상호연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 평균 거리와 방송

*김종석^{O} **박나연 ***이형옥 *허영남
*순천대학교 컴퓨터과학과
**순천제일대학 인터넷정보학부
***순천대학교 컴퓨터교육과
{*rockhee^{O}, ***oklee, *hyn}@sunchon.ac.kr
pnayeon@suncheon.ac.kr

Average Distance and Broadcasting of Interconnection Network Hyper-Star $HS(2n,n)$

Jong-Seok Kim^{O} Na-Yeon Park Hyeong-Ok Lee Yeong-Nam Heo
Dept. of Computer Science, Sunchon National University
Div. of Internet Information, Sunchon First College
Dept. of Computer Education, Sunchon National University

요 약

최근에 하이퍼큐브의 망비용을 개선한 상호연결망 하이퍼-스타가 제안되었다. 본 논문에서는 상호연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 평균 거리가 $\frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{2n-1}k\binom{2n-1}{k}$임을 보이고, 스패닝 트리를 이용한 일-대-다 방송 기법을 제안하고, 방송 수행 시간이 $2n$-1임을 보인다.

1. 서 론

상호 연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프로 표현되는데, 지금까지 제안된 상호연결망은 노드 개수를 기준으로 분류하면 $k\times n$으로 표현되는 메쉬 부류, 2^n으로 표현되는 하이퍼큐브(hypercube) 부류, $n!$로 표현되는 스타(star) 그래프 부류로 나눌 수 있다. 상호 연결망을 평가하는 척도로는 분지수(degree), 연결도(connectivity), 대칭성(symmetric), 지름(diameter), 고장지름(fault diameter), 망비용(network cost), 방송(broadcasting), 임베딩(embedding) 등이 있다[4,5].

최근에 새로운 상호연결망으로 하이퍼-스타[3]가 제안되었다. 제안된 하이퍼-스타는 차원이 증가함에 따라 노드 개수가 조합(combination) 형태로 증가하는 새로운 형태의 상호연결망이다. 하이퍼-스타는 같은 노드수를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용이 우수하고, 차원이 증가할 때 노드개수가 급격하게 증가하는 스타 그래프의 단점을 개선한 그래프이다.

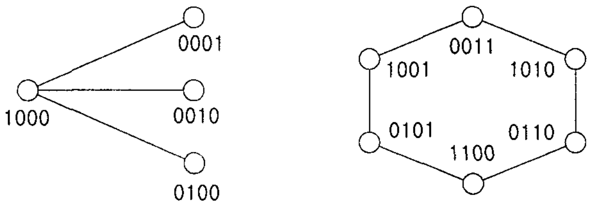
노드간의 평균 거리는 임의의 두 노드 간의 거리의 평균값을 말하는데, 지름이 최악의 통신 시간을 반영하는 것에 비해 평균 거리는 연결망 내의 실제 통신 시간을 더 잘 보여준다[1]. 방송은 상호연결망을 위한 가장 기본적인 데이터 통신기법이며 병렬 알고리즘을 설계하는데 있어서 가장 기본이 되는 작업으로 노드와 노드 사이의 메시지 전송을 의미하는데, 크게 일-대-다 방송과 다-대-다 방송으로 나눌 수 있다. 일-대-다 방송은 메시지를 갖고 있는 한 노드에서 다른 모든 노드로 메시지를 전송하는 것이고, 다-대-다 방송은 메시지를 갖고 있는 각각의 노드들이 다른 모든 노드들로 메시지를 전송하는 것이다. 방송은 상호연결망에서 다양한 선형대수 알고리즘(matrix-vector multiplication, LU-factorization, *Householder-transformations*)을 포함하고 있는 많은 응용 분야들을 위한 매우 중요한 요소이다[2].

본 논문에서는 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 평균 거리가 $\frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{2n-1}k\binom{2n-1}{k}$임을 보이며, $HS(2n,n)$의 스패닝 트리를 이용한 일-대-다 방송 기법을 제안하고, 방송 수행 시간이 $2n$-1임을 보이겠다. 다음 장에서는 하이퍼-스타에 대하여 알아보고, 3장에서는 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 평균거리를 분석하고, 4장에서는 $HS(2n,n)$의 방송을 분석하며, 마지막으로 결론을 맺도록 하겠다.

2. 관련연구

하이퍼-스타 $HS(m,k)$는 $\binom{m}{k}$개의 노드로 구성된 연결망으로 각 노드는 m 개의 비트스트링 $b_1b_2...b_i...b_m$으로 표현되며, $|b_i=\text{"1"}|=k$ 이다. b_1과 b_i가 보수일 때 b_1과 b_i를 교환하는 치환을 σ_i라 하면, $v=\sigma_i(u)$인 두 노드 $u=b_1b_2...b_i...b_m$와 $v=b_ib_2...b_1...b_m$사이에 에지가 발생하며, u와 v를 연결하는 에지를 i-에지라고 한다. 하이퍼-스타는 매우 간단한 라우팅 알고리즘과 유용한 확장성을 가지고 있고, 이분할 연결망이며, 최대 고장 허용도를 가지고 있다[3]. 하이퍼-스타 $HS(m,k)$는 비정규형 연결망이므로

본 논문에서는 정규연결망인 $HS(2n,n)$의 평균거리와 방송을 분석하겠다. 그림 1은 $HS(4,1)$과 $HS(4,2)$를 나타낸다.



(a) $HS(4,1)$　　(b) $HS(4,2)$

그림 1. $HS(4,1)$와 $HS(4,2)$

3. 평균거리

$HS(2n,n)$의 임의의 두 노드를 $u=a_1a_2...a_i...a_{2n}$와 $v=b_1b_2...b_i...b_{2n}$라고 하고, 두 노드 u와 v 사이의 거리를 $dist(u,v)$라고 표시하겠다. 두 노드 사이의 거리 $dist(u,v)$는 다음과 같다.

· $d(u_i, v_i)=\begin{cases} 1 & \text{if } a_i \neq b_i, \\ 0 & \text{if } a_i = b_i. \end{cases}$

· $dist(u,v)=\sum_{i=2}^{2n} d(u_i, v_i)$

정리 1. 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 평균 거리는 $\frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{2n-1} k\binom{2n-1}{k}$이다.

증명. 대칭성을 갖는 연결망 내에서 평균 거리는 주어진 임의의 노드로부터 모든 노드들까지의 거리의 총합과 연결망의 노드수의 비로 나타낸다[1]. 그러므로 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 노드 간의 평균 거리는 다음과 같다.

· 평균거리 = $\frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{2n-1} k\binom{2n-1}{k}$

k는 $dist(u,v)$이고, $\binom{2n-1}{k}$는 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$ 내부의 임의의 노드로부터 거리가 k인 노드들의 수를 나타낸다.

4. 방송

$HS(2n,n)$의 방송을 위해 원시 노드 $u=0^n1^n$를 정점으로 하는 스패닝 트리를 만들겠다. $HS(2n,n)$ 구조는 스패닝 트리를 쉽게 만들 수 있다는 장점이 있다. $Pa(v)$는 노드 v의 상위 노드를 나타내는 함수라고 하고, $Ch(v)$는 노드 v의 하위 노드를 나타내는 함수라고 하자. 노드 v의 2차원 상위 노드를 $g=Pa(Pa(v))$라고 하고, $E=\{i \mid r_i=g_i \oplus v_i=1\}$라고 하자. $i^0 \in E$이고, $i^1 \in E$ $(1 \le i^0 \le n,\ n+1 \le i^1 \le 2n)$이면 v는 짝수 레벨에 위치하고, $i^0 \in E$이고, $i^1 \in E$ $(1 \le i^1 \le n,\ n+1 \le i^0 \le 2n)$이면 v는 홀수 레벨에 위치한다고 정의한다. 그리고 $\Psi=\{i^1+1, i^1+2, ..., 2n\}$ 혹은 $\Psi=\{i^1+1, i^1+2, ..., n\}$이면 Ψ에 속하는 모든 h에 대해 $r_h=0$이다. 즉, Ψ는 R의 i^1의 위치에 연속적으로 0만이 존재하는 집합을 말한다.

정의 1. 원시 노드를 노드 $u=0^n1^n$라고 할 때, $Pa(v)$과 $Ch(v)$에 의해 노드 u를 정점으로 하는 스패닝 트리 $ST(u)$를 다음과 같이 정의한다.

$Ch(v) = \sigma_h(v)$, 모든 $h \in \Psi$,

$Pa(v) = \sigma_{i^0}(v)$

특히, 원시 노드 u가 v일 때는 $i^1=n$이고, $Pa(v)$는 존재하지 않으며, $i^0=1$이고, $E=\{i \mid r_i=u_i \oplus v_i=1\}$라고 가정한다. 그러면 v의 하위 노드는 h-에지에 의해 연결되는 노드이고, v의 상위 노드는 i^0-에지에 의해 연결되는 노드임을 쉽게 알 수 있다. 그림 2는 노드 u를 정점으로 하는 $HS(6,3)$의 스패닝 트리 $ST(000111)$이다. 그림 2에서 보면 L_2에 위치한 노드 010011을 v라고 할 때, v의 2차원 상위 노드는 000111이고, $E=\{2,4\}$임을 알 수 있다. 또 v가 짝수 레벨에 위치해 있으므로, $i^0=2$이고 $i^1=4$이며 $\Psi=\{5,6\}$임을 알 수 있다. 그러므로 v의 하위 노드는 $\sigma_5(v)=110001$과 $\sigma_6(v)=6$이며, v의 상위 노드는 $\sigma_2(v)=100011$이다.

정리 2. 원시 노드 $u=0^n1^n$이면, 스패닝 트리 $ST(u)$의 최적 높이는 $2n-1$이다.

증명. 스패닝 트리 $ST(u)$ 안의 임의의 노드를 w라고 하면, 노드 u와 w 사이에 Exclusive-OR 함수를 적용하여 생성된 비트스트링을 $R=r_1r_2...r_{2n}$이라고 하고, $r_i=u_i \oplus w_i$인 비트들의 집합을 R' 라고 하자. 그러면 함수 $Pa(w)$는 $i^0 \in R'$ 인 상위노드 $\sigma_{i^0}(w)$를 나타낸다. 성질 1에 의해 에지 $(w, Pa(w))$는 노드 u로부터의 최단거리를 이끌어 낸다. $HS(2n,n)$은 노드 대칭이므로, $ST(u)$의 높이는 $HS(2n,n)$의 지름과 동일하다. 특히 $w=1^n0^n$일 때, $ST(u)$의 노드 u와 w를 연결하는 길이 $2n-1$인 최단 경로를 구성한다. 그러므로 스패닝 트리 $ST(u)$의 최적 높이는 $2n-1$이다.

본 논문에서는 일-대-다 방송 기법을 제안하겠다. 방송 기법은 다음과 같다.

먼저 원시 노드 u가 가지고 있는 정보 M을 하위 노드 중 가장 왼쪽에 위치한 하위 노드에 전달한다. 그러면 u와 u_1이 정보 M을 가지고 있게 된다. 두 번째로 원시 노드 u가 가지고 있는 정보 M을 하위 노드 중 u_1의 오른쪽에 위치한 하위 노드에 전달하고, 동시에 u_1은 u_1의 하위 노드 중 가장 왼쪽에 위치한 하위 노드에 정보 M을 전달한다. $ST(u)$의 모든 노드에 정보 M이 전달될 때까

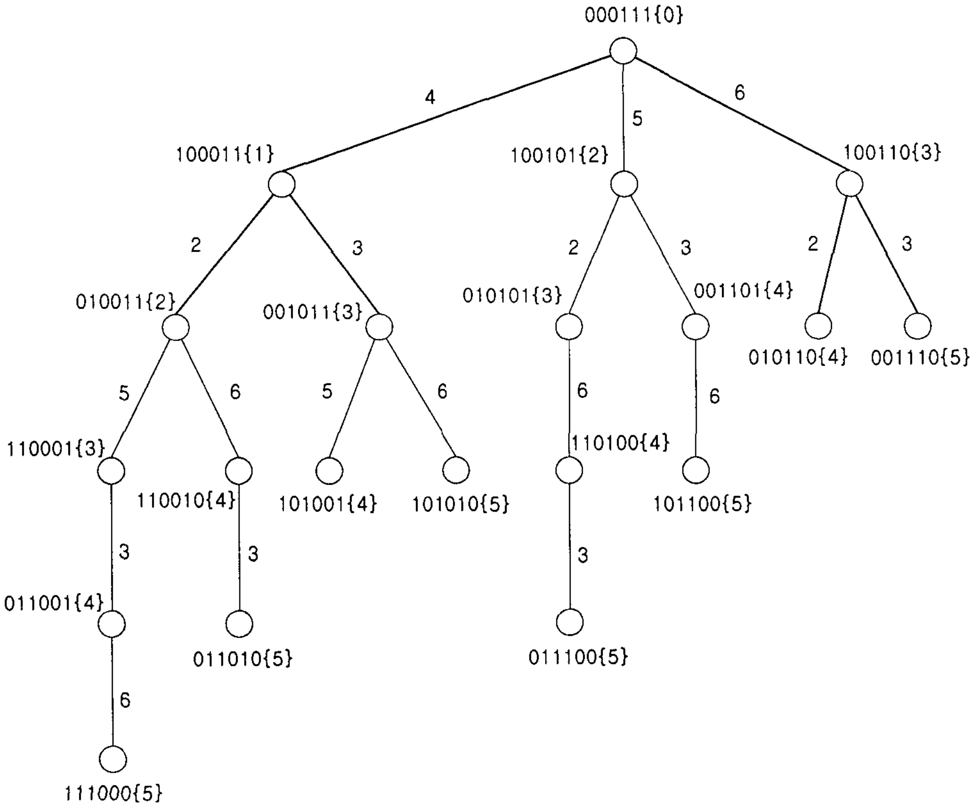


그림 2. 노드 u=000111를 정점으로 하는 $HS(6,3)$의 스패닝 트리

지 이와 같은 방송을 계속 수행한다. 제안한 방송 기법의 수행 시간은 $2n-1$이며, 이것은 $HS(2n,n)$의 지름과 같으므로 최적 방송임을 알 수 있다. 그림 2에 표시한 $\{t\}$는 노드가 t 시간 만에 정보를 전달받는다는 것을 나타낸다.

5. 결론

본 논문에서는 상호 연결망으로 널리 알려진 하이퍼큐브의 망비용을 개선한 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 평균 거리가 $\frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{2n-1} k\binom{2n-1}{k}$임을 보였고, $HS(2n,n)$의 스패닝 트리를 이용한 일-대-다 방송 기법을 제안하였고, 방송 수행 시간이 $2n$-1임을 보였다.

이와 같은 결과는 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 일-대-다 방송 기법이 최적 방송 기법임을 증명하는 것이며, $HS(2n,n)$에서의 실제 통신 시간을 알 수 있음을 보여주는 것이다.

참고문헌

[1] W.-K. Chiang and R.-J. Chen, "Topological properties of hierarchical cubic networks," Journal of systems Architecture, pp. 289-307, 1996.

[2] S. L. Johnsson, "Communication Efficient Basic Linear Algebra Computations on Hypercube Architectures," Journal of Parallel Distributed Comput., vol. 4, pp. 133-172, 1987

[3] H.-O. Lee, J.-S. Kim, E. Oh, H.-S. Lim, "Hyper-Star Graph: A New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube," Lecture Notes in Computer Science : EurAsia-ICT 2002, LNCS 2510, pp. 858-865, 2002.

[4] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, 1992.

[5] V. E. Mendia nad D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.3, No.4, pp. 389-396, 1992.