

수심의 변화에 대한 확장형 Boussinesq 방정식의 거동

○이창훈¹⁾, 조은경²⁾, 조용준³⁾

1. 머리말

사람들은 주로 육지에서 많은 자원을 향유하면서 생활하고 있다. 반면 바다는 대륙간 물자 및 사람의 통로이고, 어패류 등의 자원과 여가의 공간으로 인식되는 편이다. 우리나라는 삼면이 바다로 둘러싸여 있어 해안선이 길어 해안의 개발 가능성을 많은 편이다. 해안 시설이 폭풍우 시 밀어 닥치는 큰 파도에도 견딜 수 있을 만큼 안전해야 할 것이다. 해안 항만 기술자들은 1980년대 이후부터 파랑변형 수치모형을 사용하여 이 큰 파도가 얼마나 큰지 정확히 알 수 있게 되었다.

파랑변형 비선형 불규칙파의 거동을 해석할 수 있는 Boussinesq 방정식은 Boussinesq(1872)가 처음 개발한 이후로 약 100년 동안 실제 해안 항만사업에 쓰이지 않았다. 왜냐하면 수심이 파장에 비해 상대적으로 작은 경우에만 이 모형이 적용될 수 있어서 심해로부터 전파해오는 파랑의 거동을 제대로 예측하지 못하였기 때문이다. 즉, 분산성의 한계가 있기 때문이다. 이를 극복하려 노력으로 개발된 소위 확장형 Boussinesq 방정식에는 Madsen과 Sorensen(1992), Nwogu(1993), Chen과 Liu(1995)의 세 가지 유형의 식이 있다. 그런데 현재까지 유도된 식에서 사용되는 조율계수 또는 값이 전 수심에서 고정되어 있어서 심해에서는 여전히 분산성의 한계를 극복하지 못하는 문제점이 있다. 최근 Lee 등(2003)은 위 세 가지 유형의 Boussinesq 방정식에서 유도되는 위상속도 또는 천수계수가 선형의 Stokes파 이론치에 일치하도록 조율계수 값을 선택하는 방법을 제시하였다. 그 결과 Boussinesq 방정식에서 유도되는 위상속도 또는 천수계수의 각 값을 정확히 맞출 수 있었다. 그러나 어느 식에서도 두 값을 동시에 정확히 맞출 수 있는 조율계수 값이 없다는 사실을 발견하였다.

파랑변형식 가운데 실제 해안 항만 기술자들이 가장 많이 사용하고 있는 수치모형은 완경사방정식이다. 이 방정식은 Berkhoff(1972)가 Galerkin 방법을 사용하여 개발되었다. 이 식을 유도하는 과정에서 수심의 변화가 완만하다고 가정하여 고차의 수심변화 항인 바닥의 곡률의 항($\nabla^2 h$)과 바닥경사의 제곱의 항($(\nabla h)^2$)을 무시하였다고 하여 완경사방정식(mild-slope equation)이라고 부른다. 완경사방정식은 심해에서부터 천해까지 전 영역에서 파랑의 선형의 분산성을 정확히 예측할 수 있고, 다른 비선형 식에 비하여 수치적으로 적용하기 쉽다. 따라서, 해안 항만 기술자들은 Berkhoff의 타원형 식 외에도 쌍곡선형과 포물선형으로 개발된 식들을 많이 사용하고 있다. 그러나, 완경사방정식은 선형의 식이기 때문에 얕은 수심에서 파고가 파장이나 수심에 비하여 상당히 큰 경우 파랑의 변형을 예측하는데 그 정확도가 떨어지는 한계가 있다. 1990년대 이후 완경사방정식을 유도할 때 고차의 수심변화 항, 즉, 수심경사의 제곱의 항과 수심의 곡률의 항을 그대로 보존하여 유도되는 소위 확장형 완경사 방정식은 수심의 변화가 심한 해역에서도 파랑의 변형을 잘 예측할 수 있음이 확인되었다. 확장형 완경사 방정식 가운데 쌍곡선형 식은 Suh 등(1997), Lee 등(1998), Lee 등(2003)이 개발하였다.

1) 세종대학교 토목환경공학과 조교수
2) 서울시립대학교 토목공학과 석사과정
3) 서울시립대학교 토목공학과 부교수

1990년대 이후 환경사방정식에서 한창 거론되었던 수심변화에 따른 파랑식의 거동을 Boussinesq 방정식에는 어떠한 지에 대한 논의는 지금까지 없었던 것으로 사료된다. 본 연구에서는 Boussinesq 방정식의 유도 과정에서 수심변화를 어떻게 고려하는지 살펴보고 이 변화에 따른 모형식의 거동을 예측하고 수심변화에 따른 모형의 거동을 수치실험을 통하여 재현하였다. 그리고, 실험 결과에 대한 토론과 모형식의 개선 가능성을 제안하였다.

2. 확장형 Boussinesq 방정식의 유도과정

확장형 Boussinesq 방정식은 크게 두 가지 물리적인 의미를 갖는 함수로 표현되어 있다. 첫 번째 식은 연속방정식으로서 이 식은 3차원의 Laplace 방정식을 바닥에서부터 해수면까지 적분하여 유도된다. 두 번째 식은 운동방정식으로서 해수면에서의 동역학적 경계 조건인 Bernoulli 방정식을 수평방향으로 공간미분을 취하여 유도된다. 이러한 식을 유도할 때 속도포텐셜의 수직방향의 함수를 바닥을 기준으로 한 멱급수로 표현하였다. 그리고, 멱급수의 1차 항은 바닥의 운동학적 경계조건을 사용하여 0차 항으로 표현하고, 2차 이상의 항은 연속방정식을 사용하여 하위 차수의 항으로 표현하였다. 바닥변화의 좀 더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

Boussinesq 방정식을 유도할 때 비선형을 결정하는 매개 변수인 $\delta = a/h$ (a 는 수면변위의 진폭이고 h 는 수심임)와 상대수심을 결정하는 매개 변수인 $\mu = kh$ (k 는 파수임)를 사용하여 모든 변수를 무차원 값으로 표현한다. 수심의 변화는 다음 식에서와 같이 바닥에서의 무차원화 된 운동학적 경계조건에서 고려된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \mu^2 \nabla h \cdot \nabla \phi = 0; \quad z = -h$$

위 식에서 수심의 공간적인 변화율 $\nabla h = O(\mu)$ 로 두고, 지배방정식의 유도 과정에 바닥경사의 제곱 항을 $(\nabla h)^2 = O(\mu^2)$ 로 하여 무시한다. 즉, 확장형 Boussinesq 방정식에는 고차의 수심 변화 항을 무시하였고 수심의 곡률 항을 부분적으로 고려하였다.

3. Nwogu의 확장형 Boussinesq 방정식 수치실험

본 장에서 Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식을 사용하여 파랑 변형을 모의할 때 바닥의 변화에 대한 파랑의 거동, 특히 반사를 얼마나 정확히 모의할 수 있는지 실험하였다. 첫째, Booij(1983)의 경사면 위로 파랑이 전파할 때 경사면의 폭에 따른 반사율을 측정하여 유한요소법에 의한 수치 해와 비교하였다. 둘째, Davies와 Heathershaw(1983)의 사면 위로 파랑이 전파할 때 수면파의 파장이 사면의 파장의 두배가 될 때 파랑의 반사가 증폭되는 Bragg 반사 실험을 수행하였다.

첫 번째로 Booij의 경사면 실험을 수행하였다. 즉, 수심이 0.6m와 0.2인 두 수평면 사이에 경사면을 두고 주기 2초의 선형파가 0.6m 수심에서 출발하여 경사면 위로 전파하면서 반사되는 정도를 예측하였다. 이때 경사면의 폭 b 를 달리하면서 반사율을 측정하여 유한요소법에 의한 수치 해와 비교하였다. 그림 1에 경사면의 폭에 따른 반사율을 도시하였다. 참고로 ①Copeland(1985)의 환경사방정식과; ②곡률 항과 경사의 제곱 항을 모두 포함한 확장형 환경사방정식(Lee 등, 1998)의 수치 해와 함께 비교하였다. Boussinesq 방정식에 의한 반사율은 경사면의 폭이 어떠한 값을 갖더라도 모두 유한요소법에 의한 수치 해보다 크게 나왔다. 이는 Boussinesq 방정식이 바닥 곡률의 효과를 부분적으로 반영하여 오차가 발생한 것으로 판단된다. 그리고 유한요소법의 수치 해와의 오차는 경사면의 폭이 좁을수록, 즉 경사가 급할수록 더 크게 나타났다. 경사가 급할수록 경사 제곱의 효과는 점점 더 커지는데 Boussinesq 방정식에는 이를 반영하지 못해서 오차가 커지는

것으로 판단된다.

바닥의 변화에 대한 Boussinesq 방정식의 거동을 확인하기 위해 두 번째로 Davies 와 Heathershaw의 Bragg 반사 실험을 수행하였다. 즉, 파랑의 주기를 달리하면서 수심이 주기적으로 변하는 사런(ripple) 위로 파랑이 전파하면서 반사되는 반사율을 측정하여 수리모형실험 결과와 비교하였다. 그림 2에 $2k/K$ 값(k 는 파랑의 파수이고 K 는 사런의 파수임)의 변화에 따른 반사율의 변화를 도시하였다. 참고로 ①Copeland의 완경사방정식과; ②Lee 등의 모형의 수치 해와 함께 비교하였다. 첫 번째 수치실험과 마찬가지로 반사율이 수리모형실험 결과에 비해서 조금 크게 나왔다. $2k/K=1$ 인 경우 반사율이 증폭되는 Bragg 반사현상이 Boussinesq 방정식의 수치 해에도 잘 나타났다. 이는 Boussinesq 방정식이 바닥의 곡률 항을 부분적으로 포함했기 때문인 것으로 판단된다.

4. 맺음말

본 연구에서는 Boussinesq 방정식의 유도과정에서 수심변화를 어떻게 고려하는지 살펴보고 이 변화에 따른 모형식의 거동을 예측하고 수심변화에 따른 모형의 거동을 수치실험을 통하여 재현하였다. 그리고, 실험 결과에 대한 토론과 모형식의 개선 가능성을 제안하였다.

Boussinesq 방정식의 유도 과정에서 바닥의 변화를 바닥경계조건에서 고려한다. 이 조건에서 바닥의 변화 정도가 한 파장에 수심만큼의 변화가 있다고 가정하였다. 그러면서 수심의 변화가 완만하다고 하였다. 이후 고차의 수심변화 항 가운데 바닥의 곡률 항($\nabla^2 h$)을 일부 고려하였고, 바닥 경사의 제곱 항($(\nabla h)^2$)과 이보다도 큰 고차의 수심 변화 항을 무시하였다. 이는 마치 완경사방정식을 유도할 때 고차의 수심변화 항을 무시한 것과 유사하다. 그 결과 두 가지의 수치실험에서 수치결과가 완경사방정식에 바닥의 곡률항은 포함한 모형의 결과와 유사하게 나왔다.

장차 Boussinesq 방정식을 유도할 때 한 파장 내에 수심의 변화가 수심만큼 변하는 것보다 더 급변하는 경우에 적용되게 하면 확장형 완경사 방정식과 마찬가지로 급변 수심에서 적용되는 Boussinesq 방정식이 유도될 것이다.

참고문헌

- Booij, N. (1983). "A note on the accuracy of the mild-slope equation." *Coastal Eng.*, Vol. 7, pp. 191-203.
- Boussinesq, J. (1872). "Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond." *J. Math. Pures et Appl. 2nd Series*, Vol. 17, pp. 55-108.
- Chen, Y. and Liu, P.L.-F. (1995). "Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation." *J. Fluid Mech.*, Vol. 288, pp. 351-381.
- Copeland, G.J.M. (1985). "A practical alternative to the mild-slope wave equation." *Coastal Eng.*, Vol. 9, pp. 125-149.
- Davies, A.G. and Heathershaw, A.D. (1984). "Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography." *J. Fluid Mech.*, Vol. 144, pp. 419-443.
- Lee, C., Cho, Y.-S. and Yoon, S.B. (2003). "A note on linear dispersion and shoaling properties in extended Boussinesq equations." *Ocean Engineering* (accepted).

- Lee, C., Kim, K. and Suh, K.D. (2003). "Extended mild-slope equation for random waves." *Coastal Engineering* (accepted).
- Lee, C., Park, W.S., Cho, Y.-S. and Suh, K.D. (1998). "Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography." *Coastal Eng.*, Vol. 34, pp. 243-257.
- Madsen, P.A. and Sorensen, O.R. (1992). "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly varying bathymetry." *Coastal Eng.*, Vol. 18, pp. 183-204.
- Nwogu, O. (1993). "Alternative form of Boussinesq equation for nearshore wave propagation." *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, Vol. 119, pp. 618-638.
- Suh, K.D., Lee, C. and Park, W.S. (1997). "Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography." *Coastal Eng.*, Vol. 32, pp. 92-118.

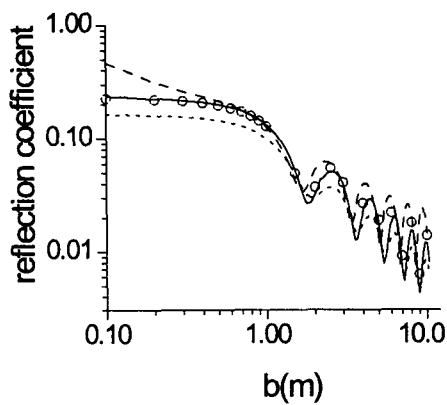


그림 1 경사면의 폭에 따른 반사율; - - = Boussinesq 식, ... = Copeland 식, - = Lee 등의 식, ○ = 유한요소법

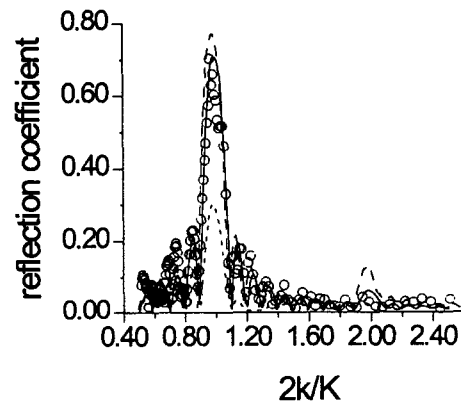


그림 2 $2k/K$ 에 따른 반사율; - - = Boussinesq 식, ... = Copeland 식, - = Lee 등의 식, ○ = 수리모형실험