2003년도 대한전자공학회 하계종합학술대회 논문집 제26권 제1호

시공간 부호의 기하학적 균일성

정영석, 이재홍
서울대학교 전기컴퓨터공학부

Geometrical Uniformity For Space-Time Codes

Young Seok Jung and Jae Hong Lee
School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National University
E-mail: jys3@snu.ac.kr

Abstract

A geometrically uniform code in AWGN channel has strong symmetry properties such as a) the distance profiles form codewords in $\mathcal{C}$ to all other codewords are all the same, and b) all Voronoi regions of codewords in $\mathcal{C}$ have the same shape. Such properties make the word error probability of geometrically uniform codes be transparent to the transmitted codeword. In this paper, we extend the geometrically uniform codes in AWGN channel to the geometrical uniform codes in fading channel with multiple transmit antennas.

I. 서론

Tarokh 등이 복수개의 송신 안테나를 사용하는 페이딩 환경에서 고속 전송을 위한 효과적인 채널 코딩 기법으로 시공간 부호(space-time codes)를 제안한 이후로 [2], 시공간 부호 설계 및 검색에 관한 많은 연구가 있었다[3]-[7]. 논문 [2]에서 Tarokh 등은 시공간 부호의 두 가지 설계 기준인 랭크기준과 행렬식 기준을 제안하였고, 임의의 설계 방법으로 최대 다이버시티 이득 2를 제공하는 시공간 격자상 부호를 제시한 바 있다. 하지만 설계 기준을 만족시키는 일반적인 시공간 부호의 설계 기법 부재로 인해 설계 기준을 만족하는 시공간 부호의 검색에 대한 연구도 진행되었다[4]-[7]. 한편 지금까지 알려진 대부분의 시공간 부호들은 부호어쌍간의 오율(pairwise error probability) 분포가 부호어에 따라 달라지는 것으로 알려져 있는데, 이것은 Tarokh 등이 [2]에서 시공간 부호 분석시 자신들의 부호가 기하학적 균일성을 갖는다는 가정의 반례가 된다. 이렇게 대부분의 시공간 부호가 기하학적 균일성을 가지지 않는다는 특성은 부호검색의 복잡도를 증가시키며 한편으론 일반적인 시공간 부호 설계를 어렵게 한다.

가산성 백색 가우시안 잡음 (AWGN) 채널에서의 기하학적 균일성에 대한 연구는 Forney 에 의해 시작되었으며[1], 본 논문에서는 AWGN 채널에서 정의된 기하학적 균일성을 시공간 부호가 정의되는 복수개의 안테나가 사용되는 MIMO(Multiple-Input Multiple-Output) 채널로 확장한다.

II. $\mathcal{H}$-Symmetry

본 절에서는 먼저 시공간 부호의 시스템 모델을 제시하고, AWGN 채널에서 부호의 기하학적 균일성 논의에 필요한 등장변환(isometry)과 유사한 역할을 하는 $\mathcal{H}$-symmetry를 소개하도록 하겠다.

시공간 부호기의 입력은 $\bar{u}=(u_1\ u_2\ \cdots\ u_{K\cdot L})$로 표시되는 길이기 $K\cdot L$ 인 이진시퀀스이고 출력은 $\bar{c}=(c_1\ c_2\ \cdots\ c_L)$ 로 표시되는 길이가 L 인 라벨 알파벳(label alphabet) 상의 시퀀스이다. 부호화된 심볼 c_t 는 라벨링(labeling)에 의해 송신 신호 집합(transmit signal set)내의 송신 신호 $\mathbf{s}_t=(s_t^1 s_t^2 \cdots s_t^n)^T$ 로 맵핑된 후 n 개의 송신 안테나를 통해 전송된다. 전송된 신호는 송수신 안테나에 대해 독립적인 레일레이 페이딩 채널을 통해

전달되는 것으로 가정한다. 그러면 시간 t 에서 j 번째 수신 안테나에서 수신되는 신호 r_t^j 는 다음과 같다.

$$r_t^j = \sum_{i=1}^{n} h_t^{i\to j} \cdot s_t^i \sqrt{E_S} + n_t^j \tag{1}$$

여기서 $h_t^{i\to j}$ 는 i 번째 송신 안테나와 j 번째 수신 안테나 사이의 채널이득(channel gain)이며, n_t^j 는 시간 t 에서 j 번째 수신 안테나에서의 차원당 분산이 $N_0/2$ 인 가산성 백색 가우시안 잡음이다. (1)식을 행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

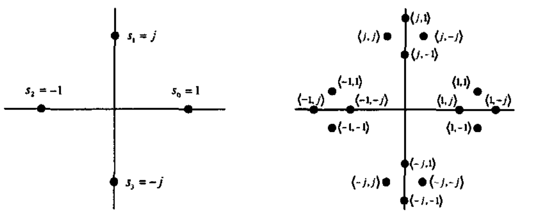
$$\tilde{r}_t = \sqrt{E_S}\mathcal{H}_t \cdot \mathbf{s}_t + n_t \tag{2}$$

여기서 $\tilde{r}_t = \begin{pmatrix} r_t^1 \\ r_t^2 \\ \vdots \\ r_t^m \end{pmatrix}$, $\mathcal{H}_t = \begin{pmatrix} h_t^{1\to 1} & h_t^{2\to 1} & \cdots & h_t^{n\to 1} \\ h_t^{1\to 2} & h_t^{2\to 2} & \cdots & h_t^{n\to 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_t^{1\to m} & h_t^{2\to m} & \cdots & h_t^{n\to m} \end{pmatrix}$, $n_t = \begin{pmatrix} n_t^1 \\ n_t^2 \\ \vdots \\ n_t^m \end{pmatrix}$ 이다.

기하학적 균일성을 정의하기 위해서는 우선 부호집합에 거리(distance)를 정의해야 한다. 이때 부호 집합상에서 정의된 거리는 부호어쌍간의 오율을 잘 대변해야 한다. AWGN 채널에서는 유클리디안 거리(Euclidean distance)가 위의 특성을 가지기 때문에 부호 집합의 거리로 이용할 수 있지만, 시공간 부호에는 부호 집합에 거리를 정의하는 것이 어렵다. 이것이 AWGN 채널에서 얻어진 기하학적 균일성에 대한 연구 결과를 시공간 부호에 적용하기 어렵게 한다. 본 논문에서는 부호 집합에 거리를 정의하지 않고 시공간 부호의 기하학적 균일성을 논의한다.

정의 1 : MIMO 채널에서 신호성좌점 Ω 내의 신호를 원소로 갖는 n-tuple 열벡터를 *송신 신호* $\mathbf{s} = (s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_n})^T$ 라 하자. 수신 신호(received signal)에서 가산성 백색 가우시안 잡음을 제외한 성분을 *수신 신호 성분(receive signal)* $r_s(s,\mathcal{H})$ 라 하자. 그러면 $\mathbf{r}_s(\mathbf{s},\mathcal{H}) = \mathcal{H}\cdot\mathbf{s}$ 이다. *수신 신호성분 집합*은 수신 신호성분들의 집합으로 $\mathcal{R}(\Omega^n,\mathcal{H}) = \{\mathbf{r}_s(\mathbf{s},\mathcal{H}) | \mathbf{s}\in\Omega^n\}$ 와 같다. *k 번째 기본 수신 신호성분*은 k 번째 송신 안테나에서만 신호를 송신할 경우 수신되는 신호로 $\mathcal{H}(k)\cdot s_{i_k}$ 이다. 그리고 k 번째 기본 수신 신호성분 집합 $\mathcal{R}(\Omega^n,\mathcal{H})$ 은 $\{\mathcal{H}(k)\cdot s | s\in\Omega\}$ 이다. *$\mathcal{E}$-집합*은 수신 신호성분 집합의 모임이라고 하자.

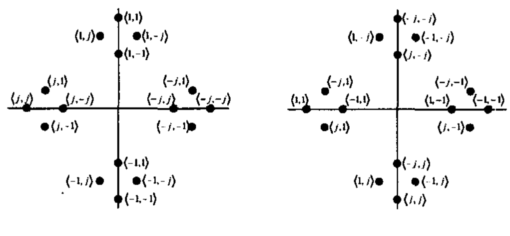
채널 행렬 $\mathcal{H}$ 의 확률 밀도함수를 $p(\mathcal{H})$ 라 하자. 그러면 MIMO 채널 상에서의 전송은 $p(\mathcal{H})$ 의 확률로 수신 신호성분 집합을 선택하여 가산성 백색 가우시안 채널 상에서의 전송으로 생각할 수 있다. (이 때 $p(\mathcal{H})$ 를 수신 신호성분 집합의 선택 확률이라고 부르자.) 따라서 만약 모든 수신 신호성분 집합이 임의의 채널 행렬에 대해 유클리드 거리하에서 기하학적으로 균일하다면 우리는 송신 신호 집합이 MIMO 채널에서 기하학적으로 균일하다고 말할 수 있을 것이다. 그림 1 유클리디안 거리하에서 기하학적으로 균일한 신호 집합 Ω 와 주어진 채널 행렬 $\mathcal{H}_1$ 의 수신 신호성분 집합을 보여주고 있다. 그림 1 에서와 마찬가지로 대부분의 수신 신호성분 집합은 대부분의 채널 행렬에 대해 유클리드 거리하에서 기하학적으로 균일하지 않다. 따라서 임의의 모든 채널 행렬에 대한 수신 신호성분 집합이 유클리드 거리하에서 기하학적으로 균일해야 한다는 것은 지나치게 엄격한 조건이다. AWGN 채널에서와 마찬가지로 MIMO 채널에서의 기하학적 균일성도 송신 신호 집합의 신호들이 중요한 특성들에 대해서만 균일성을 가짐을 보이는 것으로 충분하다.



(a) 기하학적 균일 신호 집합 Ω　(b) 채널 행렬 $\mathcal{H}_1 = (1\ \ 0.25j)$ 에서 수신 신호성분 집합

그림 1. 신호 성좌점 Ω 와 수신 신호성분 집합 여기서 $\langle a,b\rangle = \mathcal{R}((a\ \ b)^T,\mathcal{H}_1)$ 이다.

다른 채널 행렬에 대해 수신 신호성분 집합은 동일할 수 있다. 그림 2 는 $\mathcal{H}_1$ 와 다른 $\mathcal{H}_2$ 와 $\mathcal{H}_3$ 에 대한 수신 신호성분 집합이 $\mathcal{H}_1$ 의 수신 신호성분 집합과 동일함을 보여준다.



(a) $\mathcal{H}_2 = (j\ \ 0.25j)$　(b) $\mathcal{H}_3 = (-0.25\ \ -1)$

그림 2. $\mathcal{R}(\Omega^2,\mathcal{H}_1)$ 와 약하게 일치하는 수신 신호성분 집합 $\mathcal{R}(\Omega^2,\mathcal{H}_2)$ 와 $\mathcal{R}(\Omega^n,\mathcal{H}_3)$.

정의 2 : 만약 두 수신 신호성분 집합의 구성원소가 동일하고 같은 선택 확률을 갖는다면 두 수신 신호성분 집합은 *약하게 일치한다(weakly congruent)*고 한다. 그 때 관련된 두 채널 행렬은 *약하게 관련되어(weakly related)* 있다고 한다. 만약 기본 수신 신호성분 집합이 순차적으로 동일하다면 두 수신신호신호 집합은 *강하게 일치한다(strongly congruent)*고 한다. 그 때 관련된 두 채널 행렬은 강하게 관련되어*(strongly related)* 있다고 한다.

그림 2의 $\mathcal{R}(\Omega^2,\mathcal{H}_2)$ 와 $\mathcal{R}(\Omega^2,\mathcal{H}_3)$는 모두 그림 1의 $\mathcal{R}(\Omega^2,\mathcal{H}_1)$와 약하게 일치한다. 하지만 $\mathcal{R}(\Omega^2,\mathcal{H}_2)$는 $\mathcal{R}(\Omega^2,\mathcal{H}_1)$ 와 강하게 일치한 반면, $\mathcal{R}(\Omega^2,\mathcal{H}_3)$ 는 $\mathcal{R}(\Omega^2,\mathcal{H}_1)$와 강하게 일치하지 않는다.

정리 1 : 두 수신 신호성분 집합이 약하게 일치한다면 두 수신 신호성분의 $\mathcal{E}$-set들은 동일하다.

증명: 정리 1의 증명은 지면의 제약으로 생략한다.

정의 3 : 임의의 주어진 채널 $\mathcal{H}$ 에 대해 $p(\mathcal{H})=p(\mathcal{H}')$ 이고 $\mathbf{r}_s(\mathbf{s},\mathcal{H})=\mathbf{r}_s(\pi_{\mathcal{H},\mathcal{H}'}(\mathbf{s}),\mathcal{H}')$, $\mathbf{s}\in\Omega^n$ 인 $\mathcal{H}'$ 가 존재하면 송신 신호 집합에 대한 치환(permutation) $\pi_{\mathcal{H},\mathcal{H}'}$를 *$\mathcal{H}$-symmetry* 라 한다. 만일 $\mathcal{H}$ 와 $\mathcal{H}'$이 강하게 관련되어 있다면 이 때의 $\mathcal{H}$-symmetry 를 *기본(standard) $\mathcal{H}$-symmetry* 라고 한다. 송신 신호 집합의 $\mathcal{H}$-symmetry 들은 함수 합성의 연산하에서 군(group)을 형성하는데 이렇게 형성된 군을 *$\mathcal{H}$-symmetry 군* $\Gamma(\Omega^n)$이라고 한다. $\mathcal{H}$-symmetry 군의 부분군으로 기본 $\mathcal{H}$-symmetry 들로 구성된 군을 *기본 $\mathcal{H}$-symmetry 군* $\Gamma_s(\Omega^n)$ 이라고 한다.

W를 $n\times n$ 유니타리(unitary) 대각선(diagonal) 행렬이라고하고 P를 $n\times n$ 치환행렬이라고 하자. 그러면 정리 1을 통해 $\mathcal{H}$-symmetry 는 $\pi_{\mathcal{H},\mathcal{H}'}(\mathbf{s})=PW\mathbf{s}$과 같은 형태이어야 함을 알 수 있다.

정의 4 : 송신 신호 집합 Ω^n 내의 임의의 주어진 두 송신 신호 $\mathbf{s}$와 $\mathbf{s}'$에 대해 $\pi_{\mathcal{H},\mathcal{H}'}(\mathbf{s})=\mathbf{s}'$를 만족하는 적어도 하나이상의 $\mathcal{H}$-symmetry 가 존재한다면 그 때 송신 신호 집합 Ω^n를 *MIMO 채널에서 기하학적으로 균일하다*고 한다. 이것은 *$\mathcal{H}$-symmetry 군* $\Gamma(\Omega^n)$의 송신 신호 집합으로의 작용(action)이 추이적(transitive)이거나 *$\mathcal{H}$-symmetry 군* $\Gamma(\Omega^n)$ 하에서 임의의 송신 신호의 궤도(orbit)가 송신 신호집합과 동일한 경우를 의미한다.

정의 5 : 임의의 송신 신호로부터 송신 신호 집합을 생성하는데 필요한 최소한의 $\mathcal{H}$-symmetry 들로 이루어진 $\mathcal{H}$-symmetry 군의 부분군을 송신 신호 집합의 *생성군(generating group)*이라고 한다.

정리 2 : 송신 신호 집합 Ω^n이 기하학적 균일 시공간 신호 집합이라면 각 송신 신호의 보로노이영역(Voronoi region)의 확률분포와 부호어쌍간의 오율 분포가 동일하다.

증명 : $\mathfrak{R}_V(\mathbf{s}_1,\mathcal{H}_1)$를 송신 신호 $\mathbf{s}_1$의 채널 행렬 $\mathcal{H}_1$에서의 보로노이영역이라고 하자. 그러면 보로노이영역의 정의에 의해 $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^m$ 이 보로노이영역의 원소라면 $\|\mathbf{x}-\mathcal{H}_1\cdot\mathbf{s}_1\|^2=\min_{\mathbf{s}_3\in\Omega^n}\|\mathbf{x}-\mathcal{H}_1\cdot\mathbf{s}_3\|^2$ 이 성립한다. 송신 신호 집합이 기하학적으로 균일하기 때문에 송신 신호 $\mathbf{s}_2$ 에 대해 $\mathbf{s}_1$을 $\mathbf{s}_2$로 맵핑하는 $\mathcal{H}$-symmetry 가 존재한다. 그러면

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-\mathcal{H}_2\cdot\mathbf{s}_2\|^2&=\min_{\mathbf{s}_4\in\Omega^n}\|\mathbf{x}-\mathcal{H}_2\cdot\mathbf{s}_4\|^2=\min_{\mathbf{s}_3\in\Omega^n}\|\mathbf{x}-\mathcal{H}_2\cdot\pi_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2}(\mathbf{s}_3)\|^2\\&=\min_{\mathbf{s}_3\in\Omega^n}\|\mathbf{x}-\mathcal{H}_1\cdot\mathbf{s}_3\|^2=\|\mathbf{x}-\mathcal{H}_1\cdot\mathbf{s}_1\|^2\end{aligned}$$

이기 때문에 $\mathbf{x}$는 $\mathfrak{R}_V(\pi_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2}(\mathbf{s}_1),\mathcal{H}_2)$의 원소이다. 따라서 $\mathfrak{R}_V(\mathbf{s}_1,\mathcal{H}_1)$와 $\mathfrak{R}_V(\mathbf{s}_2,\mathcal{H}_2)$는 같은 집합이되고, $\mathcal{H}_1$과 $\mathcal{H}_2$는 같은 확률밀도함수를 가지므로 보로노이영역은 동일한 확률분포를 갖는다. 비슷한 방법으로 부호어쌍간의 오률분포가 같다는 것을 아래와 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}p(\mathbf{s}_2\to\mathbf{s}_4:E_S/N_0)&=\int p(\mathbf{s}_2\to\mathbf{s}_4|\mathcal{H}_2,E_S/N_0)\cdot p(\mathcal{H}_2)\cdot d\mathcal{H}_2\\&=\int p(\pi_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2}(\mathbf{s}_1)\to\pi_{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2}(\mathbf{s}_3)|\mathcal{H}_2,E_S/N_0)\cdot p(\mathcal{H}_2)\cdot d\mathcal{H}_2\\&=\int p(\mathbf{s}_1\to\mathbf{s}_3|\mathcal{H}_1,E_S/N_0)\cdot p(\mathcal{H}_1)\cdot d\mathcal{H}_1\\&=p(\mathbf{s}_1\to\mathbf{s}_3:E_S/N_0)\end{aligned}$$

III.기하학적 균일 시공간 부호의 설계

본 절에서는 앞 절에서 MIMO 채널에서 정의한 송신 신호 집합의 생성군을 이용한 기하학적 균일 시공간 부호의 설계 방법을 소개하도록 한다. 이 방법은 논문 [1]에서 소개된 일반화된 잉여류 코드 (generalized coset code)설계방법과 동일한 방법이다. 이것은 AWGN 채널에서 정의된 등장변환과 본 논문에서 정의된 $\mathcal{H}$-symmetry 의 유사성에 기인한다.

정의 6 : $\mathcal{S}$를 MIMO 채널에서 기하학적 균일 시공간 신호 집합이라고 하자. 생성군 $U(\mathcal{S})$의 임의의 부분군 U' 에 의해 유발되는 송신 신호 집합의 분할(partition)을 *기하학적 균일 분할(geometrically uniform partition)* $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$ 이라고 한다. 기하학적 균일 분할 $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$

에서 부분군 U'의 어떤 잉여류를 $\pi_a U'$와 관련된 부분 분할은 $S'(a)=\bigcup_{\pi\in U'}\pi_a[\pi(\mathbf{s}_0)]$와 같이 주어진다.

정리 3 : S/S'를 기하학적 균일 분할이라고 하자. 그러면 기하학적 균일 분할의 부분분할은 MIMO 채널에서 기하학적으로 균일하고 각 부분분할은 MIMO 채널에서 기하학적으로 동등하고 각 부분분할의 생성군은 동형(isomorphic)이다.

증명 : 정리 3 의 증명은 [1]의 내용을 참고하여 증명 가능하다.

정의 7 : $\mathcal{S}$를 MIMO 채널에서 기하학적 균일 시공간 신호 집합이라고 하고 $\mathcal{S}$의 생성군을 $U(\mathcal{S})$라 하자. 임의의 군 분할 사슬(group partition chain) $U_0/U_1/\cdots/U_v$에 대한 $\mathcal{S}$의 *라벨군(label group)* $\mathcal{A}$는 인자군(factor group)들과 U_v의 직곱(direct product)과 동형이다. 즉 $\mathcal{A}=(U_0/U_1)\times(U_1/U_2)\times\cdots\times(U_{v-1}/U_v)\times U_v$이다. 그러면 라벨군 $\mathcal{A}$의 임의의 원소 $\mathbf{a}$는 동형사상에 의해 $(\pi_0 U_1,\cdots,\pi_{v-1}U_v,\pi_v)$로 맵핑된다. 송신 신호 집합 $\mathcal{S}$의 임의의 송신 신호 $\mathbf{s}_0$에 대해 라벨군 $\mathcal{A}$에서 $\mathcal{S}$로의 사상 $\mathcal{M}(\mathbf{a})=\{\pi_0 U_1 * \pi_1 U_2 * \cdots * \pi_v\}(s_0)$를 *$\mathcal{H}$-symmetric 변조함수(labeling)*이라고 한다. 여기서 이항연산 $*$는 다음과 같이 정의된다. $\pi U_i * \pi' U_j = (\pi * \pi')U_{\min(i,j)}$.

정의 8 : $\mathcal{S}$의 생성군 $U(\mathcal{S})$에 대한 군 분할 사슬에 의해 만들어진 라벨군을 $\mathcal{A}$라 하고 그 때 관련된 $\mathcal{H}$-symmetric 변조함수를 $\mathcal{M}$이라고 하자. 또 $\mathbf{C}$를 라벨군 $\mathcal{A}$상의 임의의 군부호(group code)라고 하자. 그러면 빠른 MIMO 채널상에서 *일반화된 잉여류 시공간 부호(generalized coset space-time codes)* $C(\mathcal{S};\bar{\mathcal{M}};\mathbf{C})$는 $\{\bar{\mathbf{s}}=\bar{\mathcal{M}}(\bar{\mathbf{c}}),\bar{\mathbf{c}}\in\mathbf{C}\}$이며, 여기서 $\bar{\mathcal{M}}:\mathcal{A}^L\to\mathcal{S}^L$는 $\mathcal{S}$의 $\mathcal{H}$-symmetric 변조함수 $\mathcal{M}$의 시퀀스 확장이다.

정리 4 : $C(\mathcal{S};\bar{\mathcal{M}};\mathbf{C})$이 일반화된 잉여류 시공간 부호라면 C와 라벨천이(label translate)들 $C(\mathcal{S};\bar{\mathcal{M}};\mathbf{C}\oplus\bar{\mathbf{a}})$는 MIMO 채널에서 기하학적으로 균일하고 서로 동등하며 동형인 생성군을 갖는다.

증명 : 정리 3을 시퀀스로 확장하면 증명된다.

본 절에서는 라벨군에서 군을 이루는 군부호와 송신 신호 집합과 관련된 생성군의 군 부할 사슬을 통해 얻어지는 변조함수를 통해 MIMO 채널에서 기하학적 균일 부호를 설계하는 방법을 보였다.

V. 결론

본 논문에서는 AWGN 채널에서 잘 정의된 기하학적 균일성을 MIMO 채널로 확장하였다. 또한 Forney에 의해 기하학적 균일 부호 생성 기법인 일반화된 잉여류 부호 설계를 적용하여 빠른 MIMO 채널상에서 기하학적 균일 시공간 부호의 설계방법을 제안하였다. 하지만 본 논문의 방법은 빠른 MIMO 채널에만 국한되어 있는 단점이 있다. 따라서 향후 시공간 부호의 주요 연구대상이 되는 느린 MIMO 채널에서의 기하학적 균일성에 대한 연구가 요구된다. 또한 본 논문에서 제안된 방법으로 우수한 성능의 기하학적 균일 시공간 부호의 설계에 대한 연구도 이루어져야 할 과제이다.

참고문헌

[1] G. D. Forney, Jr., "Geometrically uniform codes," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 37, pp. 1241-1260, Sept. 1991.

[2] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. R. Calderbank, "Space-time codes for high data wireless communication: Performance criterion and code construction," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 44, pp. 744-765, Mar. 1998.

[3] A. R. Hammons, Jr. and H. El Gamal, "On the theory of space-time codes for PSK modulation," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 46, pp. 524-542, Mar. 2000.

[4] S. Bäro, G. Bauch, and A. Hansmann, "Improved codes for space-time trellis-coded modulation," IEEE Commun. Lett., vol. 4, pp. 20-22, Jan. 2000.

[5] Q. Yan and R. S. Blum, "Optimum space-time convolutional codes," in Proc. WCNS2000, Chicago, IL, Sept. 2000, pp. 1351-1355.

[6] W. Firmanto, B. S. Vucetic, and J. Yuan, "Space-time TCM with improved performance on fast fading channels," IEEE Commun. Lett., vol. 5, pp. 154-156, Apr. 2001.

[7] Y. S. Jung and J. H. Lee, "New measure of coding gain for space-time trellis codes," in Proc. ISIT2001, Washington, D.C., June 2001. p. 198.

[8] J. B. Fraleigh, A first course in abstract algebra, Addison-Wesley, 1998.