

2차 정확도 풍상차분기법을 이용한 유체의 주기적 거동 해석

인태훈* / 조용식**

1. 서론

지진해일 또는 조석과 같은 주기를 갖는 장파가 해안선에 도달하면 파랑은 해안선을 따라 연속적으로 쳐 오르내림을 반복하므로 해안선의 위치는 고정되어 있지 않고 계속하여 이동하게 된다. 해안선 근처에서 입사 파가 처오를 경우에 해안선은 실제로 육지방향으로 이동하게 되며, 파랑이 다시 쳐내릴 경우에는 외해방향으로 이동한다.

본 연구에서는 조용식과 윤태훈(1996)이 개발한 이동경계조건의 수치모형에 사용된 천수방정식의 비선형 항에 대해 2차 정확도의 풍상차분기법을 적용한다. 개발된 수치모형은 바닥마찰저항이 없는 타원형 수조에서의 유체의 주기적인 거동을 수치해석하여 정확해에 더욱 근접한 결과를 도출하고자 한다.

2. 지배방정식과 수치모형

해안선 근처에서의 장파의 거동은 다음과 같은 보존형태의 비선형 천수방정식(nonlinear shallow-water equations)에 의해 지배된다(조용식과 윤태훈, 1996).

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{PQ}{H} \right) + gH \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{PQ}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q^2}{H} \right) + gH \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

방정식 (1)-(3)에서 ζ 는 자유수면변위(free surface displacement), P 와 Q 는 각각 x 축과 y 축 방향의 체적흐름율, 즉 $P=u(h+\zeta)$ 와 $Q=v(h+\zeta)$ 이며, h 는 초기 정지수면(still water level)상의 수심, H 는 전체수심, 즉 $H=h+\zeta$ 이다.

* 한양대학교 대학원 토목공학과 석사과정 · 02-2290-0318 (E-mail:taehoony@ihanyang.ac.kr)

** 한양대학교 공과대학 토목공학과 교수 · 02-2290-0393 (E-mail:ysc59@hanyang.ac.kr)

본 연구에서 식 (1)-(3)은 leap-frog기법을 이용하여 차분화하며(Liu 등, 1995), 식 (2)와 (3)의 운동량방정식 중 비선형항은 2차 정확도의 풍상차분기법(upwind difference scheme)을 이용하여 해석한다(Shyy, 1985). 아울러, 유한차분기법에서 공간과 시간에 대하여 모두 엇갈림격자(staggered grid system)를 사용한다. 지배방정식을 풍상차분법으로 차분화할 때 발생하는 수치분산을 감소시키고 안정성을 유지하기 위해서는 많은 주의와 노력이 필요하다. 따라서, 수치계산 과정에서 발생하는 인위적인 수치분산이 물리적인 분산을 초과하지 않도록 공간격자와 시간격자의 크기를 적절히 조절해야 한다(Li, 1997).

식 (2)와 (3)의 비선형항을 Shyy(1985)의 방법에 의해 2차 정확도의 풍상차분기법으로 차분화하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{H} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta x} \left[3 \frac{(P_{i+1/2,j}^n)^2}{H_{i+1/2,j}} - 4 \frac{(P_{i-1/2,j}^n)^2}{H_{i-1/2,j}} + \frac{(P_{i-3/2,j}^n)^2}{H_{i-3/2,j}} \right], & P_{i+1/2,j}^n \geq 0 \\ \frac{1}{2\Delta x} \left[(-3) \frac{(P_{i+1/2,j}^n)^2}{H_{i+1/2,j}} + 4 \frac{(P_{i+3/2,j}^n)^2}{H_{i+3/2,j}} - \frac{(P_{i+5/2,j}^n)^2}{H_{i+5/2,j}} \right], & P_{i+1/2,j}^n < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{QP}{H} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta y} \left[3 \frac{(QP)_{i+1/2,j}^n}{H_{i+1/2,j}} - 4 \frac{(QP)_{i+1/2,j-1}^n}{H_{i+1/2,j-1}} + \frac{(QP)_{i+1/2,j-2}^n}{H_{i+1/2,j-2}} \right], & Q_{i+1/2,j}^n \geq 0 \\ \frac{1}{2\Delta y} \left[(-3) \frac{(QP)_{i+1/2,j}^n}{H_{i+1/2,j}} + 4 \frac{(QP)_{i+1/2,j+1}^n}{H_{i+1/2,j+1}} - \frac{(QP)_{i+1/2,j+2}^n}{H_{i+1/2,j+2}} \right], & Q_{i+1/2,j}^n < 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{PQ}{H} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta x} \left[3 \frac{(PQ)_{i,j+1/2}^n}{H_{i,j+1/2}} - 4 \frac{(PQ)_{i-1,j+1/2}^n}{H_{i-1,j+1/2}} + \frac{(PQ)_{i-2,j+1/2}^n}{H_{i-2,j+1/2}} \right], & P_{i,j+1/2}^n \geq 0 \\ \frac{1}{2\Delta x} \left[(-3) \frac{(PQ)_{i,j+1/2}^n}{H_{i,j+1/2}} + 4 \frac{(PQ)_{i+1,j+1/2}^n}{H_{i+1,j+1/2}} - \frac{(PQ)_{i+2,j+1/2}^n}{H_{i+2,j+1/2}} \right], & P_{i,j+1/2}^n < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q^2}{H} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta y} \left[3 \frac{(Q_{i,j+1/2}^n)^2}{H_{i,j+1/2}} - 4 \frac{(Q_{i,j-1/2}^n)^2}{H_{i,j-1/2}} + \frac{(Q_{i,j-3/2}^n)^2}{H_{i,j-3/2}} \right], & Q_{i,j+1/2}^n \geq 0 \\ \frac{1}{2\Delta y} \left[(-3) \frac{(Q_{i,j+1/2}^n)^2}{H_{i,j+1/2}} + 4 \frac{(Q_{i,j+3/2}^n)^2}{H_{i,j+3/2}} - \frac{(Q_{i,j+5/2}^n)^2}{H_{i,j+5/2}} \right], & Q_{i,j+1/2}^n < 0 \end{cases} \quad (7)$$

식 (4)-(7)에 의한 차분화 과정에서 발생하는 오차는 모두 $O((\Delta x)^2)$ 또는 $O((\Delta y)^2)$ 이상으로 나타나 수치모형 전체적으로 2차 정확도를 갖는다.

3. 수치해석

본 연구의 수치모형에서는 먼저 연속방정식을 해석하여 전 영역에서의 자유수면변위를 계산한다. 이 때 초기 건조격자의 자유수면변위는 계속 0을 유지하게 되는데, 이는 주변격자의 체적흐름율이 0이기 때문이다. 다음으로, 연속방정식에서 새로이 계산한 자유수면변위를 이용하여 해안선의 격자를 수정한다. 즉, 해안선의 전체수심이 육지방향의 다음 격자로 해안선의 이동이 가능한가를 검사하며, 이 때 운동량방정식을 이용하여 체적흐름을 P와 Q를 계산한다.

본 장에서는 제 2장에서 유도된 2차 정확도의 풍상차분법에 의한 비선형 천수방정식을 그림 1에 도시된 것과 같은 포물형 수조에서에 적용하여 유체의 주기적 거동을 모의한다. 계산된 결과를 정확해와 기존의 이동경계조건에 의한 결과에 비교하여 정확도를 검증한다. Thacker(1981)는 포물형 수조에서의 유체의 반복적인 거동에 대해 비선형 천수방정식을 직접 해석하여 정확해를 구하였다. Thacker의 포물형 수조에서 비선형 천수방정식에 의한 정확해는 다음과 같으며 유도 과정은 조용식과 윤태훈(1996)을 참고할 수 있다.

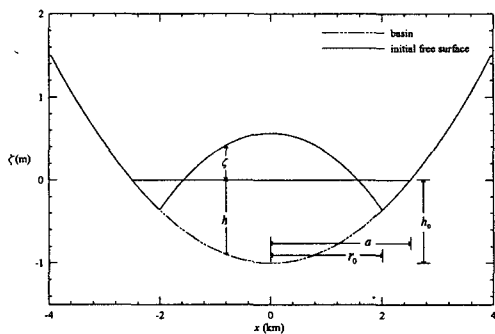


그림 1. 포물형 수조(Thacker, 1981)

$$\zeta = h_0 \left[\frac{(1-A^2)^{1/2}}{1-A \cos \omega t} - 1 - \frac{r^2}{a^2} \left\{ \frac{1-A^2}{(1-A \cos \omega t)^2} - 1 \right\} \right] \quad (8)$$

그림 2는 초기상태로부터 시간변화에 따른 자유수면 변위의 변화를 Thacker의 정확해와 기존의 수치해석 결과에 본 모형의 계산값을 비교한 것이다. 수면이 하강하는 반주기 동안에는 정확해와 수치계산 결과가 거의 일치한다. 그러나, 그림 3에서 수면이 상승하고 해안선의 위치가 하강하는 나머지 반주기 동안에는 조용식과 윤태훈(1996)의 수치해가 정확해에 비해 작은 값을

제공하고 있는데, 이는 비선형항의 차분식에 사용된 1차 정확도의 풍상차분법에 의한 인위적인 점성(artificial viscosity)에 기인한 것이다. 그러나, 본 연구에 사용된 비선형항의 2차 풍상차분법에 의한 계산결과는 정확해에 매우 근접한 자유수면변위를 나타내고 있는 것을 알 수 있다. 이것은 1차에서 2차로 풍상차분법의 정확도를 향상시킴으로써 계산과정에서 발생하는 인위적 점성에 의한 수치오차를 현저히 감소시켰기 때문이다 (Warming and Beam, 1976).

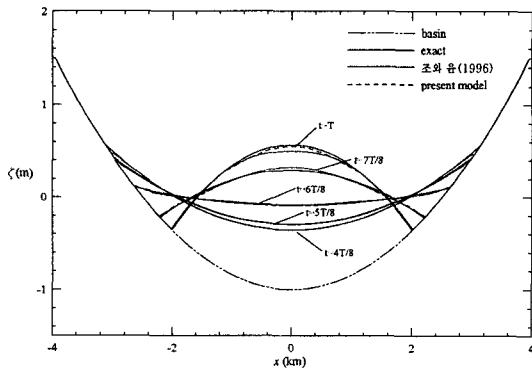


그림 2. 시간대별 자유수면변위 비교

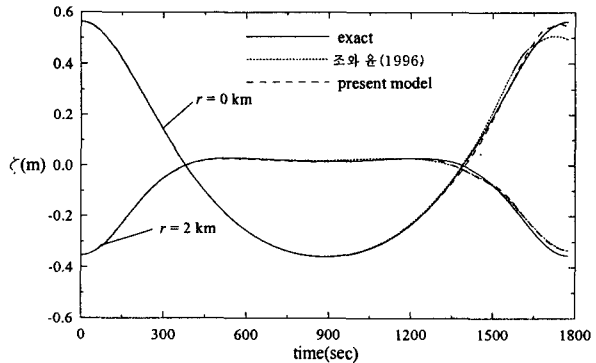


그림 3. 두 지점에서 자유수면변위 변화

그림 3은 r=0 km와 r=2 km의 두 지점에서 시간변화에 따른 자유수면변위를 정확해와 기존의 결과에 비교한 것으로, 반주기 이후의 시간에서 정확해와 수치해가 차이를 보이고 있다. 그러나, 본 연구에서 사용된 2차 풍상차분법에 의한 모형은 수치오차가 감소되어 기존의 결과보다 정확해에 좀더 가까운 수면변위를 보이

고 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 비선형 천수방정식의 비선형항에 2차 정확도의 풍상차분기법을 적용하여 실제지형을 계단 지형으로 단순화한 이동경계에서의 유체의 거동을 수치모의하였다. 개발된 수치모형을 이용하여 포물형 수조의 유체의 주기적인 거동을 수치적으로 모의하였으며, 비선형 천수방정식에 의한 정확해와 조용식과 윤태훈 (1996)의 결과에 비교하였다. 본 수치모형에 의한 수치해는 1차 풍상차분법에 의한 인위적 점성을 크게 감소시켜 기존의 수치해보다 정확해에 잘 일치하였다.

5. 감사의 글

본 연구는 기상청 기상연구소의 특정사업 지진예지 및 지진해일 예측기술 개발의 지원으로 수행되었습니다.

6. 참고문헌

- 조용식, 윤태훈 (1996). “경사지형에서의 이동경계조건.” 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제16권, 제II-1호, pp. 73-81.
- Li, Y. (1997). “Wavenumber-extended high-order upwind-biased finite-difference schemes for convective scalar transport.” *Journal of Computational Physics*, Vol. 133, pp. 235-255.
- Liu, P.L.-F., Cho, Y.-S., Briggs, M.J., Kanoglu, U. and Synolakis, C.E. (1995). “Run-up of solitary wave on a circular island.” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 302, pp. 259-285.
- Shyy, W. (1985). “A study of finite difference approximations to steady-state, convection-dominated flow problems.” *Journal of Computational Physics*, Vol. 57, pp. 415-438.
- Thacker, W.C. (1981). “Some exact solutions to the nonlinear shallow water wave equations.” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 107, pp. 499-508.
- Warming, R.F., and Beam, R.M. (1976). “Upwind second-order difference schemes and applications in aerodynamic flows.” *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 9, pp. 1241-1249.
- Yoon, S.B., and Cho, J.H. (2001). “Numerical simulation of coastal inundation over discontinuous topography.” *Water Engineering Research*, KWRA, Vol. 2, No. 2, pp. 75-87.