예술과 과학은 하나에서 출발했다

김춘미(한국예술종합학교 교수)

들어가면서

예술과 과학은 언제부터인가 제도적 차원에서 서로 다른 영역으로 분류 교육되기 시작했다. 그러나 예술과 과학은 출발이 하나였다. 단지 하나에서 출발한 같은 원리가 발현되는 과정에서 매개와 방법을 달리하며 예술적 표현의 옷을 입었다는 차이가 있다. 특히 20세기 예술이 컴퓨터의 발달과 무관하지 않고, 현대의 음악과 무용이 공학적 기술의 축적 없이 이루어질 수 없음을 감안할 때, 예술과 과학은 이미 뗄 수 없는 관계를 유지해 왔다고 하겠다. 그런 면에서 <예술과 과학의 만남>이란 새로이 서로를 만나겠다는 것보다는, 오히려 그 동안 있어 왔던 양자의 관계를 발견하여 그 관계를 더욱 발전시킨다는 의미로 다가온다.

우리는 흔히 예술과 과학의 관계를 표현과 기술의 관계로 이해하는 경향이 있다. 그러나 예술과 과학이 기초적 사고의 본질적 차원에서 같은 지평을 공유하고 있다는 점을 다시 들여다 볼 필요가 있다고 본다. 표현과 기술이라는 피상적 만남은 현상적 다채로움을 낳는 반면, 예술과 과학의 본질적 만남은 새로운 창조적 사고를 유발시켜 세상을 바꾸는 힘을 발휘할 것이기 때문이다.

예술과 과학이 하나였다는 한 사례로 음악의 체계가 어떻게 태동하게 되었는가를 일례로 들어보고자 한다. 피타고라스는 수학자이지만 그는 음악의 창시자로도 통한다. 먼저 피타고라스의 수학적 발견과 과학적 유추의 일부를 언급하겠는데, 이것은 이어져 나올 음악과의 관계에 필요한 전제를 위해 선택한 것들이다.

1. 자연수에 대한 탐구: 홀수와 짝수에 관하여

'수'란 그리스어의 관용에 따라 양의 정수를 가리키는 것으로 파악해야 한다. 따라서 정수론(Theory of Numbers)이란 자연수의 이론을 뜻하는 것이다. 자연수

를 홀수와 짝수로 분류한 것은 피타고라스가 처음이었다고 한다. 물론 2로 나누면 1이 남는 수

1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

등이 홀수이고, 2로 나누면 완전히 나누어지는 수

2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

등이 짝수이다.

그리고 이어서 이들의 관심이 집중된 곳은 홀수의 열과 짝수의 열에 관한 것이다. 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...에서 이를테면 30번째의 것은 무슨 수인가? 하는 질문이다.

홀수의 열은

첫 번째	두 번째	세 번째	네 번째	다섯 번째 ...
1	3	5	7	9

와 같은데, 이런 경우 몇번째라고 하는 번호와 찾는 수의 관계는 바로 몇번째라고 하는 번호를 2배 해서 그것으로부터 1을 뺀 것이 찾고자 하는 홀수가 된다는 것을 발견한 것이다. 즉 30번째의 홀수는 이 30을 2배하여 60, 60에서 1을 빼서 59, 따라서 30번째의 홀수는 59가 된다. 이것을 수학적으로 말하면 n번째의 홀수는 2n - 1이 되는 것이다. 한편 짝수의 열은

첫 번째	두 번째	세 번째	네 번째	다섯 번째 ...
2	4	6	8	10

의 순으로 늘어서 있는데, 이때 이 몇번째라고 하는 번호와 짝수의 사이에는 홀수 때와는 달리 그 번호를 2배 한 것이 된다. 따라서 이것을 수학적으로 말하면 제 n번째의 짝수는 2n이 되는 것이다.

이와 같은 자연수들, 홀수와 짝수를 피타고라스는 만물의 근원으로 본 것이고, 때로는 정의(正義)와 같은 추상개념 등을 이와 연결시키기도 했다. 짝수는 여성, 홀수는 남성이라고 일컫기도 해다. 그래서 1을 뺀 첫 번째 남성수와 최초의 여성수의 합인 5를 결혼의 상징으로 하는 등 수의 신비화도 피타고라스 학파에서는 두드러지게 나타난다.

2. 완전수와 친화수

이러한 수에 대한 사고가 완전수와 친화수의 개념을 낳는다. 피타고라스 학파가

지칭하는 완전수는 ‘ 6’ 이다. 다시 말해서,

$1 + 2 + 3 = 6$

과 같이 6의 약수는 1, 2, 3과 6인데, 그 중에서 자기 자신인 6을 뺀 것을 더해 보면 그 자신과 일치하는 경우를 주목하여 그렇게 불렀던 것이다. 여기서 1, 2, 3의 중요성은 크게 부각된다. 다음 ‘ 6’ 이라는 숫자외에 ‘ 28’ 이라고 하는 완전수를 찾아냈고 이에 대하여 열심히 연구했다고 한다. 28 의 약수는 1, 2, 3, 7, 14인데 그 중에서 자기 자신인 28을 빼면

$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

피타고라스 학파는 이를 ‘ 최초의 6’ ‘ 최초의 28’ 과 같은 용어를 붙여 완전수의 의미와 관계를 캐보려고 노력했다. 이후 스위스의 18세기 수학자인 오일러(L. Euler)가 또 다른 496이라는 완전수를 발견한 바 있다.

한편 우애수 혹은 친화수라고 하는 개념도 이어서 파생되는데, 이것은 284와 220의 관계를 발견해낸 후 붙인 이름이다. 284라고 하는 수를 생각해 보자. 이 284의 약수 중에서 자기 자신을 제외한 것은

1, 2, 4, 71, 142

이다. 그리고 이 수들을 더하면

$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

이 된다. 그러면 이번에는 이 220의 약수 중에 자기 자신을 제외한 것을 생각해 보자. 그것은,

1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110

이다. 이것들을 다 더하면

$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$

바로 284가 되는 것이다. 이와 같이 서로 다른 두 수의 약수의 합이 서로 상대방의 수가 되는 것, 즉 a수의 자기 자신을 제외한 약수의 합이 b와 같고, b의 자기자신을 제외한 약수의 합이 a와 같은 2개의 수 a, b를 피타고라스 학파 사람들은 친화수라고 불렀고, 그것을 탐구하고 응용할 수 있는 범위를 연구하기도 했다.

이외에도 자연수 3, 4, 5의 관계를 탐구해

$3^2 + 4^2 = 5^2$

라는 관계를 발견해 냈으며 또 5, 12, 13이라는 자연수도

$5^2 + 12^2 = 13^2$

의 관계를 가지고 있음을 발견해 냈다. 그래서 일반적으로

$a^2 + b^2 = c^2$

이라는 관계를 만족시키는 세 수 a, b, c를 우리는 흔히 피타고라스의 수라고 이야기하기도 한다. 이 외의 피타고라스 학파의 것으로 알려져 있는 명제들은 다음과 같은 것들이다.

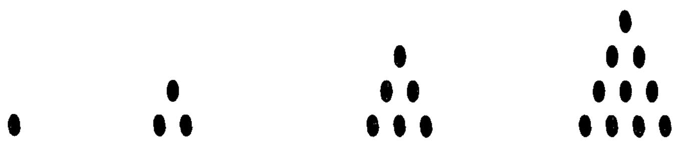
1. 짝수의 합은 짝수이다.
2. 짝수 개의 홀수의 합은 짝수이다.
3. 홀수 개의 홀수의 합은 홀수이다.
4. 짝수 빼기 짝수는 짝수이다.
5. 짝수 빼기 홀수는 홀수이다.
6. 홀수 빼기 홀수는 짝수이다.
7. 홀수 빼기 짝수는 홀수이다.
8. 짝수의 홀수 배는 짝수이다.
9. 홀수의 홀수 배는 홀수이다.
10. 하나의 짝수가 어떤 홀수에 의해서 나누어 떨어진다면, 이 짝수의 반도 같은 수에 의해서 나누어 떨어진다.
11. 어떤 홀수가 다른 수와 서로 소(素)의 관계에 있으면, 전자는 후자의 2배와도 서로 소이다.
12. 2로부터 시작하여 차례로 2배 한 수는 모두 짝수의 짝수 배뿐이다.
13. 어떤 수의 반이 홀수이면, 그 수는 홀수의 짝수 배가 될 뿐이다.
14. 위의 12, 13 이외의 짝수는, 모두 짝수의 짝수 배인 동시에 홀수의 짝수 배이기도 하다.

피타고라스 학파에 있어서 짝수와 홀수는 수론의 기본적인 개념임은 물론이고, 가설 우주의 근본 원리였던 것이다. 첫 번째 몇 개의 자연수들에 대한 중요성과 그것들을 합치고, 빼고, 나누고, 곱하는 것들은 모두 음악적 체계를 만드는 데 기본이 되고 있다. 그리고 음악과 수학에 관한 명제들은 후에 유클리드에 의해 선분을 통한 논증으로 다시 재증명된다.

3. 삼각수와 사각수

한편 피타고라스 학파의 수론 가운데 특이한 것은 수와 도형을 동일한 것으로 보는 점이다. ' 수는 동시에 하나의 도형이며, 도형은 동시에 하나의 수이다' 라는 입장을 가지고 있었던 것이다. 이러한 입장에서 그들은 수가 곧 점의 집합 이라고 보기 때문에, 여기서 삼각수, 사각수 등의 이른바 ' 형상수' 가 중요한 의미를 지니게 된다. 이들에게 있어서 ' 점은 위치를 갖는 1' 이고 ' 1은 위치가 없는 점' 이었다. 즉 이러한 대응관계 속에 그들은 스스로 아름다운 조화를 느꼈던 것이다. 수 중에서 가장 작은 단위인 1은 ● 으로 표현되고, 이 ' 점' 은 어떤 ' 크기' 를 지닌 ' 점' 이 된다. 이와 같은 피타고라스 학파의 독특한 논리는 기하학과 수의 연계를 꾀하고자 한 것으로, 후대에 점은 선의 시작이며 크기를 갖지 않는다고 정의하기 시작한 세대에 비해 경험적이고 직관적이라는 평가를 받는다.

피타고라스 학파 학자들은 그림과 같이 ● 을 정삼각형의 형태로 배열하여 나타낼 수 있는 수를 삼각수라고 불렀다.



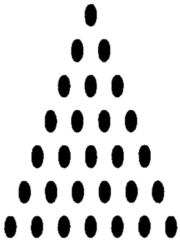
그림으로부터 알 수 있듯이 첫 번째 삼각수는 1, 두 번째 삼각수는 1 + 2 + 3, 세번째 삼각수는 1 + 2 + 3 + 6, 네 번째 삼각수는 1 + 2 + 3 + 4 = 10이 되는 것이다.

그리고 껑충 뛴 몇 번째의 삼각수를 찾고자 할 때는 같은 3각형을 또 하나 첨가해서 나누는 방법으로 계산한다.

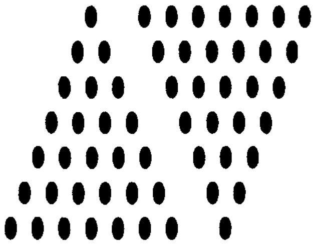
예를 들어 일곱 번째 삼각수를 보자.

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28

이 28을 점으로 나타내면



이 되고 여기에 같은 3각형을 하나 더 첨가해 계산법을 추출해 낸다.



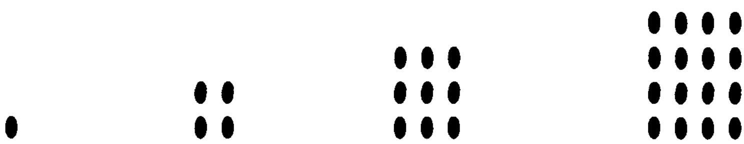
이 그림을 보면 세로가 7개이고 가로는 7 + 1개가 각각 배열되어 있다. 따라서 전체는 $7\times(7+1) = 56$의 갯수가 배열되는 셈이다. 그런데 이것은 일곱 번째의 삼각수의 2배이기 때문에 일곱 번째 삼각수는 $\{7\times(7+1)\} + 2 = 28$이 된다. 그리고 이것을 좀 더 수학적으로 표현하면 다음과 같이 된다.

제 n번째의 삼각수는

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

이 되는 것이다.

그러면 이 번에는 사각수에 대해 알아보자. 수많은 수들 가운데 가장 작은 단위인 ● 을 아름다운 형태로 배열하여 나타낼 수 있는 것에 큰 관심을 가진 피타고라스 학파가 그 다음 흥미롭게 탐구한 것이 사각수이다. 이번에는 1, 2, 3과 같은 자연수를 더해가며 정사각형의 형태로 배열해 나타낼 수 있는 수를 사각수라 부르며 탐구했던 것이다.



그림으로부터 금방 알 수 있듯이 첫 번째의 사각수는

$1 \times 1 = 1$

두 번째 사각수는

$2 \times 2 = 4$

세 번째 사각수는

$3 \times 3 = 9$

그리고 네 번째 사각수는

$4 \times 4 = 16$

이 된다.

따라서 껑충 뛴 아홉 번째의 사각수는

$9 \times 9 = 81$

이라고 할 수 있다.

이것을 수학적으로 표현한다면 n 번째의 사각수는

$n \times n = n^2$이 된다.

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

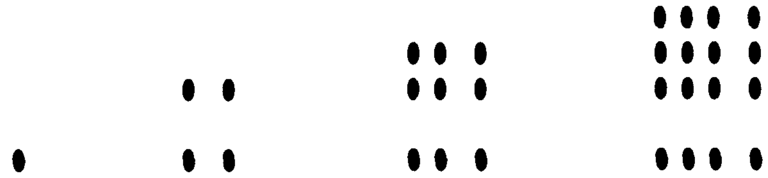
$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$ .....

이와 같이 홀수의 합이 사각수가 된다는 사실을 알게 된 것이다. 그리고 이것을 그림을 사용하여 증명했다. 먼저 최초의 홀수 1을 나타내는 단위로 ● 을 1개 둔다. 다음에 두 번째의 홀수 3을 나타내는 단위 점 3개 중, 1개는 그 오른쪽에, 1개는 그 오른편 아래쪽에, 그리고 나머지 1개는 그 바로 밑에다 둔다. 그렇게 하면 그림은



그러면 1 + 3 = 2 + 2 = 4가 분명해진다. 따라서 홀수와 사각수와의 관계를 수학적으로 표현하면

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

이 되는 것이다.

한편 삼각수와 사각수와의 관계도 재미있는 것으로 삼각수를

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...

과 같이 차례로 배열해서 그려 두고, 이것들을 이웃끼리 더해 보면

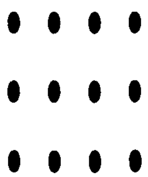
1 3 6 10 15 21 28 36 ...

1 4 9 16 25 36 49 64 ...

로 되어 언제나 답이 사각수가 된다.

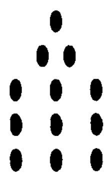
그래서 이 증명을 수학적으로 공식화하면 사각수는 $\frac{1}{2}n(n+1)$이라는 것을 알고 있고, 따라서 제 n-1 번째의 삼각수는 여기서 n 대신에 n-1을 넣은 $\frac{1}{2}(n-1)(n-1+1)$, 즉 $\frac{1}{2}n(n-1)$로서 주어지는 것이다. 따라서 제 n-1번째의 삼각수 $\frac{1}{2}n(n-1)$과 제 6번째의 삼각수 $\frac{1}{2}n(n+1)$을 더한 것을 계산해 보면 $\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}n(n+1) = n^2$으로 되어 확실히 제 1번째의 사각수가 얻어진다.

정사각으로 가는 위치의 합인 사각수를 때로는 제곱수(n^2)라고 부르기도 했고, 다음 직사각수 {n(n+1)}라든지, 5각수 {($\frac{1}{3}n(3n-1)$)}와 같은 것도 일일이 증명을 했다. 그러니까 이들은 모두 등차급수의 합으로 얻어지는 수들이 되는 것이다.



직사각수

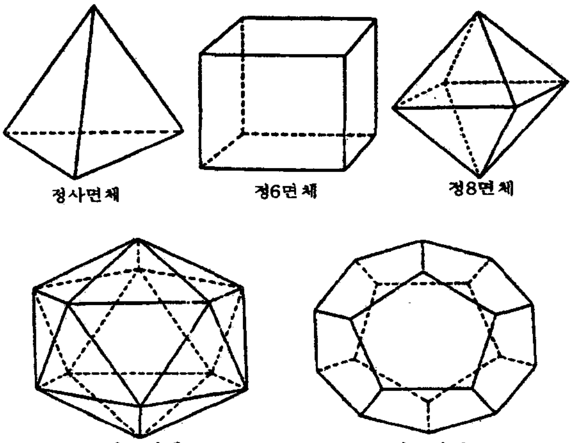
$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$



오각수

$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1}{3}n(3n-1)$

이와 같이 규정할 수 없는 것을 규정하고자 하는 피타고라스의 노력은 만물의 원리라고 생각한 수에 대한 탐구로부터 시작해, 그것을 가장 기본적인 기하학적 평면도형으로 가져갔고, 다시 그것이 입체기하학으로까지 발전하면 정다면체로서의 정4면체, 정6면체, 정8면체, 정12면체, 정20면체 등, 정3각형, 정4각형, 정5각형이 어떻게 그 공간적 근원을 대변하는가를 증명하게 된다.

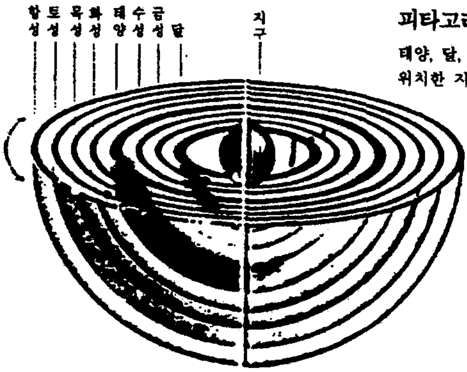


정사면체 정6면체 정8면체

정20면체 정12면체

그리고 이러한 다면체들이 만물의 원리와 연결되면서, 그것은 또한 피타고라스 학파의 천문학으로 통한다. 피타고라스 학파의 철학에서는 정4면체, 정6면체, 정8면체 및 정12면체의 정다면체를 세계를 이루고 있는 4개의 원소, 즉 불, 공기, 흙, 물로 여겼다. 그런가하면 이들은 정12면체를 우주, 그 자체를 표현한 형태로 인식했다. 전설에 의하면 히파소스는 □12개의 5각형을 갖는 구(球)□의 발견을 누설한 죄로 해상에서 죽었다고 하는 이야기도 있다. 피타고라스는 언제나 입체 중에서 가장 아름다운 것은 구(球)이고 평면도형 중에서도 원이 가장 아름답다고 말했다고 한다. 그는 대지가 구처럼 생겼다고 믿었다. 즉, 地球라는 생각을 가지고 있었던 것이다. 태양과 달, 그리고 5개의 행성 (수성, 금성, 화성, 목성, 토성)이 지구 주변에 공심원을 형성하고 돈다. 이들 공심원은 모두 구 또는 원에 고정되어 있으며 가장 먼 곳에 항성구가 있다. 그리고 이 천체가 움직이면 마치 현을 튕겼을 때처럼 공기가 진동하며 소리를 낸다. 그래서 우주는 마치 현을 가진 거대한 원형의 현악기와 같이 조화로운 합주를 한다고 믿었

고, 피타고라스 자신은 신들과 함께 이 거대한 악단의 연주를 탐구하듯이, 그 자체의 성질과 특성도 탐구하지만 서로의 통합적이고 유기적인 관계에 염두를 두고, 그 원리를 탐구해 나갔다.
정수론을 통해 자체에서의 1, 2, 3, 4와 같은 첫 자연수들의 중요성을 탐구하고 그것과 도형과의 관계 및 기타 수들 사이의 관계를 발견하듯, 앞서 설명한 모든 피타고라스의 생각들은 음악에도 그대로 적용된다. 다만 발견된 원리들이 소리로 실재화 되는 과정을 통해 피타고라스의 음악적 체계는 가시화되는 것이다.



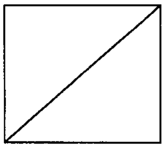
피타고라스의 우주관

태양, 달, 행성들은 중심에 위치한 지구를 돈다.

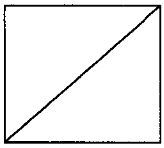
행성간의 관계, 홀수와 짝수의 관계, 수와 도형과의 관계, 삼각수와 사각수, 친화수와 완전수들의 관계, 입체와 수의 관계, 천체와 입체와 수의 관계 등 비록 각각 하나의 발견은 그리 대단한 것 같지 않다. 그러나 그것들의 관계를 생각하면 수 자체의 탐구는 또 다른 의미의 중요성을 띠게 되듯이, 이제 유리수와 무리수, 그리고 비(比, ratio)는 여태까지 설명된 피타고라스의 이론을 바탕으로 음악의 원리를 푸는 중요한 역할을 한다.

4. 유리수와 무리수, 그리고 비(比, ratio)

피타고라스의 정리를 다시 보도록 하자. 한 변의 길이가 1인 정사각형에 1개의 대각선을 긋고, 이것을 2개의 정삼각형으로 나누어 그 대각선의 길이를 x라고 한다.



이 때에 생긴 직각삼각형 하나에 피타고라스 정리를 적용하면 $1^2 + 1^2 = x^2$, 따라서 $x^2 = 2$가 된다. 그리고 이것에서부터 $x=\sqrt{2}$가 얻어진다.

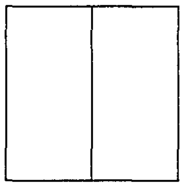


피타고라스 학파에게 직선이란 더 이상 분할할 수 없는 점들이 모여 이룬 선이기 때문에, 이 대각선 위에 배열되어 있는 점의 수를 p, 이 한 변 위에 배열되어 있는 점의 수를 q라고 하면 $\sqrt{2}$와 1의 비, 즉 $\sqrt{2}:1$은 $\sqrt{2}:1=\frac{p}{q}$로서, 분자와 분모가 모두 정수인 분수의 형태로 쓸 수 있는 것이라고 확신할 수 있었다. 이 $\sqrt{2}$라는 수가 사실은 분자와 분모가 모두 정수인 분수의 형태로는 나타낼 수 없는 수라는 것을 발견했던 것이다. 그 때까지는 정사각형의 대각선의 길이와 그 한변의 길이의 비는 분자와 분모가 모두 정수인 분수의 형태로 적을 수 있다고 단정하고 있었기 때문에 그런 형태로 적을 수 없는 수의 발견은 그들에게 큰 충격이었다.

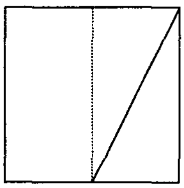
아무튼 p와 q를 정수로 하여 p와 q의 비가 되는 수 $\frac{p}{q}$는 비(ratio)가 되는 수라는 의미에서 rational number라고 불렀다. 그리고 rational이라는 단어는 본래 이유가 있는, 혹은 조리에 닿는다는 뜻이 있었기 때문에 이 rational number는 유리수(有理數)라고 일컬어지기도 한다.

그리고 $\sqrt{2}$와 같이 정수와 정수의 비의 형태로는 쓸 수 없는 수는, 비가 될 수 없는 수라는 의미에서 irrational number라 불렀다. 그런데 이 irrational이라는 단어에는 조리에 닿지 않는, 무리한 것이라는 의미가 있었기 때문에 이 irrational number는 무리수(無理數)라고 일컫게 된다. 따라서 $\sqrt{2}$는 하나의 무

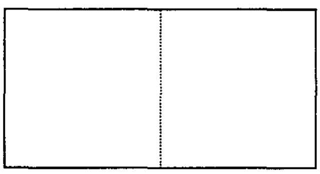
리수이다. 피타고라스 학파에게 무리수의 존재는 오직 순수한 추상적 사색을 통해서가 아니면 발견할 수가 없는 것으로 통하게 된다. 즉 피타고라스 학파는 무리수를 규정할 수 없는 것이 상징으로 생각하게 되는 것이다. 마찬가지로 피타고라스 정리에 의하여 나오는 무리수 $\sqrt{5}$는 가장 아름다운 신비한 비례로 통하게 된다. 정사각형 ABCD의 한 변 $\overline{BC}$의 중점을 P, $\overline{PC}$ = 1이라고 가정하면



위와 같은 그림이 되고, 피타고라스의 정리에 의하면 $\overline{PD}=\sqrt{5}$가 된다.



여기서 PD = PQ가 되도록 BC의 연장선 위에 점 Q를 잡는다.



그러면 직사각형 ABQQ', 세로 : 가로

$$2:(1+\sqrt{5})=1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

□1:1.618 이 된다.

바로 이 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$는 고대 그리이스인들에게는 가장 안정감을 주는 아름다운 비로 비치게 한다.

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$의 비를 황금분할(Golden Section)이라고 이름지은 사람은 물론 레오나르도 다빈치였지만, 후대에 사람들은 이러한 황금분할의 아름다움을 적용하기보다 그것이 사용된 것을 발견해 내는 것을 더 큰 즐거움으로 삼아왔다. 그리고

이것을 도형적으로 이야기하면 정5각형의 작도와도 연결된다. 윌 생활 속에서 쉽게는 꽃꽂이라든가, 인체의 머리부분과 상반신과 관계를 따져 컷트를 하는 등에 이 비례가 사용되어지고 있는 것을 볼 수 있다. 이와 같이 피타고라스는 무리수의 존재를 발견하지만 그것은 규정할 수 없는 것의 상징으로 여기고 그 이상의 탐구는 유보하게 되며, 유리수 즉 비(比)에 대한 문제는 더욱 발전을 하게 된다.

5. 피타고라스 음계와 비(比, ratio)

전설에 의하면 피타고라스는 숲 속의 대장간 앞을 지날 때 쇠를 두드리는 소리를 듣고 소리는 공기의 진동수에 따라 달라진다는 것을 깨닫고 음계에 대한 생각을 한 것으로 알려져 있다. 다시 한번 피타고라스의 사고과정을 살펴보도록 하자.

원래 음의 높이는 물리적으로 공기의 진동수에 의해 정해지는 것으로 진동수는 무한히 커질 수있다. 연속적으로 분포되어 있는 진동수 중에서 일정한 간격을 두고 불연속적으로 배열되어 있는 진동수를 택하여 음계를 만든 사람이 피타고라스라고 하겠다. 이미 언급한 바와 같이 모든 수, 즉 자연수는 1의 모임임과 동시에, 그것은 점의 모임이며, 또한 모든 도형도 역시 이 점의 모임인 것이다. 그리고 이 점이 크기를 갖는 점이라고 생각한 피타고라스에게 당연히 선분은, 그 수의 많고 적음에 관계없이 유한(有限) 개의 점으로 이루어진다는 것이 성립된다. 피타고라스의 눈에는 선분

이 크기를 갖는 점의 모임인

으로 보인 것이다.

이러한 사고로 선분을 보면 그 어떤 선분도 유한 개의 점으로 이루어져 있게 마련이다. 따라서 그 길이는 언제나 정수로 나타낼 수 있어야 하고, 두 선분의 길이의 비도 언제나 유리수, 즉 정수비로 나타난다는 것이다. 마찬가지로 선분을 점의 모임이라고 생각한 것이나 다름없이 공기의 진동수도 유리수로만 표시될

수 있다고 믿은 사람이 피타고라스였다. 다시 말해서 꽉 차 있다고 생각되는 유리수 전체는 연속되어 있는 것으로 보이지만 이것을 절단해 보면 불연속의 마디가 지속적으로 연결되어 있는 것이다. 피타고라스는 여기에서 그 불연속의 마디가 아주 작은 것이기는 하나 역시 크기를 갖고 있다는 생각을 하기에 이른 것이 아닌가 유추된다. 선분도 진동수도 연속체이다. 이것을 마디로 끊는다는 것은 마디에 있는 크기를 인정하지 않고는 어려운 일일 것이다. 그러나 이것은 비단 선분이나 진동수뿐만은 아니다. 가령 무지개는 일곱 가지 색깔로 되어 있다고 알고 있지만, 무지개의 스펙트럼을 잘 보면 빨간색부터 보라색까지 다채로운 색깔들이 연속적으로 펼쳐져 있으며, 그 사이에 뚜렷한 마디가 있는 것은 아니다. 무지개가 일곱 가지 색깔로 되어 있다는 것은 다만 우리가 머리 속에서 '빨강, 주황...' 이라는 말로 마디를 만들어간 것에 지나지 않는다. 이 마디를 만드는 방법은 일곱 가지가 아니라 10가지, 100가지라도 가능한 것이다. 우리 연속의 감각은 연속적이지만 개념의 세계는 불연속, 즉 마디가 있는 것 같다.

피타고라스 학파가 아닌 그리이스인들도 유리수에 관해서는 버릴 수 없는 매력을 느끼고 있었던 것으로 알려져 있다. '미(美)는 조화이며, 조화는 비(比)이고, 비는 유리수이며, 그것은 로고스다' 라는 관념은 그리이스 지식인들에게 공통되는 사상으로 수용되어 간다.

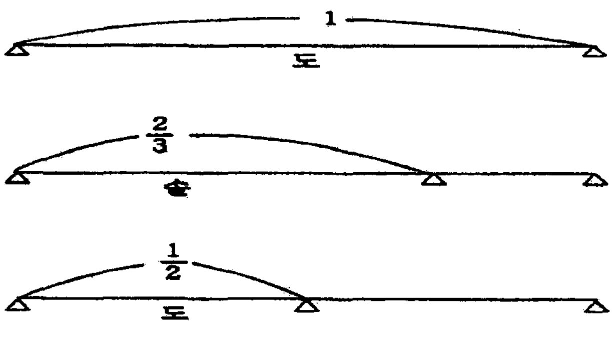
이와 같이 피타고라스의 수론에서 자연수들 의미가 갖는 중요성에 대한 인식은 학자들로 하여금 자연스럽게 유리수를 더욱 탐구하게 만드는데, 이러한 ratio에는 아래와 같이 근본적으로 여섯 가지 종류가 있다고 생각했다.

1. equal	1:1, 2:2, 3:3 ....
2. multiple	1:2, 1:3, 1:4 ...
3. epimore	2:3, 3:4, 4:5 ...
4. multiple-epimore	2:5, 3:7, 4:9 ....,
	2:7 ....,
	3:10 ....,
5. epimere	3:5, 4:7; 5:7, 5:8, 5:9 ....,
6. multiple-epimere	3:8; 4:11, 4:15; 5:14, ...

equal은 말 그대로 동수의 비를 말한다. multiple은 제곱수인 사각수의 도형을 보면 알 수 있듯이, 그 각 변의 점이 늘어나는 비를 따라가는 것을 일컫는다.

다음 epimore는 큰 수가 작은 수보다 1이 더 많은 관계에 있는 두 수의 비를 나타내며, multiple epimore는 작은 수의 두 배보다 1이 더 많은 수가 큰 수로, 예를 들어 2:5는 2:(2×2)+1이 되는 비로 이것은 multiple인 동시에 epimore가 되는 경우이다. 다음 epimere는 위 1, 2, 3, 4의 예에 포함되지 않는 것으로 양쪽의 수가 1 이상 2, 3, 4의 차이가 있는 그런 수들의 비를 말하며, multiple-epimere는 작은 수의 두 배보다 2, 3, 4의 차이로 확대되는 두수의 비를 말한다.

그런데 비(ratio)를 탐구하면서 피타고라스 학파는 비의 가치에 위계를 세우고 있는 것을 관찰할 수 있다. 다시 말해서 이들은 정수의 범위 안에서도 가장 기본이 되는 첫 번째 몇 개의 자연수, 즉 1, 2, 3을 통해 표현되는 비가 더 조화롭고 좋다는 가치부여를 한다. 따라서 1, 2, 3에 의해 표현되는 비가 소리화 되었을 때 그것이 다른 비가 소리로 환원된 것보다 더욱 조화롭다고 생각했다. 그리고 이 작은 자연수의 비는 곧 더 큰 수들의 기초가 된다고 믿었다. 그래서 피타고라스는 하나의 현을 1로 잡고, 그 현을 팽팽하게 하여 소리를 낸 다음, 그 현의 길이를 $\frac{2}{3}$로 하여 소리를 내면 본래의 음보다 5도가 높은 음이 나오고, 현의 길이를 본래의 $\frac{1}{2}$로 하여 소리를 내면 이번에는 본래의 음보다 8도, 즉 한 옥타브 높은 음이 나온다는 것을 발견했다. 즉 본래의 음을 가운데 '도' 음이라고 한다면, 그보다 한 옥타브 높은 '도'의 음이 나온다는 것이다. 이것을 현의 길이로 표현해 보면 다음과 같다.



물론 이렇게 해서 얻어지는 '도' 음, '솔' 음, 그리고 최초의 '도' 음보다 한 옥타브 노은 '도' 음의 세 가지는 정도 1, 2, 3의 비가 소리로 환원된, 갖

아 조화로운 음체계의 기초가 되는 것이다. 음은 연속적인 현상으로 낮은 음에서 높은 음에까지 단절됨이 없이 계속되어 가는 직선과 같은 것이다. 그것에서 어떤 일정 길이를 선분으로 하여 무한한 진동수 중에 가장 단순하고 조화로운 마디를 끊어 소리를 냄으로써 음의 기본체계를 만들고, 그것을 통해 다시 만물의 원리를 깨닫게 하는데 기여하고자 한 것이 이 때의 음악이다.

이렇게 1, 2, 3을 가지고 현 길이의 비율과 진동수, 그리고 거기에서 나오는 음을 비교해서 다루다가, 현 길의 비율이

$$1 \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{1}{2}$$

이면, 이들 현이 내는 음의 진동수 비율은 이들의 역수

$$1 \qquad \frac{3}{2} \qquad 2$$

비율이 된다는 것을 발견하게 된다.

여기서 피타고라스는 또 다시 1, $\frac{3}{2}$, 2는 최초의 1에 $\frac{1}{2}$을 더하면 $\frac{3}{2}$이 되고, 그 $\frac{3}{2}$에 다시 같은 $\frac{1}{2}$을 더하면 다음의 2가 얻어진다는 사실을 발견하게 된다. 즉, 1, $\frac{3}{2}$, 2라는 3개의 수는 이른바 등차수열로 되어 있다는 것을 알게 되었다.

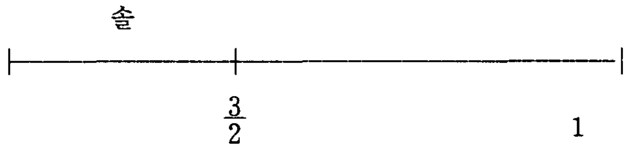
그래서 피타고라스는 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$과 같이 그 역수 1, $\frac{3}{2}$, 2가 등차수열이 되는 수를 조화수열이라고 불렀다. 그래서 우리가 배운 조화수열의 조화라는 말은, 사실은 음의 조화에서 유래한 것이라는 것을 알 수 있다. 이렇게 해서 피타고리안 음계 혹은 피타고리안 시스템은 12개의 완전 5도($\frac{3}{2}$), 그러니까 최초의 자연수 중 다른 음이 파생되는 완전 5도의 수열로 이루어진 체계임을 알 수있다. 이렇게 하는 과정에서 피타고라스는 다른 비의 가능성을 배제함으로 스스로를 한정시키기도 했지만, 그것이 완전한 것이라고 생각했다. 피타고리안 음계체계는 이때부터 오늘에 이르기까지 서양음악이 수정 보완하며 발전시킨 근본 체계가 되었다.

한편 이 피타고라스의 발견을 진동수로 고쳐서 서술하면 다음과 같이 된다.

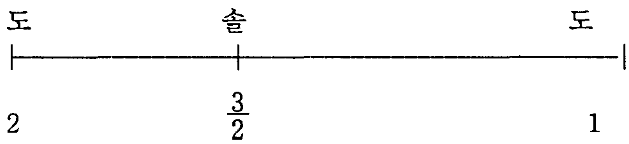
‘ 진동수를 본래의 $\frac{3}{2}$배로 하면 5도 높은 음이 얻어진다.’ 그리고 이것을 역으로 말하면,

‘ 진동수를 본래의 $\frac{3}{2}$배로 하면 5도가 낮은 음이 얻어진다.’ 는 것이 된다. 또 ‘ 진동수를 본래의 2배로 하면 한 옥타브가 높은 음이 얻어진다.’ 한편 이것을 거꾸로 말하면 ‘ 진동수를 본래의 $\frac{1}{2}$로 하면 한 옥타브가 낮은 음이 얻어진다.’ 그러면 이번에는 어떻게 피타고라스의 체계가 한 옥타브 안에 압축되는지 살펴 보기로 하자.

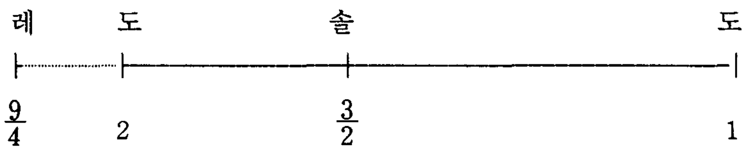
먼저 ‘ 도’ 음에서부터 시작하여 그 진동수를 $\frac{3}{2}$배로 하면 ‘ 도’ 보다 5도가 높은 음 ‘ 솔’ 이 얻어진다.



다음에 ‘ 도’ 의 음에서부터 시작하여 그 진동수를 2배로 하면 본래의 ‘ 도’ 보다 한 옥타브 높은 음 ‘ 도’ 가 얻어진다.



다음에는 ‘ 솔’ 의 음, 즉 진동수가 최초의 ‘ 도’ 의 $\frac{3}{2}$배인 음에서부터 시작하여 그 진동수를 다시 한번 $\frac{3}{2}$배 하여 결국 $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}$배로 하면 음 ‘ 레’ 가 얻어진다.



그러나 이 ‘ 레’ 음은 그림이 가리키고 있듯이 최초의 ‘ 도’ 보다 한 옥타브가 높은 ‘ 도’ 보다도 더 높은 ‘ 레’ 이다. 그래서 이 ‘ 레’ 의 진동수, $\frac{9}{4}$를 $\frac{1}{2}$로 하여 한 옥타브를 내리면, 진동수가 최초의 ‘ 도’ 음의 $\frac{9}{8}$인 ‘ 레’ 가 얻어진다.

레	도	솔	레	도
$\frac{9}{4}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	1

다음에는 한 옥타브가 높은 ‘ 도’ 음을 5도 내려본다. 그러려면 한 옥타브가 높은 ‘ 도’ 의 진동수를 $\frac{2}{3}$배 하면 되므로, 최초의 ‘ 도’ 에서부터 말하면, 최초의 ‘ 도’ 의 진동수를 2배하여 다시 $\frac{2}{3}$하는 것이 되므로, 결국 $\frac{4}{3}$배를 하는 것이 된다. 이리하여 ‘ 파’ 의 음이 얻어진다.

레	도	솔	파	레	도
$\frac{9}{4}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{8}$	1

이와 같이 □5도 올린다□, □5도 내린다□, □한 옥타브를 올린다□, 혹은 □한 옥타브를 내린다□고 하는 조작을 반복하면 피타고라스의 음계가 얻어지는 것이다.

그러니까 한편으로

f	c^1	g^1	d^2	a^2	e^3	b^3	
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	…
$\left(1\div\frac{3}{2}\right)$		$\left(\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5$	…

으로도 표현이 되며 그것을 한 옥타브로 내려 계산하게 되면

$$c^1 = 1$$

$$d^1 = d^2\left(\frac{9}{4}\right) \div 2 = \frac{9}{8}$$

$$e^1 = d^3\left(\frac{81}{16}\right) \div 4 = \frac{81}{64}$$

$$f^1 = f\left(\frac{2}{3}\right) \times 2 = \frac{4}{3}$$

$$g^1 = \text{그대로} = \frac{3}{2}$$

$$a^1 = a^2\left(\frac{27}{8}\right) \div 2 = \frac{27}{16}$$

$$b^1 = b^3\left(\frac{243}{32}\right) \div 4 = \frac{243}{128}$$

으로 되는 것이기도 하다. 그래서 나오는 피타고라스 음계는 다음과 같은 비로 표현된다.

도	시	라	솔	파	미	레	도
2	$\frac{243}{128}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{9}{8}$	1

이렇게 볼 때 음계 체계는 조화수열로 가지만 도에서 도까지의 구간에 들어오는 순차적인 음은 때로 복잡한 정수의 비를 가지게 된다. 그래서 피타고라스는 가장 단순한 정수비로 표현되는 음정, 즉 옥타브(1:2), 5도(2:3), 4도(3:4), 그리고 옥타브에 5도를 더한 12도(1:3)와 같이 1, 2, 3의 비로 만든 체계 안에서 단순 정수비로 나타나는 음정관계만을 조화스런 협화음의 범주에 넣었다. 이 부분은 현재 overtone을 연구하는 학자들 가운데 너무 인위적이라 하여 부정적인 평가를 받는 경우도 있의며, 때론 그것이 피타고라스의 한계라 지적되기도 한다.

6. 피타고라스 음계와 순정조

위의 그림으로도 알 수 있듯이, 이 방법을 반복하는 것만으로는 다음 르네상스 때부터 수정 보완되어 쓰이는 순정조의 음계가 얻어지지 않는다.(아래 보기)

도	시	라	솔	파	미	레	도
2	$\frac{15}{8}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{9}{8}$	도

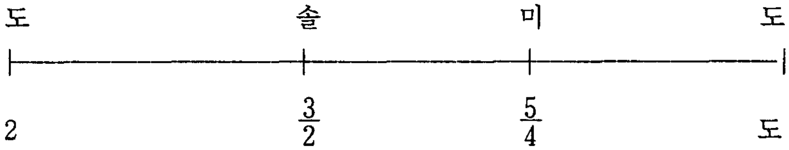
그렇다면 피타고라스의 음계와 순정조 음계의 차이를 보기 위해서 피타고라스의 생각에다 또 하나의 생각을 덧붙여서 순정조의 음계를 만들어 보기로 하자. 먼저, 최초의 ' 도' 에서부터 출발하여 그 진동수를 2배하면 그보다 한 옥타브가 높은 ' 도' 음이 얻어진다.

도	도
2	1

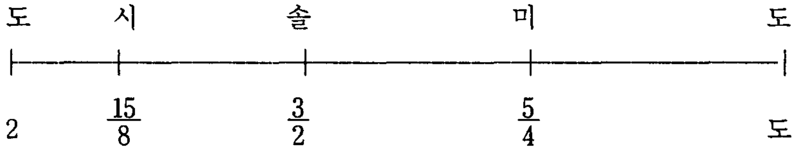
다음에 최초의 ' 도' 음에서 출발하여 그 진동수를 3배 하면 어떤 음이 얻어질까? 이 음이 어느 음인가를 알기 위해서는 그 진동수를 $\frac{1}{2}$로 하여 한 옥타브를 내려 보면 된다. 그렇게 되면 진동수는 본래의 $\frac{3}{2}$배이am로 이것은 피타고라스가 알고 있던 ' 솔' 의 음이다.

도	솔	도
2	$\frac{3}{2}$	1

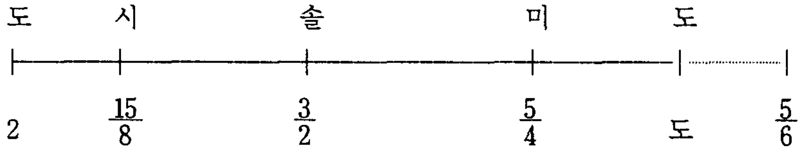
다음에는 최초의 ' 도' 음에서부터 출발하여 그 진동수를 4배로 하면 어떤 음이 얻어질까? 이것은 최초의 ' 도' 음의 진동수를 2배로 한 다음 다시 2배한 것이 되므로, 그것은 최초의 ' 도' 의 음보다 두 옥타브가 높은 ' 도' 음이 된다. 그 다음 최초의 ' 도' 음으로부터 출발하여 그 진동수를 5배 하면 어떤 음이 얻어지겠는가? 이 음이 어떤 음인가를 알려면 그 진동수를 $\frac{1}{4}$로 하여, 두 옥타브를 내려 보면 된다. 그렇게 하면 진동수는 본래의 음의 $\frac{5}{4}$가 된다. 그리고 이것이 실은 ' 미' 음이 되는 것이다.



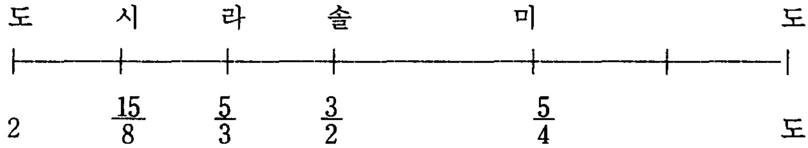
그러면 여기서 피타고라스의 생각을 사용하여 이 ‘ 미’ 음을 5도 높여 보기로 하자. 5도를 올리기 위해서는 그 진동수를 $\frac{3}{2}$ 으로 하면 되므로, $\frac{5}{4}$ 를 $\frac{3}{2}$ 배 하여 $\frac{15}{8}$, 즉 진동수가 본래의 ‘ 도’ 음의 $\frac{15}{8}$ 의 음이 얻어진다. 이것은 ‘ 시’ 음이 되는 것이다.



다음에는 마찬가지로 피타고라스의 생각을 사용하여 이 ‘ 미’ 음을 5도 내려 본다. 5도를 내리기 위해서는 그 진동수를 $\frac{2}{3}$ 배 하면 되므로, $\frac{5}{4}$ 를 $\frac{2}{3}$ 배 하여 $\frac{5}{6}$, 즉 진동수가 본래 ‘ 도’ 음의 $\frac{5}{6}$ 배 관계에 있는 음이 얻어지게 된다.



그러나 이것은 본래의 ‘ 도’ 보다 낮은 음이다. 그래서 이것을 한 옥타브 올리기 위해 그 진동수를 2배 해보면, 그 진동수가 본래 ‘ 도’ 의 진동수의 $\frac{5}{3}$ 배인 음이 얻어진다. 이것이 ‘ 라’ 의 음이 된다.



앞에서 피타고라스가 얻었던 음 ' 레' , ' 파' , ' 솔' 과 지금 이렇게 하여 얻어진 음을 합치면 이른바 순정조의 음계가 얻어져 3도의 음정이 안정되는 것이다.

도	시	라	솔	파	미	레	도
2	$\frac{15}{8}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{9}{8}$	도

피타고라스의 생각만으로 이 순정조의 음계가 얻어지지 않는 이유는, 피타고라스의 방법에서는 분자가 5, 또는 5의 배수라고 하는 진동수의 음은 절대로 얻어질 수 없다는 생각을 했기 때문이다. 음악을 생각하는 관념의 세계는 수의 형이상학을 넘어 다채로운 새로운 지평으로 나아갔지만 음의 치게 자체는 피타고리안 시스템에서 순정조로 갔다가, 평균율, 즉 처음 ' 도' 의 진동수를 1이라 한다면 그에 일정한 수를 더해 12승하여 1 옥타브 위 ' 도' 의 진동수 2를 얻는 $(1+x)^{12}=2$, 다시 말해서 $(1+0.059)^{12}=2$라는 수식으로 가는 것을 생각하면, 음의 체계는 크게 변하지 않았다는 생각도 하게 된다.

진동수를 cents로 계산하는 방법을 고안해 낸 A.J.Ellis(1814-90)는 이제 피타고라스 시스템의 비를 오늘의 시스템과 비교하는 것을 좀 용이하게 해준다.

그러니까 이 cent 계산법에 의하면 평균율에서 1 cent란 $\frac{1}{1200}$ 옥타브이고, $\frac{1}{100}$ 반음이 된다. 그래서 비(ratio)를 cent로 가져오려면 큰 수의 log가에서 작은 수의 log가를 빼서 그 차리를 $\frac{1}{Log2}$ 인 3986을 곱하면 되는 것이다. 그러면 도에서 레 사이를 계산해 보면,

log 9 = .9542 　　　 .0511
log 8 = .9031 → 　 × 3986

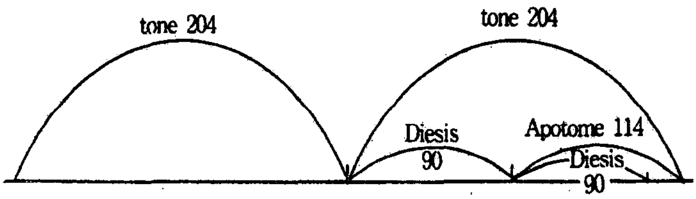
차이 = .0511 　　　 203,6846 ≒ 204 cents 가 된다.

그런데 다음 시에서 도까지의 ratio를 cent 로 계산해보면,

log 256 = .4082 .0226
log 243 = .3856 → × 3986

차이 = .0226 90,0836 ≒ 90 cents 가 된다.

여기에서 피타고리안 시스템의 온음은 평균율보다 진동수가 4 cent 더 많고, 한편 반음은 10 cent가 적다는 결론이 나온다. 한편 피타고라스 시스템 자체 내의 진동수를 cent로 환원해 보면 온음, 즉 tone이 204 cent인데 반해 반음이 90 cent 이기 때문에 반음들을 더한 것이 180 cent 가 되어 그 차이가 24 cent로 산출된다. 바로 이 24 cent를 우리는 피타고리안 콤마(Pythagorean comma)라고 일컫는다. 그래서 피타고리안 체계에서는 두 가지의 반음이 생기는 것이다. 즉, 작은 반음 Diesis 와 큰 반음 Apotome 이다.



그리고 피타고리안 콤마는 다른 방법으로도 산출할 수 있다. 피타고라스가 처음 음 체계를 만들 때 썼던 완전 5도를 cent로 계산하면 702 cent이다. 이 702 cent를 12번 반복했으니까 그것은 702×12=8424가 된다. 그것은 일곱 옥타브에 해당하는 음으로 1200×7=8400로 계산이 된다. 끝에 가서 떨어져야 할 b#이 c를 능가하는 24 cent의 차이가 나온다. Pythagorian comma는 이렇게 해도 나오고 1200 cent와 피타고라스의 6개의 whole tone 204×6=1224 cent를 비교해도 나오게 되어 있다.

피타고라스 학파는 ‘ 만물의 원리’를 규정하고자 하는 노력을 수라고 하는 페라스적 개념을 도입해 풀어나갔다. 수학이라고 하는 것이 단순한 과학적 도구여서가 아니라, 그것이 음악적인 미를 수반할 수 있으며, 동시에 우주의 질서를 유지해 준다는 통합적인 입장에서 일관성 있게 관통하는 논리와 체계를 만들어 주는 매개가 되었다는 것이 놀랍다. 피타고라스적 사상에 있어서 수 하나하나는 그렇게 심오한 중요성을 지니고 있는 것 같지 않다. 그러나 그들이 상호 유기적

관계로 형성해 나가는 체계는 학문의 본질을 구축하는 기초를 드러내 주고 있다. 다시 말해서 피타고라스 학파는 수 전체를 통해서 파악할 수 있는 존재양식에 따라서 우주도, 음악도 역시 존재한다고 믿고 그 원리를 끈질기게 탐구했던 것이다.

나가면서

음악의 체계가 수학이나 과학의 전제 없이 존재할 수 없었다는 사실은 어느 정도 이해가 되었으리라 본다. 그러나 이 후 2000년의 역사를 이어 나오면서 과학의 발견과 발전이 얼마나 예술의 근본을 이루는 가는 이루 나열할 수 없을 정도로 그 예가 풍부하다. 양자의 근본적인 관계를 배움으로 또 다른 지평의 새로움을 창조할 수 있는 길은 무수히 많다. 그러나 예술과 과학의 관계 속에서 무엇인가를 직접 만들지 않더라도, 과학도가 그리고 예술가가 그냥 상대방의 존재를 수업 활동 안에서 접하기만 해도 이미 양자에 내포되어 있는 특징들이 학생의 형성에 알게 모르게 영향을 미친다는 사실 또한 주지할 필요가 있다. 이 같은 현상은 지식 습득 연령 이전의 아동들을 관찰해보면 알 수 있다. 보편적으로 사용되는 언급을 빌자면, 예술활동은 동적이고 유연한 사고를 길러주어 예기치 않은 상황에도 창의적으로 대처할 수 있는 힘을 길러주고, 지식을 적재 적소에 활용할 수 있는 힘도 된다고 한다. 그런데 사실 이 같은 표현이 가능한 이유는 이미 예술 안에 과학을 토대로 가지고 있기 때문이라고도 할 수 있다. 이제 예술과 과학은 각각에 이미 존재하는 상대의 논리와 형태를 더욱 창조적으로 발전시켜야 할 의무를 재인식해야 할 것이다.