

수심이 변하는 지형을 통과하는 파군에 의한 장파의 생성

Long Waves Generated by Short Wave Groups over a Varying Topography

조 대 희* 조 용 식**

1. 서 론

심해에서 생성된 파랑은 해안가로 전파해오는 동안 해저지형의 변화, 해안 구조물과의 상호 간섭 및 파랑 상호 간의 비선형 작용 등에 의해 많은 물리적 변화를 경험한다. 단파의 파군(wave groups)이 수심이 일정하지 않은 해저지형을 통과할 때 장파가 생성된다. 파군에 의해 생성되는 장파는 지배방정식이 Stokes 파동이론(Stokes' wave theory)의 2차항으로 주어지기 때문에 2차 장파(second-order long wave)라고 말한다, 즉, 2차 장파는 크기의 차수가 파랑 기울기의 2차항, $O((ka)^2)$ 이다.

조용식 등(1996)에서 유도된 2차 장파의 지배방정식을 해석하면 자유장파(free long wave)와 구속장파(locked long wave)로 나뉜다(조용식, 2001). 본 연구에서는 유도된 구속장파와 자유장파의 자유수면 변위와 속도포텐셜을 이용하여 계단형 지형에서의 수심 변화에 따른 자유장파의 진폭의 변화를 계산할 것이다.

2. 지배 방정식

조용식 등(1996)이 유도한 장파의 지배방정식을 간략히 요약하면 다음과 같다. 먼저, 유체는 비점성 유체, 흐름은 비압축성 및 비회전으로 가정되므로 유체의 거동은 Laplace 방정식에 의해 지배된다.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad -h(x, y) < z < \zeta(x, y, t) \quad (1)$$

유체가 해저경계를 통과할 수 없으므로 다음과 같은 바닥 경계조건이 적용된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h(x, y) \quad (2)$$

자유수면에는 운동학적 및 동력학적 경계조건이 적용되며, 두 경계조건을 합성하여 하나의 경계조건으로 유도할 수 있으며 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} |\vec{u}|^2 + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \nabla |\vec{u}|^2 = 0, \quad z = \zeta(x, y, t) \quad (3)$$

자유수면의 변위 ζ 의 크기를 $O(\beta)$ 로 가정하고 자유수면의 경계조건을 Taloy 급수로 전개하여 $O(\beta^2)$ 까지 선택하면 식 (4)와 같다. 여기서, $\beta = ka$ 가 사용되었으며 파의 기울기를 나타내고 섭동법에 적용하기 위해

* 한양대학교 대학원 토목공학과 석사과정, Graduate Student, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea. (e-mail) kuri@hanmir.com

** 한양대학교 공과대학 토목공학과 부교수, Associate Professor, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University, (e-mail) ysc59@hanyang.ac.kr

$\beta = O(ka) \ll 1$ 로 가정한다.

$$\left(1 + \zeta \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \left(1 + \zeta \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} |u|^2 + \frac{1}{2} u \cdot \nabla |u|^2\right) = 0 \quad (4)$$

파군의 길이와 시간의 크기는 단파에 비해 매우 크므로 파군과 장파는 완변변수를 이용하여 기술하며, 파형이 시간에 주기적이며 β 의 크기가 매우 작으면 Φ 와 ζ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \sum_{m=-n}^n \phi^{(n,m)}(x, y, z, x_1, y_1, t_1) e^{-im\omega t} \quad (5)$$

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \sum_{m=-n}^n \zeta^{(n,m)}(x, y, x_1, y_1, t_1) e^{-im\omega t} \quad (6)$$

식 (5)와 (6)에서 n 과 m 은 각각 크기의 차수(order)와 조화성분의 수(harmonics)를 나타낸다. 파군과 장파의 길이와 시간의 크기는 단파의 그것에 비해 매우 크므로 파군과 장파를 위한 완변변수, $(x_1, y_1, t_1) = (\beta x, \beta y, \beta t)$ 를 도입한다. 이러한 섭동법에 대한 자세한 설명은 Bnder와 Orszag(1987)를 참조할 수 있다. 식 (5)와 (6)을 이용하여 복잡한 수학적 과정을 통해 다음과 같은 2차 장파의 지배 방정식을 유도할 수 있으며, 상세한 유도과정은 조용식 등(1996)과 조용식(2001)을 참조할 수 있다.

(7)

지배방정식을 무차원변수를 이용하여 단순화시키면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial t_1^2} - h_j \left(\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y_1^2} \right) \quad (8)$$

$$= \frac{i}{4} k_j |A_j|^2 \sum_j \left(\frac{1}{2 \sinh 2k_j h_j} + \frac{1}{Cg_j} \right) \exp[2i(K_{jx}x_1 + K_{jy}y_1 - \Omega_o t_1)] + * \quad (9)$$

$$\sum_j = \Omega_o - K_{1y} V_j$$

장파의 속도 퍼텐셜은 다음과 같다.

$$\Psi_i^r = \frac{1}{2} \psi_i^r(x_1) \exp(2i(K_{1y}y_1 - \Omega_o t_1)) + * \quad (10)$$

식 (10)을 식 (8)에 대입하여 해석하면 두 개의 해를 구할 수 있다. 첫 번째 해는 제차방정식(homogeneous equation)의 해이며 자유장파라 하고 두 번째 해는 비제차방정식(nonhomogeneous equation)의 해이며 구속장파라 한다.

반사파와 통과파에 의한 구속장파의 포텐셜은 다음과 같다. 여기서, 첨자 j 는 지역을 나타내며 R^\pm, T^\pm 는 각 진동수가 서로 다른 단파의 반사율과 통과율이다.

$$(\psi_R)_L = -\frac{ik_1 R^+ R^{-*}}{8(\Omega_o^2 - K_1^2 h_1)} \left(\frac{1}{\sinh 2k_1 h_1} + \frac{1}{Cg_1} \right) \exp[-2iK_{1x}X] \quad (11)$$

$$(\psi_T)_L = -\frac{ik_3 T^+ T^{-*}}{8(\Omega_o^2 - K_3^2 h_3)} \left(\frac{1}{\sinh 2k_3 h_3} + \frac{1}{Cg_3} \right) \exp[2iK_{3x}X] \quad (12)$$

자유장파의 반사파와 통과파에 의한 포텐셜은 다음과 같다.

$$(\psi_R)_F = E_1 \exp(-2i\lambda_1 X) \quad , \quad (\psi_T)_F = E_4 \exp(2i\lambda_3 X) \quad (13)$$

$$\lambda_j = \left(\frac{\Omega_o}{h_j} - K_j^2 Y \right) \quad (14)$$

여기서, E_1, E_2, E_3, E_4 는 그림 1과 같이 각 지역에서의 자유장파의 진폭을 나타낸다.

구속장파와 자유장파의 자유수면변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\xi_R)_L = \frac{R_1^+ R_1^-}{4 \left(\sum_1^2 - K_1^2 h_1 \right)} \left(\frac{K_1^2 h_1 \sigma_1^2}{2 \sinh^2 k_1 h_1} + \frac{\sum_1^2 k_1}{\sigma_1 C g_1} \right) \exp(-2iK_1 Y) \quad (15)$$

$$(\xi_T)_L = \frac{T_3^+ T_3^-}{4 \left(\sum_3^3 - K_3^2 h_3 \right)} \left(\frac{K_3^2 h_3 \sigma_3^2}{2 \sinh^2 k_3 h_3} + \frac{\sum_3^2 k_3}{\sigma_3 C g_3} \right) \exp(2iK_3 Y) \quad (16)$$

$$(\xi_R)_F = 2i \sum_1 (\psi_R)_F, \quad (\xi_T)_F = 2i \sum_3 (\psi_T)_F \quad (17)$$

미지수인 자유장파의 진폭 함수를 구하기 위해 두 개의 결합조건(matching conditions)을 사용한다. 첫 번째는 2차 장파의 자유수면변위가 연속이 되어야 한다는 것이고 두 번째는 2차 플럭스(flux)가 연속이 되어야 한다는 것이다.

3. 수치해석 결과

자유장파의 진폭의 변화를 관찰하기 위해 연속인 계단형 지형에서 두 개의 결합조건을 이용하여 계산하였으며 결과는 다음과 같다.

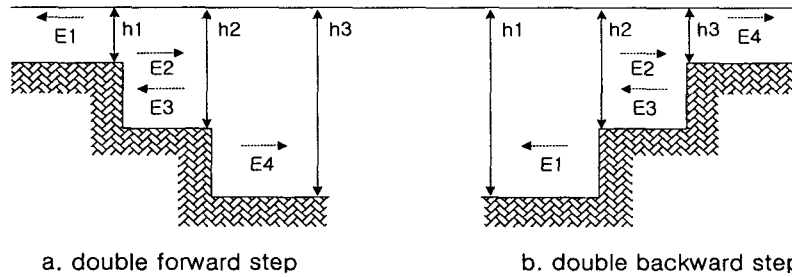
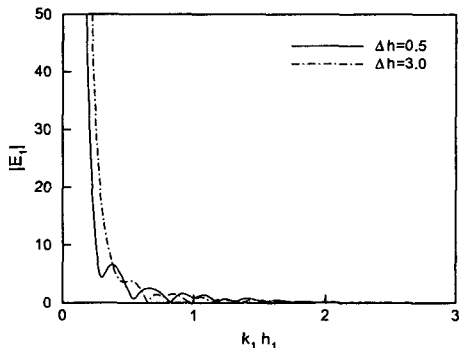
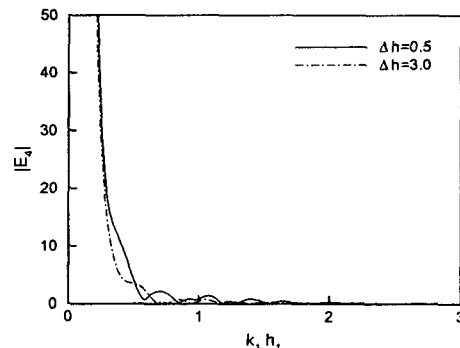


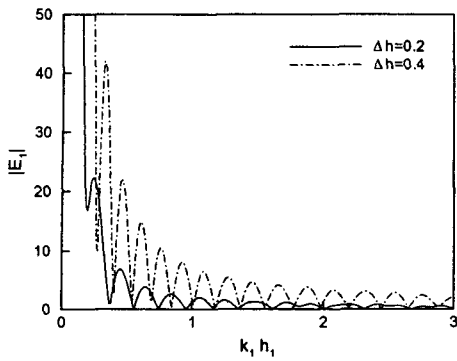
그림 1. 계단형 지형



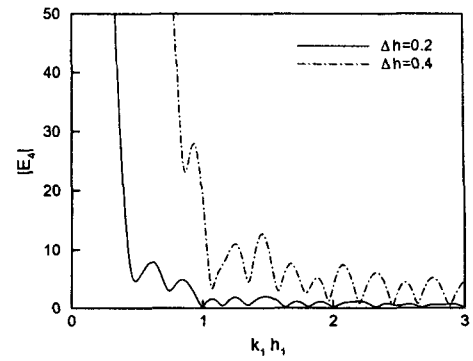
(a)



(b)



(c)



(d)

그림 2. 반사파와 통과파에 대한 장파의 진폭의 변화

그림 1에서 double forward step은 수심이 Δh 만큼 증가하는 지역이고 double backward step은 수심이 Δh 만큼 감소하는 지역이다. 그림 2의 (a)와 (c)에서는 double forward step에서 반사되는 자유장파의 진폭인 $|E_1|$ 을 나타내었으며 (b)와 (d)에서는 통과하는 자유장파의 진폭인 $|E_4|$ 를 나타내었다. 그림 2에서 볼 수 있듯이 진폭이 천해에서는 매우 크게 증가하나 심해로 갈수록 진폭의 크기가 감소하는 것을 알 수 있다. 또한 수심의 차이 (Δh)가 증가할수록 진폭의 크기도 커지는 것을 볼 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 단파의 파군이 수심이 일정하지 않은 해저지형을 통과할 때 생성되는 장파의 변화에 대해 수심이 연속적으로 변하는 계단형 지형에 적용하여 알아보았다. 수심의 변화가 커질수록 자유장파의 진폭의 크기는 커지는 것을 볼 수 있었고, 천해에 비해 심해에서의 자유장파의 크기는 매우 작게 감소하였다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부 국가지정연구실사업(한양대학교 해안공학연구실)으로 수행되었기에 이에 사의를 표합니다.

참고문헌

조용식, 채장원, 차영기, 1996. "파군에 의한 장파의 생성 : 지배방정식 유도." 대한토목학회논문집, 제16권, 2-4호, pp. 389-397.
 조용식, 2001. "계단지형을 지나는 파군에 의한 장파의 생성 : 지배방정식." 한국수자원학회논문집, 제34권, 6호, pp. 651-657.
 Bender, C.M. and Orszag, S.A. (1987). *Advanced mathematical method for scientists and engineer*. 3rd edition, McGraw Hil Inc., USA