

입력지연을 갖는 불확실 T-S 퍼지 시스템의 강인 디지털 확률적 안정화기 설계

Making Robust Stochastic Stabilizer for Uncertain T-S Fuzzy Systems with Input Delay

이호재¹, 박진배¹, 김정찬², 주영훈²

¹ 연세대학교 전기전자공학과

² 군산대학교 전자정보공학부

요약

본 논문은 임의로 변화하는 입력지연을 갖는 불확실 T-S 퍼지 시스템의 강인 안정화를 논의한다. 임의로 변화하는 입력지연은 유한개의 상태를 갖는 마코프 확률과정으로 표현된다. 디지털 안정화기를 설계하기 위하여 연속시간 T-S 퍼지 시스템을 이산화하며 제어기의 입출력단에 영차의 샘플/홀드 함수를 가정한다. 이산화된 시스템은 확률적 과정에 따라 변화하는 도약 시스템으로 표현된다. 확률적 강인 안정가능성 조건은 선형 행렬 부등식의 형태로 표현된다.

ABSTRACT

This paper discusses a robust stochastic stabilization of uncertain Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy system with Markovian input delay. The finite Markovian process is adopted to model the input delay of the overall control system. It is assumed that the zero and hold devices are used for control input. The continuous-time T-S fuzzy system with the Markovian input delay is discretized for easy handling delay, accordingly, the discretized T-S fuzzy system is represented by a uncertain discrete-time T-S fuzzy system with jumping parameters. The robust stochastic stabilizability of the uncertain jump T-S fuzzy system is derived and formulated in terms of linear matrix inequalities (LMIs).

1. 서론

최근 통신기술의 발달에 힘입어 인터넷과 유사한 통신 네트워크를 이용한 원격제어 시스템의 구축의 시도가 증가추세이다. 네트워크 기반 원격제어 시스템은 통신 선로에 의하여 페루프 시스템을 구성하므로 시간 지연현상은 필연적으로 발생한다. 시스템의 제어 성능은 시간지연 현상과 상당히 관련있다. 특히 시스템의 안정성은 시간지연현상과 매우 밀접하여 시간지연현상이 존재할 경우 시스템의 안정성의 여유이득 확보는 매우 어려운 문제로 알려져 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 전통적인 기법으로서, Lyapunov-Krasovskii 안정성 이론과 Lyapunov-Razumikhin 안정성 이론이 활용되었다. 이러한 기법은 시간지연의 보다 세밀한 정보를 활용하지 못하며, 단지 시간지연의 상한값의 정보를 활용할 뿐이다. 따라서 개발된 이론은 매우 보수적인 결과를 도출할 것으로 예상된다. 최근에 매우 불확실하게 가변적으로 변화하는 시스템의 파라미터를 다루기 위하여 확률적인 접근방법이 개발되었다. 인터넷기반 원격제어 시스템에서의 시간지연현상은 매우 변화가 심하며 결정적인 요소가 아니므로 제어기 설계시 결정론적인 수학적 접근이 용이하지 않다. 그러나 확률적 접근방법을 도입함으로써 랜덤한 시간지연 현상에 강인한 시스템의 안정화 기법의 설계를 효율적으로 해결할 수 있다. 본 연구 과정은 네트워크 상에서의 시간지연 현상을 확률적으로 모델링하였다. 시간지연 현상의 확률적 모델을 기반으

로 하여 제어 시스템을 확률적 가변 시스템으로 모델링하였다. 또한 비선형시스템의 효과적이며 지능적인 제어를 위하여 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 모델을 도입하였다 [4-7, 9, 10]. T-S 퍼지 모델로 표현되는 확률적 가변 비선형 시스템은 실제 산업현장의 시스템을 매우 효율적으로 표현할 수 있다. 이를 기반으로 하여 확률적으로 변동하는 입력지연 시스템의 안정화를 위한 제어기 설계 기법을 개발하였다. 제어기 설계 조건은 선형행렬부등식으로 표현되며 수치적으로 매우 손쉽게 해를 구할 수 있다.

2. 임의의 입력 지연을 갖는 연속시간 T-S 퍼지 시스템

비선형 시스템을 효율적으로 표현할 수 있는 다음과 같은 T-S 퍼지시스템을 고려하자 [4-10].

$$R^i : \text{IF } x_1(t) \text{ is } \Gamma_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } \Gamma_n^i \\ \text{THEN } \dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i) + (B_i + \Delta B_i)u(t - \tau_k) \quad (1)$$

여기서 $\Gamma_h^i, i \in \mathcal{I}_Q = \{1, 2, \dots, q\}, h \in \mathcal{I}_N = \{1, 2, \dots, n\}$ 는 i 번째 규칙에서 h 번째 전건부 변수의 퍼지 집합이다. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 는 상태변수, $u(t) = u(kT)$ 는 인터넷 기반 제어를 위한 시간 구간 $[kT, kT + T)$ 에서 일정한 디지털 제어 입력이다. $T > 0$ 는 샘플링 시간이며

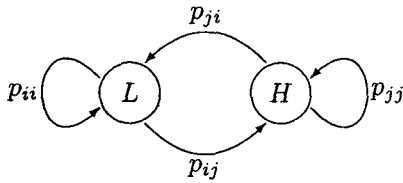


그림 1: 두 종류의 입력지연의 마코프 체인 모델링.
Figure 1: Markov chain modelling of random delay with 2 states.

τ_k 는 k 번째 시간 지연이다. 중심값-평균 비퍼지화, 곱셈 추론, 싱글톤 퍼지화를 사용하면 시스템 (1)의 전역 동특성은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^q \theta_i(x(t))((A_i + \Delta A_i) + (B_i + \Delta B_i)u(t - \tau_k)) \quad (2)$$

여기서 $\omega_i(z(t)) = \prod_{h=1}^n \Gamma_h^i(z_h(t))$, $\theta_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^q \omega_i(z(t))}$ 이며 $\Gamma_h^i(z_h(t))$ 는 h 번째 전건부 변수 $z_h(t)$ 의 퍼지 집합 Γ_h^i 에 대한 소속도를 나타낸다.

가정 1 본 논문에서 고려하는 불확실성은 다음과 같은 구조화된 형태로 가정된다.

$$[\Delta A_i \quad \Delta B_i] = H_i F_i(t) [E_{ai} \quad E_{bi}]$$

여기서 $F_i(t)$ 는 다음을 만족하는 알려지지 않은 행렬 함수이다.

$$F_i(t)^T F_i(t) \leq I, \quad \forall t \in [0, T_f]$$

여기서 H_i, E_{ai}, E_{bi} 는 알려진 상수 행렬이다.

가정 2 논의의 단순함을 위하여 제어 입력 신호의 시간 지연 τ_k 는 샘플링 시간 T 보다 작다고 가정한다.

동적 시스템 (2)의 안정화를 위하여 시간 구간 $[kT, kT + T), k \in \mathbb{Z}^+$ 에서 다음 형태의 제어기를 고려하자.

$$u(t) = \sum_{i=1}^q \theta_i(x(kT))(K_i x(kT) + L_i u(t - T)) \quad (3)$$

선형 시불변 연속 시간 시스템의 이산화는 여러가지 방법이 알려져 있다. 그러나 T-S 퍼지 시스템은 본질적으로 비선형 시스템이므로 기 개발된 기법들은 연속시간 T-S 퍼지 시스템에 적용할 수 없다. 더욱이 디지털 퍼지 제어기를 구성하기 위해서는 이산화 결과 또한 불특 조합의 형태를 가져야 한다. 따라서 연속시간 T-S 퍼지 시스템의 이산화를 보다 심도있게 논의하기 위해서는 다음의 해석기법이 필요하다.

가정 3 i 번째 발화도 $\theta_i(z(t))$ 는 시간 구간 $[kT, kT + T)$ 동안 시간 $t = kT$ 에서의 값으로 근사화될 수 있다고 가정하자.

$$\theta_i(z(t)) \approx \theta_i(z(kT))$$

결과적으로 비선형 행렬 $\sum_{i=1}^q \theta(z(t))A_i$ 와 $\sum_{i=1}^q \theta(z(t))B_i$ 는 시간 구간 $[kT, kT + T)$ 에서 각각 $\sum_{i=1}^q \theta(z(kT))A_i$, $\sum_{i=1}^q \theta(z(kT))B_i$ 형태의 상수 행렬로 근사화될 수 있다.

참고 1 적절히 충분히 작은 샘플링 시간 T 가 선택된다면 가정 3은 충분히 만족될 수 있다.

논의의 편의를 위하여 $x(kT)$ 와 $u(kT)$ 를 축약하여 각각 x_k, u_k 로 표기한다.

정리 1 디지털 T-S 퍼지 제어 시스템 (2)의 동특성은 다음과 같이 근사화 가능하다.

$$x_{k+1} \approx \sum_{i=1}^q \theta(x_k)((G_i + \Delta G_i)x_k + (H_{i1} + \Delta H_{i1})(\tau_k)u_k + (H_{i2} + \Delta H_{i2})(\tau_k)u_{k-1}) \quad (4)$$

여기서 $G_i = \exp(A_i T)$, $\Delta G_i = \Delta A_i T$, $H_{i1}(\tau_k) = \int_{kT+T-\tau_k}^{kT+T} e^{A_i(kT+T-\lambda)} d\lambda B_i$, $H_{i2}(\tau_k) = \int_{kT}^{kT+T-\tau_k} e^{A_i(kT+T-\lambda)} d\lambda B_i$, $\Delta H_{i1} = \tau_k \Delta B_i$, $\Delta H_{i2} = (T - \tau_k) \Delta B_i$ 이다.

확장된 상태 변수 $\chi_k = [x_k^T, u_{k-1}^T]^T$ 를 도입하면 다음의 폐루프 시스템을 구성할 수 있다.

$$\chi_{k+1} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \theta_i(x_k) \theta_j(x_k) \tilde{G}_{ij}(\tau_k) \chi_k \quad (5)$$

여기서 $\tilde{G}_{ij}(\tau_k) = G_{ij} + \Delta G_{ij}$ 여기서 공칭 시스템 행렬은

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} G_i + H_{i1}(\tau_k)K_j & H_{i2}(\tau_k)L_j \\ K_j & L_j \end{bmatrix}$$

이며 불확실 행렬은

$$\Delta G_{ij} = \begin{bmatrix} \Delta G_i + \Delta H_{i1}(\tau_k)K_j & \Delta H_{i2}(\tau_k)L_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

의 형태로 표현된다.

참고 2 이산화된 불확실 행렬의 구조는 가정 1을 만족한다.

시간 지연 τ_k 는 임의로 변화한다고 가정하였으므로 결정할 수 없다. 임의로 변화하는 시간지연을 수학적으로 표현하기 위한 한가지 방법은 적절한 확률적 과정을 도입하는 것이다. 본 논문에서는 유한개의 시간 지연을 가정하고 이의 천이 상태는 마코프 확률 과정에 의하여 결정된다고 가정할 것이다. s 개의 상태를 갖는 마코프 확률 과정을 고려하자. 상태 천이 확률은 다음과 같이 계산된다.

$$\Pr \{ \tau_{k+1} = m | \tau_k = l \} = p_{lm} \quad (6)$$

여기서 $p_{lm} \geq 0, \sum_{m=1}^s \forall l \in \mathcal{L}$ 이다.

제어 시스템이 l 번째 모드 (mode)에서 동작된다면, 즉 제어 입력 신호가 $\tau_k = l$ 의 시간지연을 포함한다면, 활성화되는 T-S 퍼지 시스템은 $\chi_{k+1} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \tilde{G}_{ij}^l \chi_k$ 이다. 여기서 $\tilde{G}_{ij}^l = \tilde{G}_{ij}(\tau_k = l)$ 이다. 시스템 (5)은 도약 T-S

퍼지 시스템이라 불리울 것이다. 그림 2.는 두 종류의 임의의 시간 지연을 마코프 확률과정으로 표현한 예이다. 여기서 대문자 L 은 상대적으로 큰 시간지연, H 는 작은 시간 지연을 의미한다. 마코프 확률과정에서 많은 상태를 사용할수록 더욱 정확한 시간 지연 모델을 구성할 수 있다.

3. 디지털 T-S 퍼지 시스템의 확률적 안정성

보조정리 1 적절한 대칭행렬 차원의 S 와 상수 행렬 H , E 가 주어질 때, 부등식

$$S + HFE + E^T F^T H^T < 0$$

은

$$S + [\epsilon^{-1}E^T \quad \epsilon H] \begin{bmatrix} \epsilon^{-1}E \\ \epsilon H^T \end{bmatrix} < 0$$

와 동가이다. 여기서 $F^T F \leq I$, $\epsilon > 0$ 이다.

정의 1 임의의 초기 모드가 주어질 때, 적절한 상한값 $M(\tau_0) > 0$ 이 다음의 조건을 만족한다면

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{k=0}^N x_k^T(\tau_0)x_k(\tau_0) \middle| \tau_0 \right\} < M(\tau_0) \quad (7)$$

도약 T-S 퍼지 시스템은 확률적으로 안정하다.

참고 3 정의 1는 평균 제곱의 측정을 사용했을 때, 영평형점의로의 점근적 수렴을 의미한다. 즉 식 (7), 의 확률적 안정성은 다음을 의미한다 [1-3].

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \{ x^T(\tau_0)x_k(\tau_0) | \tau_0 \} = 0$$

정리 2 다음의 조건을 만족하는 양한정 대칭 행렬 $P_l > 0, l \in I_S$ 이 존재한다면 도약 T-S 퍼지 시스템은 안정 가능하다.

$$Z_l = \begin{bmatrix} -P_l & * \\ \tilde{G}_{ij}^l & -P_l^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad i, j \in I_Q. \quad (8)$$

여기서 $P_l = \sum_{m=1}^s p_{lm} P_m$ 이며 $*$ 는 대칭행렬의 전치요소를 나타낸다.

정리 3 다음의 선형 행렬 부등식 (9)을 만족하는 양한정 대칭 행렬 P_{l1}, P_{l2} , 행렬 M_j, L_j 이 존재한다면 도약 T-S 퍼지 시스템은 점근적으로 안정가능하다. 여기서 $i, j \in I_Q, l \in I_S$ 이다.

증명: 식 (??)로부터

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_{ij}^T & \cdots & \tilde{G}_{ij}^T \end{bmatrix} \text{diag} \{ p_{l1} P_{l1} \cdots p_{ls} P_{ls} \} \begin{bmatrix} \tilde{G}_{ij} \\ \vdots \\ \tilde{G}_{ij} \end{bmatrix} - P_l < 0 \quad (10)$$

Schur complement를 적용하면

$$Y_{ij} + \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ \Delta G_{ij} & 0 & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ \Delta G_{ij} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

여기서

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} -P_l & * & * & * \\ G_{ij} & -p_{l1}^{-1} P_{l1}^{-1} & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ G_{ij} & 0 & 0 & -p_{ls}^{-1} P_{ls}^{-1} \end{bmatrix}$$

가정 1을 도입하면

$$Y_{ij} + \begin{bmatrix} 0 \\ [D_i] \\ 0 \\ \vdots \\ [D_i] \\ 0 \end{bmatrix} F_i \begin{bmatrix} [E_{ai} + E_{b1i} K_j & E_{b2i} L_j] & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + [0 \quad [D_i^T \quad 0] \quad \cdots \quad [D_i^T \quad 0]] F_i^T \times \begin{bmatrix} [(E_{ai} + E_{b1i} K_j)^T \\ (E_{b2i} L_j)^T] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

보조정리 1을 이용하면 다음 부등식을 유도할 수 있다. 이제 행렬 P_l 을 대각행렬 $\text{diag} \{ P_{l1}, P_{l2} \}$ 로 가정한 후 변환행렬 $\text{diag} \{ P_{l1}^{-1}, P_{l2}^{-1}, I_{s \times 2n} \}$ 에 의한 쾨그루언스(congruence) 변환을 수행하고, $K_j^l P_{l1}^{-1} = M_j^l, L_j^l P_{l2}^{-1} = N_j^l$ 의 변수 치환을 수행하면 얻을 수 있다. ■

따름정리 1 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 양한정 대칭 행렬 P_{l1}, P_{l2} , 행렬 M_j, L_j 이 존재한다면

$$\begin{bmatrix} -P_{l1}^{-1} & * & * & * \\ 0 & -P_{l2}^{-1} & * & * \\ G_i P_{l1}^{-1} + H_{i1}^l M_j^l & H_{i2}^l N_j^l & -p_{l1}^{-1} P_{l1}^{-1} & * \\ M_j^l & N_j^l & 0 & -p_{l1}^{-1} P_{l2}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_i P_{l1}^{-1} + H_{i1}^l M_j^l & H_{i2}^l N_j^l & 0 & 0 \\ M_j^l & N_j^l & 0 & 0 \\ \cdots & * & * & * \\ \cdots & * & * & * \\ \cdots & * & * & * \\ \cdots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -p_{ls}^{-1} P_{ls}^{-1} & * & * \\ \cdots & 0 & -p_{ls}^{-1} P_{ls}^{-1} & * \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

공칭 도약 T-S 퍼지 시스템은 점근적으로 안정가능하다. 여기서 $i, j \in I_Q, l \in I_S$ 이다.

$$\begin{bmatrix} -P_{l1}^{-1} & * & * & * & \cdots & * & * & * & * \\ 0 & -P_{l2}^{-1} & * & * & \cdots & * & * & * & * \\ G_i P_{l1}^{-1} + H_{i1}^l M_j^l & H_{i2}^l N_j^l & -p_{l1}^{-1} P_{l1}^{-1} & * & \cdots & * & * & * & * \\ M_j^l & N_j^l & 0 & -p_{l1}^{-1} P_{l2}^{-1} & \ddots & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_i P_{l1}^{-1} + H_{i1}^l M_j^l & H_{i2}^l N_j^l & 0 & 0 & \ddots & -p_{ls}^{-1} P_{s1}^{-1} & * & * & * \\ M_j^l & N_j^l & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_{ls}^{-1} P_{s2}^{-1} & * & * \\ E_{ai} P_{l1}^{-1} + E_{b1i} M_j^l & E_{b2i} N_j^l & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\epsilon I & * \\ 0 & 0 & D_i^T & 0 & \cdots & D_i^T & 0 & 0 & -\epsilon^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

$$\left[\begin{bmatrix} [E_{ai} + E_{b1i} K_j & E_{b2i} L_j] & \gamma_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & [D_i^T & 0] & \cdots & [D_i^T & 0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\epsilon I & * \\ 0 & -\epsilon^{-1} I \end{bmatrix} \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \right] < 0 \quad (13)$$

참고 4 실제 제어 시스템을 구축할 경우, 마코프 확률과정에 의하여 제어를 선택하기 위해서 시간지연을 확인해야 한다. 이를 구현하기 위하여 제어 플랜트로부터 전송되는 모든 정보는 시간 정보를 포함하여야 한다. 또한 정확한 시간 지연을 측정하기 위하여 플랜트와 제어기간의 동기화되어야 한다.

4. 결론

본 논문에서는 임의로 변화하는 입력지연과 시스템 파라미터 불확실성을 포함하는 연속시간 T-S 퍼지 시스템의 강인 확률적 안정화기의 설계를 논의하였다. 임의의 입력지연은 유한 상태의 마코프 확률적 과정으로 표현하였다. 임의의 입력지연을 효과적으로 보상하기 위하여 연속시간 T-S 퍼지 시스템을 이산화하였으며 결과적으로 이산시간 마코프 도약 파라미터를 포함하는 T-S 퍼지 시스템으로 변환하였다. 퍼지모델기반 안정화기의 설계 조건은 유한개의 선형행렬부등식으로 표현하였다.

감사의 글

본 연구는 정보통신부 정보통신연구진흥원에서 지원하고 있는 대학기초연구지원사업(과제번호: 2001-107-3)의 연구결과입니다.

참고 문헌

[1] Y. Y. Cao and J. Lams "Stochastically stability and H_∞ control for discrete-time jump linear systems with time delay," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 336, pp. 1263-1281, 1999.
 [2] P. Shi, E-K Boukas, and R. K. Agarwal, "Control of Markovian jump discrete-time systems with norm bounded uncertainty and unknown delay," *IEEE*

Trans. on Automat. Contr., Vol. 44, No. 11, pp. 2139-2144, Nov., 1999.

[3] W. Zhang, M. S. Branicky, and S. M. Phillips, "Stability of networked control systems," *IEEE Control systems magazine*, pp. 84-99, Feb., 2001.
 [4] H. J. Lee, J. B. Park and G. Chen, "Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 9, No. 2, pp. 369-379, April, 2001.
 [5] W. Chang, J. B. Park, Y. H. Joo, and G. Chen, "Design of robust fuzzy-model-based controller with sliding mode control for SISO nonlinear systems," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol 125, No. 1, pp 1-22, Dec, 2001.
 [6] Y. H. Joo, G. Chen, and L. S. Shieh, "Hybrid state-space fuzzy model-based controller with dual-rate sampling for digital control of chaotic systems," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 7, pp. 394-408, Aug, 1999.
 [7] W. Chang, J. B. Park, Y. H. Joo, and G. Chen, "Design of sampled-data fuzzy-model-based control systems by using intelligent digital redesign," *IEEE Trans. on Circ. and Syst.-1*, to appear, 2001.
 [8] Z. Li, J. B. Park, and Y. H. Joo "Chaotifying continuous-time T-S fuzzy systems via discretization," *IEEE Trans. on Circ. and Syst.-1*, Vol. 48, No. 10, pp. 1237-1243, 2001.
 [9] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 2, pp. 250-265, 1998.
 [10] K. Kiriakidis, "Fuzzy model-based control of complex plants," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 4, pp. 517-529, Nov., 1998.