

# 예조건화 Navier-Stokes 코드 개발

이상현\* (울산대학교)

## Development of Preconditioned Navier-Stokes Code

Sang-Hyeon Lee\* (University of Ulsan)

### I. 서론

압축성 저속유동을 해석하기 위해서 최근 예조건화(Preconditioning)를 이용한 해석방법에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 저속 유동에서 수렴성이 악화되는 이유는 고유치들의 비가 지나치게 커지기 때문에 발생하는 문제이다.[1-6] 이상현[7]은 수정음속의 개념을 도입한 예조건화 Euler 코드의 알고리즘을 개발한 바 있는데, 본 연구에서는 이를 확장하여 Navier-Stokes 코드를 개발하고 시험해 보았다.

Navier-Stokes 방정식에 포함되어 있는 점성항은 저속 압축성 유동의 해를 구하기 과정에서 상당히 불안정한 양상을 보이는 것으로 알려져 있다[8]. 저속 유동에서는 레이놀즈수가 작아지기 때문에 점성에 의한 효과가 커지게 되며, 유속이 낮을수록 그 효과가 크게 나타난다. 따라서 시간 간격을 결정할 때 점성에 의한 효과를 고려해 주어야 하며, 점성항에 대한 자코비언을 고려해야만 한다. 그리고, 점성효과 때문에 속도가 낮아지는 영역(경계층, 박리 및 후류 영역)에서 가상음속(pseudo sonic speed)을 결정하는 과정이 Euler 코드와는 다른 방식으로 수정되어야 한다. 해의 수렴성 악화되어 수렴된 해를 구할 수 없는 경우가 발생하기 때문이다.

본 연구에서 개발된 Navier-Stokes 코드의 검증을 위하여 NACA 풍판, 마하 3 노즐 문제에 적용하여 해를 구하여 보았다.

### II. 지배방정식 및 수치기법

#### 2.1 지배방정식

유동 및 연소과정을 모사하기 위하여 본 연구에서는 2차원 Navier-Stokes 방정식을 사용하였으며, 난류 점성계수를 구하기 위해 k- $\omega$  SST 난류 모델[9]을 적용하였다.

$$\Gamma \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{\partial E_{vi}}{\partial x_i} + S \quad (1)$$

$$\Gamma \equiv \frac{\partial Q}{\partial P} = \begin{bmatrix} 1/\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u/\beta & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/\beta & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ h_o/\beta - 1 & \rho u & \rho v & \rho c_p & 0 & 0 \\ k/\beta & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \omega/\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$Q = [\rho, \rho u, \rho v, \rho e_o, \rho k, \rho \omega]^T \quad (3)$$

$$P = [\rho, u, v, T, k, \omega]^T \quad (4)$$

$$E = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho h_o u, \rho ku, \rho \omega u]^T \quad (5)$$

$$E_v = [0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xj} u_j - q_x, \mu^k k_x, \mu^\omega \omega_x]^T \quad (6)$$

$$S = [0, 0, 0, 0, P^k, P^\omega]^T \quad (7)$$

$$\mu^k = \mu_L + \sigma^* \mu_T, \quad \mu^\omega = \mu_L + \sigma \mu_T \quad (8)$$

$$P^k = \tau_{ij} u_{,j} - \beta^* \rho \omega k \quad (9)$$

$$P^\omega = \frac{\alpha}{\nu_T} \tau_{ik} u_{,k} - \beta^* \rho \omega \omega + 2\sigma_{\omega 2} \rho / \omega k_{,j} \omega_{,j} \quad (10)$$

$$\beta = M_r^2 c^2,$$

$$M_r^2 = \min\{1, \max(0.25M_\infty^2, M^2)\} \quad (11)$$

벡터 Q, P, E, E<sub>v</sub>, S는 각각, 해 벡터, 원시해 벡터, 대류항 벡터, 점성항 벡터, 난류생성항 벡터를 의미하며,  $\Gamma$ 는 예조건 행렬을 의미한다. 첨자 L은 층류를, T는 난류를 의미한다. 난류 점성계수의 정의와 각 계수들은 Menter[9]의 계수를 수정 없이 사용하였다.

#### 2.2 지배방정식의 차분화

실좌표계(x, y)에서 표현된 지배방정식을 일반 좌표계( $\xi, \eta$ )로 변환하였으며, 지배방정식을 차분화하기 위해서 유한체적법(Finite Volume Method)을 이용하였다. 공간 차분을 위해서는

\* 울산대학교 수송시스템공학부 항공우주공학전공, lsh@mail.ulsan.ac.kr

Roe[10]의 FDS (Flux Difference Splitting) 풍상 차분 기법을 3차 정확도로 적용하였다.

$$E_{i+1/2} = \frac{1}{2} \{E_L + E_R - |A(Q_L, Q_R)| \Delta Q\} \quad (12)$$

$$|A(Q_L, Q_R)| \Delta Q = \begin{bmatrix} a_s \\ \alpha_s u + \alpha_\rho \Delta u \\ \alpha_s v + \alpha_\rho \Delta v \\ \alpha_s h + \alpha_\rho \Delta h \\ \alpha_s k + \alpha_\rho \Delta k \\ \alpha_s \omega + \alpha_\rho \Delta \omega \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\alpha_1 = |\lambda_1| \left( \Delta \rho - \frac{\Delta p}{c^2} \right), \quad \alpha_2 = |\lambda_2| \left( \frac{\Delta p + \rho \tilde{c} \Delta \hat{U}}{2c^2} \right),$$

$$\alpha_3 = |\lambda_3| \left( \frac{\Delta p - \rho \tilde{c} \Delta \hat{U}}{2c^2} \right), \quad \hat{U} = \frac{U}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}},$$

$$\alpha_\rho = |\lambda_1| \rho$$

$$\alpha_s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad (14)$$

이때, 임의의 변수( $\psi$ )에 대한 차분은 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta \psi = \psi_R - \psi_L, \quad \psi = \rho, p, u, v, h, k, \omega \quad (15)$$

이 과정에서 수치진동을 억제하기 위하여 Koren 제한자를 사용하였다.

시간적분을 위해서는 예조건화된 LU-SGS (Lower Upper Symmetric Gauss Seidel)[3] 기법을 약간 변형하여 사용하였다. 이 과정에서 풍상 차분화된 플럭스 자코비언은 다음과 같은 근사 자코비언을 사용하였다.

$$A^\pm = \frac{1}{2} (A \pm \lambda_{\max} \Gamma) \quad (16)$$

이때, 대류항 벡터의 해 벡터에 대한 자코비언 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$A \equiv \frac{\partial E}{\partial P}, \quad B \equiv \frac{\partial F}{\partial P} \quad (17)$$

그러면 풍상차분법으로 표현된 지배방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$LD^{-1}U \Delta P = RHS \quad (18)$$

$$D = \frac{\Gamma}{\Delta t} + \lambda_D \Gamma = \left( \frac{1}{\Delta t} + \lambda_D \right) \Gamma$$

$$L = D - (A_{i-1}^+ + B_{j-1}^+)$$

$$U = D + (A_{i+1}^- + B_{j+1}^-)$$

$$RHS = -(\delta_\xi \hat{E} + \delta_\eta \hat{F})^{(n)} \quad (19)$$

이때, 최대 고유치의 합( $\lambda_D$ )은 다음과 같이 정의된다.

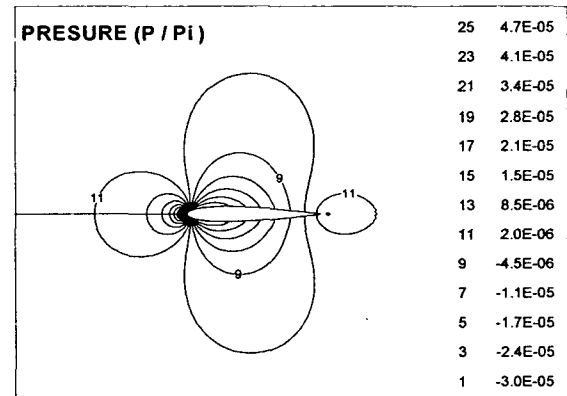
$$\lambda_D = \lambda_{\max, \xi} + \lambda_{\max, \eta} \quad (20)$$

### III. 결과 및 분석

#### 3.1 NACA 날개 주위 유동

날개 시위의 10배 반경을 가지는 O형 격자를 사용하였다. 날개의 시위는 10cm이다. 총 격자 수는 170×65 (=11,050)개이다. 원방 유동의 마하 수는 10<sup>-2</sup>이고, 온도는 와 압력은 각각 300K, 1기압이다.

그림 1은 NACA0012 날개를 통과하는 유동에 대한 계산(압력, 온도, 난류점성계수) 결과를 도시하고 있다. 압력 및 온도분포, 난류점성계수의 분포를 보면 대칭적인 구조를 가지고 있음을 알 수 있다. 이는 날개가 대칭적인 형상을 가지기 때문이다. 압력장을 살펴보면, 유속이 커지는 측면의 압력이 낮아지고 후미에서 압력회복이 일어나는 현상을 잘 포착하고 있음을 볼 수 있다. 온도장을 살펴보면, 전체적인 경향은 압력장과 유사하나 경계층내의 온도가 높아지는 것을 알 수 있고 경계층에 의해 형성되는 후류영역에서도 높은 온도가 그대로 유지되는 것을 관찰할 수 있다. 점성계수의 경향을 살펴보면, 경계층 부근과 경계층으로 인해 형성되는 후류영역에서 점성계수가 높게 나타나는 것을 볼 수 있다. 전체적인 경향을 보면 본 연구에서 개발된 코드가 안정적인 해를 제공하고 있음을 알 수 있다.



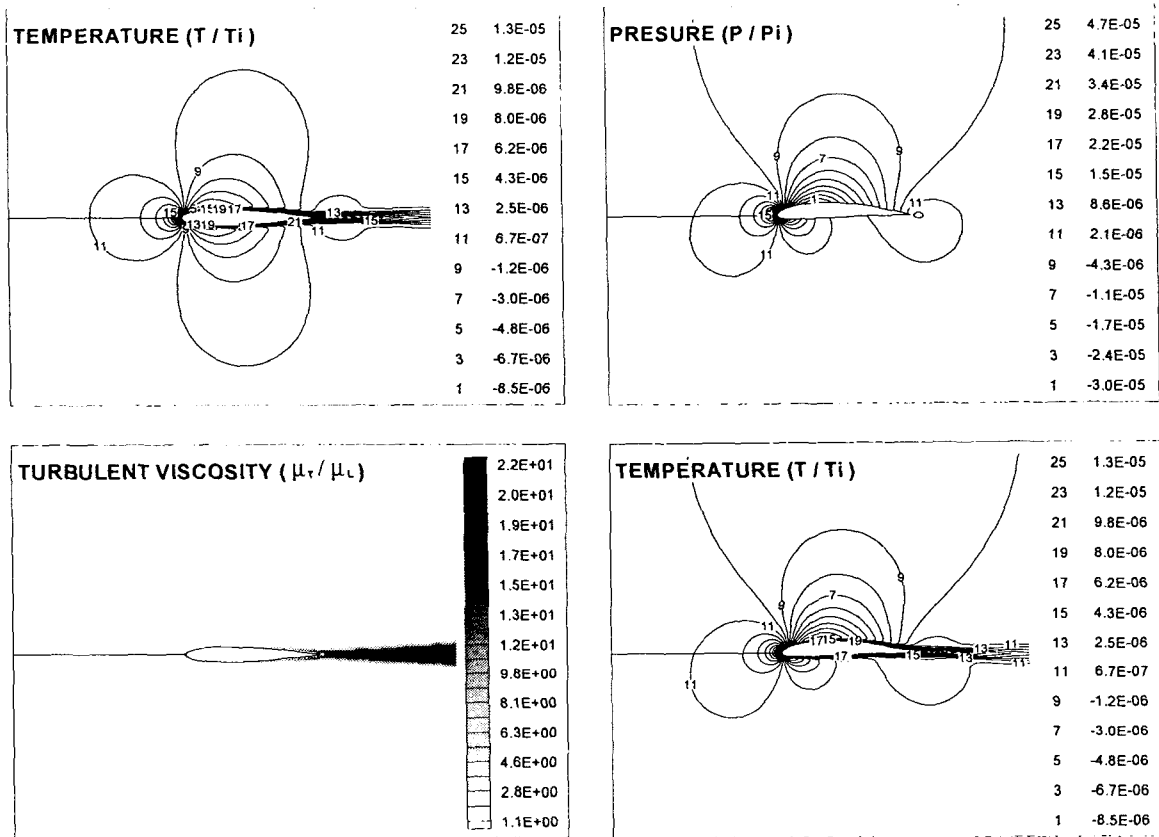


Fig. 1. Calculation results of low speed flow ( $M=10^{-2}$ ) around NACA0012 airfoil.

그림 2는 NACA4412 날개를 통과하는 유동에 대한 계산(압력, 온도, 난류점성계수) 결과를 도시하고 있다. 압력 및 온도분포, 난류점성계수의 분포를 보면 비대칭적인 구조를 가지고 있음을 알 수 있다. 이는 날개가 비대칭적인 형상을 가지기 때문이다. 압력장을 살펴보면, 곡률이 큰 풍판 위쪽의 압력변화가 크게 나타나고 풍판 아래쪽의 압력변화는 적은 것으로 나타났다. 이러한 경향은 온도장에서도 나타나는 것을 볼 수 있다. 그리고, 난류 점성계수의 크기를 살펴보면 NACA4412에서 NACA0012보다 약간 큰 값을 가지는 영역이 존재하는 것을 볼 수 있다. 이는 NACA4412를 통과하는 유동이 날개의 후반부에서 발생하는 역압력 구배가 NACA0012보다 크게 나타나는 것이 원인인 것으로 판단된다.

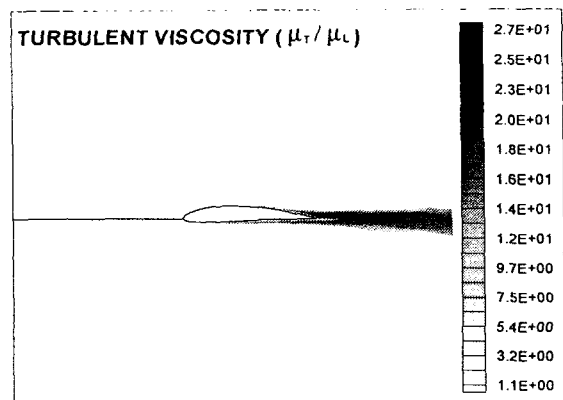


Fig. 2. Calculation results of low speed flow ( $M=10^{-2}$ ) around NACA4412 airfoil.

### 3.2 축소확대 노즐 유동

#### 계산격자 및 조건

노즐 유동은 아음속 유동과 초음속 유동이 공존하는 전형적인 문제로 예조건화 방법론의 검증에 적합한 문제이다. 노즐은 출구 마하수가 3.0인 축소확대형 노즐을 사용하였다. 노즐은 형상 증형으로 노즐목에서 팽창파가 발생하기 시작하고 변곡점 이후로는 압축파가 발생하여 노즐 출구에서의 유동이 축 방향 성분만을 갖도록 설계된 것이다 [11]. 이때, 노즐 설계 시 변곡점의 확산각 ( $\theta_i$ )의 값을 결정해야 하는데, 확산각의 최대치는 팽창파함수의 절반보다 클 수 없다. ( $\theta_{i, \max} = 0.5 \nu_2$ ) 본 연구에서는  $\theta_i = 0.4 \nu_2$ 인 경우와  $\theta_i = 0.5 \nu_2$ 인 경우를 비교하여 보았다.

노즐 목( $x=0$ )의 직경(D)은 1cm로 설정하였고, 노즐의 입구위치는  $x=-12D$ 로, 노즐면적 축소 시작점은  $x=-4D$ 로 설정하였다. 총 격자 수는  $127 \times 63 (=8,001)$ 개이다. 노즐 입구 유동의 마하수는  $10^{-2}$ 이고, 온도는 와 압력은 각각 2000K, 100기압이다.

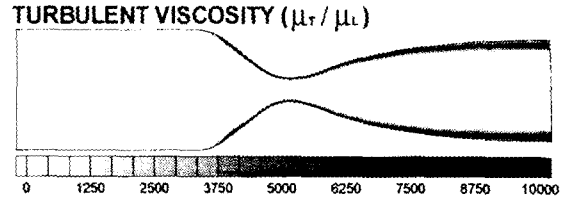
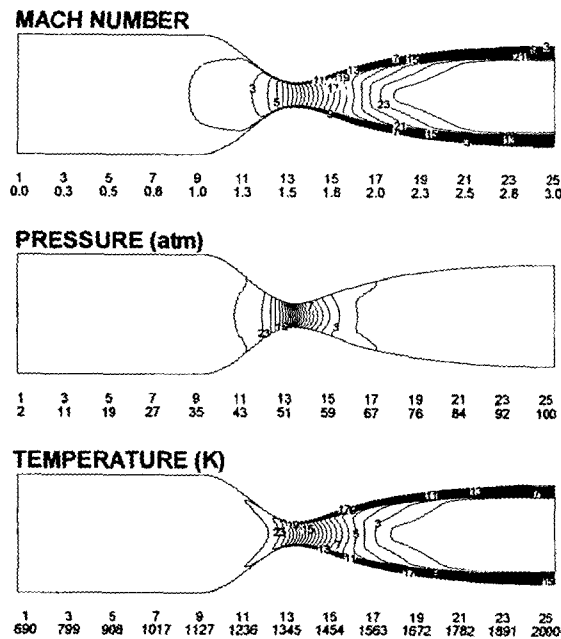
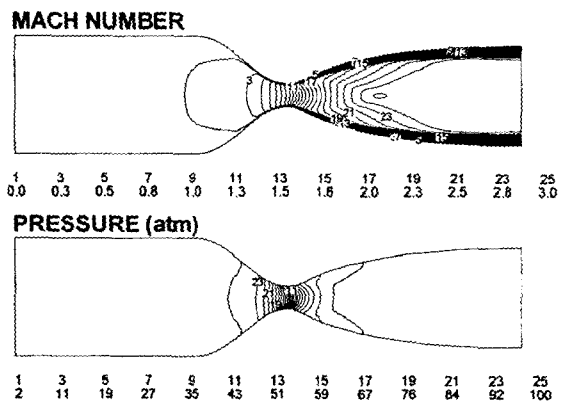


Fig. 3. Calculation results of Nozzle flow ( $M_i=10^{-2}$ ,  $M_e=3.0$ ,  $\theta_i=0.4 \nu_{\max}$ )

그림 3은  $\theta_i = 0.4 \nu_2$ 인 경우의 노즐 유동장을 계산한 결과 (마하수, 압력, 온도, 난류점성계수)이다. 마하수의 경향을 살펴보면, 노즐목 근처까지도 아주 낮은 마하수를 유지하고 있다가 노즐목 근처에서 급격하게 마하수가 증가하는 것을 볼 수 있다. 확대부에서의 마하 선도 형태를 보면 중심부에서 가장 먼저 마하 3.0에 도달하는 것을 볼 수 있으며, 경계층 부근에서는 낮은 마하수가 나타나는 것을 볼 수 있다. 압력 변화를 살펴보면, 노즐 목 부근에서 급격하게 변화하고 그 외 영역에서는 거의 변화가 없는 것을 볼 수 있으며 경계층의 영향은 거의 받지 않는 것을 볼 수 있다. 온도장을 살펴보면, 다른 유동성질과 마찬가지로 노즐목 부근에서 급격하게 변화하는 것을 볼 수 있다. 확대부에서의 온도변화는 마하수 변화와 유사하게 온도분포가 결정되는 것을 볼 수 있고, 경계층에서 높은 온도가 유지되는 것을 볼 수 있다. 난류점성계수의 분포를 보면 면적이 축소되면서 유동의 가속이 일어나는 지점에서부터 급격하게 증가하는 것을 볼 수 있으며, 전체적으로 경계층 근처에서 큰 값을 가지는 것을 볼 수 있다.



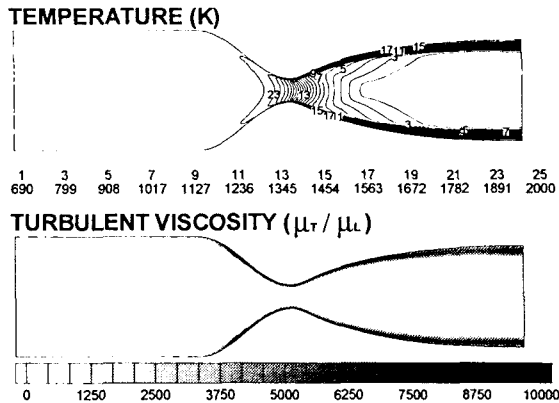


Fig. 4. Calculation results of Nozzle flow  
 ( $M_i=10^{-2}$ ,  $M_e=3.0$ ,  $\theta_i=0.4 v_{max}$ )

그림 4는  $\theta_i=0.4 v_{max}$ 인 경우의 노즐 유동장을 계산한 결과 (마하수, 압력, 온도, 난류전성계수)이다. 전체적으로 유동의 특성은  $\theta_i=0.5 v_{max}$ 인 경우와 유사하지만, 동일한 유동성질을 가지는 지점이 노즐 길이의 비율 정도가 짧아지는 것을 볼 수 있다. 마하수 분포를 보면 아래 위쪽의 두 팽창파가 만나는 지점 이후에 가장 마하수가 높은 영역이 형성되는 것으로 보인다.

#### IV. 결 론

본 연구에서는 예조건화 방법론을 이용해 점성 유동장을 해석하기 위한 난류방정식을 포함한 Navier-Stokes 코드를 개발하고, 이를 검증하여 보았다. 검증을 위해 저속에서의 NACA 날개 주위 유동과 저속 아음속 유동과 초음속 유동이 공존하는 축소확대 노즐 유동에 대해 계산을 수행하였다.

저속 유동만 존재하는 NACA 날개의 유동에서 압력장 및 온도장을 잘 예측하는 것으로 판단되며, 초음속 노즐에서는 낮은 마하수의 아음속 유동장이 초음속으로 가속되는 과정을 상당히 정확하게 예측하는 것으로 판단된다.

이후의 연구에서는 화학반응을 고려한 코드를 개발하여 보다 다양한 추진기관의 유동 특성을 해석하는 데 적용할 계획이다.

#### 후 기

본 연구는 한국학술진흥재단의 신진교수연구(과

제번호: 2002-003-D00049) 지원으로 수행되었습니다.

#### 참고문헌

- [1] Sheun, J. S., Chen, K. H., and Choi, Y., "A Coupled Implicit Method for Chemical Non-Equilibrium Flows at All Speeds," Journal of Computational Physics 106, pp.306-318, 1993.
- [2] Chen, K.H., and Shuen, J. S., "Three Dimensional Coupled Implicit Methods for Spray Combustion Flows at All Speeds," AIAA paper 94-3047, 1994.
- [3] Dailey, L. D., and Pletcher, R. H., "Evaluation of Multigrid Acceleration for Preconditioned Time-Accurate Navier-Stokes Algorithms," AIAA paper 95-1668, 1995.
- [4] Edwards, J. R., and Roy, C. J., "Preconditioned Multigrid Methods for Two Dimensional Combustion Calculations at All Speeds," AIAA Journal, Vol. 36, No. 2, February, 1998. pp. 185-192.
- [5] Edwards, J. R., and Liou M.S., "Low Diffusion Flux Splitting Methods for Flows at All Speeds," AIAA Journal, Vol. 36. No. 9, 1998, pp. 1610-1617.
- [6] Hsieh, J. S-Y., and Yang V., "A Preconditioning Flux-Difference Scheme for Chemically Reacting Flows at All Mach Numbers," International Journal of CFD, 1997, Vol. 8, pp. 31-49.
- [7] 이상현, "저속 압축성 유동장 해석을 위한 예조건화 방법론 연구 I," 항공우주학회지, 29권, 7호.
- [8] Choi, Y-H., and Merkle, C. L., "The application of Preconditioning in Viscous Flows," Journal of Computational Physics 106, pp.207-223, 1993.
- [9] Menter, F. R., Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications, AIAA Journal, Vol. 32, No. 8, 1994, pp.1598-1605.
- [10] Roe, P. L., Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference

Schemes, Journal of Computational Physics,  
Vol. 43, No. 3, 1981, pp. 352-372.

[11] Crown, C., "Supersonic Nozzle Design,"  
NACA Technical Report 1651, June, 1948.