_m에서 $m-1$ 이하의 에지에 대해 VDCC(Q_m) 이 존재하므로 $0\leq i<m$, $0\leq j<m$, $i+j\leq m$인 i, j 에 대해 Q^0_m과 Q^1_m에서 각각 i개, j개 씩의 VDCC(Q^0_m)과 VDCC(Q^1_m) 이 존재한다. 두 하이퍼큐브 사이에는 에지들만 존재하므로 $i+j$ $(\leq m)$개의 사이클은 Q_{m+1}의 모든 정점을 포함하게 된다. 그러므로 경우1은 항상 성립한다.

경우2: 귀납가설은 Q_m에서 $m-1$개 이하의 에지를 선택한 경우에 대해 가정했으나 본 경우는 m개의 에지를 선택한 경우이므로 귀납가설을 이용하기 위해 한 개의 에지(m번째 에지라 하자)를 제외한 나머지 $m-1$개의 에지에 대해 사이클을 구성하고 그 이후 마지막 m번째 에지를 고려하기로 한다.

귀납가설에 의해 m번째 에지를 제외한 $m-1$개의 에지로는 $m-1$개의 VDCC를 구할 수 있다. 여기에 m번째 에지를 추가하게 되면 이미 $m-1$개의 에지들에 대해 모든 정점들이 포함된 사이클들이 구성되었기 때문에 m번째 에지의 위치는 다음과 같은 세가지 경우로 다시 나누어지게 된다.

경우2-1 : m번째 에지가 두 사이클을 연결하는 경우
경우2-2 : m번째 에지가 한 사이클에 포함된 경우
경우2-3 : m번째 에지가 한 사이클을 횡단하는 경우

경우2는 모두 Q_{m+1}의 두 서브하이퍼큐브인 Q^0_m과 Q^1_m이 서로 대칭이 되도록 사이클을 구성한 후 m번째 에지와 연결이 되 있거나(경우2-1) 또는 m번째 에지를 포함 또는 횡단하는(경우2-2, 2-3) 사이클이 아닌 각각 독립적인 사이클들은 2.5에서 언급한 방법으로 서로 대칭되는 사이클끼리의 머지를 통해 각각 $m-3$(경우2-1), $m-2$(경우2-2, 2-3)개의 사이클을 구성 할 수 있다. 그리고 경우2-1, 경우2-2 는 Q^0_m의 m번째 에지에

연결되어 있는 정점과 인접한 정점들로의 에지를 삭제하고 m번째 에지에 연결되있는 정점과 인접한 정점들을 대칭으로 하는 Q^1_m의 각각의 정점들과의 에지를 사이클에 추가시켜 경우2-1은 3개, 경우2-2는 2개의 사이클을 구성한다. 경우2-3은 Q^0_m의 m번째 에지에 연결되어 있는 정점과 인접한 정점들 중 다른 선택되어진 에지가 있는 방향으로 향하는 정점을 선택하여 그 정점들로의 에지를 삭제하고 m번째 에지를 포함하는 사이클에서는 m번째 에지가 아닌 다른 임의의 에지를 삭제하여 Q^1_m의 대칭되는 정점간의 머지를 통해 2개의 사이클을 구성한다. 그리하여 경우2-1, 2-2, 2-3 모두 m개의 사이클이 존재하게 된다. ■

IV. 사이클 구성 알고리즘

위의 증명결과에 따라 m차원 하이퍼큐브가 주어졌을 때 VDCC를 구하는 알고리즘을 제시한다. 먼저 사이클 집합과 에지 집합에 대한 형식과 연산을 다음과 같이 정의한다.

VDCC : Vertex Disjoint Covering Cycle-set {*abcd, efgh, ...* }

cycle-set operation

VDCC = *VDCC1* + *VDCC2* : *VDCC1*과 *VDCC2*의 사이클들을 더한 사이클 집합

e_i : i th selected edge

ES : Edge-Set $\{e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}\}$

edge-set operation

ES = *ES1* - *ES2* : *ES1*에서 *ES2*의 에지들을 제거한 에지 집합

위 형식 및 연산을 이용하여 입력값이 Q_m, *ES*, 출력값이 *VDCC*인 재귀함수 *create_VDCC*를 선언하면 다음과 같다..

Algorithm

```
function construct_VDCC (Q_m, ES)
var VDCC1, VDCC2;
var ES1;
  if number_of_elements(ES) = 1 then
    return a hamiltonian cycle include ES;
  else
    devide Q_m into Q^0_m-1 and Q^1_m-1 by i dimension
edges what don't include any selected edges;
     if Q^0_m-1(or Q^1_m-1) has all edges of ES then
       ES1 = ES - {e_m-1};
       VDCC = construct_VDCC (Q^0_m-1(or Q^1_m-1),
ES1);
       merge cycles Q^0_m-1 and Q^1_m-1 with the method
of Case2-1, Case2-2 or Case2-3;
       return VDCC;
     else
       VDCC1 = construct_VDCC (Q^0_m-1, ES1);
       VDCC2 = construct_VDCC (Q^1_m-1, ES1);
       VDCC = VDCC1 + VDCC2;
       return VDCC;
     end if
  end if
end function
```

V. 결론 및 추후 연구

m차원 하이퍼큐브에서 m-1개 이하의 선택되어진 에지를 각각 포함하며 모든 정점들을 커버하는 사이클들이 존재함을 증명하고 그에 따른 알고리즘을 제시하였다.

이로써 하이퍼큐브의 차원 이하의 개수의 에지 고장시 그 에지에 연결되어 있는 두 정점들 간의 독립적인 병렬전송이 가능함을 알 수 있다.

향후 연구 과제로는 이 m-1개 이하의 에지를 모두 포함하는 해밀토니언 사이클을 구할 수 있는 지의 문제와 하이퍼큐브에서 파생된 상호연결망과 재귀원형군에서의 동일한 문제 등이 있다.

참고문헌

[1] G. Chen, "Vertex-Disjoint Cycles Containing Specified Edges in a Bipartite Graph," Australas. J. Combin. 23, 37-48, 2001.

[2] J.S. Fu, "Fault-tolerant cycle embedding in the hypercube," Parallel Computing 29, 821-832, 2003

[3] F.T. Leighton, Introduction To Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes, Morgan Kaufmann, CA, 1992

[4] Y. Saad and M.H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," IEEE Transactions On Computers, Vol. 37, 867-872, 1988

[5] C.H. Tsai, J.J.M. Tan, T. Liang and L.H. Hsu, "Fault-tolerant hamiltonian laceability of hypercubes," Information Processing Letters 83, 301-306, 2002

[6] 박정흠, 좌경룡, "재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 사이클과 그래프 Invariant," 한국정보과학회 논문지 26(8) 999-1008, 1999