

# SU/PG 기법에 의한 2차원 하천흐름 해석

○한건연\* · 박경욱\*\* · 백창현\*\*\*

## 1. 서론

현재 지표수 모델링 분야에서 선진국과 20여 년 이상의 기술차이를 보이고 있는 상황에서 한정된 지표수 자원 이용에 어려움을 겪고 있으며, 국내 하천에서의 흐름, 유사, 오염물 해석에 관한 연구는 주로 1차원적 정상 부동류 개념만으로 해석하고 있어 시간 및 공간적 변동성을 가지는 자연하천의 특성을 정확하게 반영하지 못하고 있다. 따라서 하천취수를 위한 수자원 계획시 수질과 수량의 연계성이 확보되지 못한 상황에서 수자원의 관리를 시행하고 있는 문제점이 있다. 향후 수자원의 지속적 확보를 위해서는 강우-유출, 댐 운영관리 등이 종합적으로 필요하나, 이중 가장 현실적이고 실제적인 것이 지표수자원관리이다. 따라서 지표수 자원의 효율적인 관리를 위해서는 하천의 흐름특성, 하상 변동 양상, 오염물의 거동 등에 관한 물리적인 현상이 정확하게 규명될 수 있어야 한다.

기존의 수치해석 기법 중에서 유한요소기법은 댐 파괴시의 홍수단파, 수공구조물 주변에서의 도수현상과 같은 불연속적인 흐름을 정확하게 해석할 수 있다. 또한 댐, 웨어, 수문 등의 다양한 수공구조물의 영향을 효과적으로 도입할 수 있을 뿐만 아니라 하도망 해석, 토사이동해석, 다차원 흐름해석 등으로 확장 발전시킬 수 있는 우수한 기법으로 판단된다.

본 연구는 CFD(Computational Fluid Dynamics)분야에서 현재 연구되고 있는 SU/PG 알고리즘에 기초로 하여 하천의 흐름 특성을 보다 정확하게 모의하고자 하는데 목적이 있다. SU/PG 기법을 통하여 기존의 유한요소 모형이 가지고 있던 제한사항을 극복할 수 있을 것으로 판단된다.

## 2. SU/PG 기법에 의한 하천흐름 해석

2차원 천수 자유수면 흐름을 나타내는 방정식은 질량 및 운동량 보존 원리를 적용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} + i = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} + g \frac{\partial(h^2/2)}{\partial x} = gh(S_{ax} - S_{fx}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(v^2h)}{\partial y} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + g \frac{\partial(h^2/2)}{\partial y} = gh(S_{ay} - S_{fy}) \tag{3}$$

여기서,  $h$ 는 흐름수심,  $u, v$ 는  $x, y$  방향으로의 유속,  $S_{ax}, S_{ay}$ 는  $x, y$  방향으로의 바닥경사 성분,  $S_{fx}, S_{fy}$ 는  $x, y$  방향으로의 수리학적 저항,  $i$ 는 침투능,  $g$ 는 중력 가속도 성분을 나타낸다.

Manning 공식을 적용해 마찰경사 성분을 정리하고,  $p = uh$ 이고,  $q = vh$ 라고 쓰면 아래와 같이 행렬 형태로 표기할 수 있다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + D = 0 \tag{4}$$

여기서,

\* 경북대학교 공과대학 토목공학과 교수  
 \*\* 경북대학교 공과대학 박사과정  
 \*\*\* 경북대학교 공과대학 박사수료

$$U = \begin{pmatrix} h \\ p \\ q \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \\ \frac{pq}{h} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} \frac{q}{h} \\ \frac{pq}{h} \\ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} gh \frac{\partial z_0}{\partial x} + gn^2 \frac{p \sqrt{p^2 + q^2}}{h^{7/3}} \\ gh \frac{\partial z_0}{\partial y} + gn^2 \frac{q \sqrt{p^2 + q^2}}{h^{7/3}} \end{pmatrix}$$

식 (4)를 비보존 형태로 쓰면 아래와 같이 정리된다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial y} + D = 0 \quad (5)$$

유체 흐름에서 대류항과 관련된 행렬을 정리하면 아래와 같다.

$$A = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + c^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, B = \frac{\partial G}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + c^2 & 0 & 2v \end{bmatrix} \quad (6)$$

Galerkin 기법이 대부분의 구조 문제나 열 전도 문제에 적용될 때 강성 행렬의 대칭성으로 인하여 최적근사 특성을 나타내었지만, 대류가 지배적인 유체 흐름의 경우 강성 행렬의 대칭성은 잃게 되어 해의 양상이 변경되었다. 이에 대한 해결책으로 대류가 지배적인 영역의 경우 격자의 세분화를 통해 대류가 더 이상 요소 상에 지배되지 않도록 하는 것이 제안되었다. 다른 방법으로 대류 항에 상향가중 차분을 이용하여 진동이 없는 해를 구할 수 있다. 이는 세 절점 중 상류 방향의 절점에 대류 도함수로 가중을 줌으로써 중앙차분 형태의 Galerkin 유한 요소 해석에서 발생하는 진동을 감소시키는 것이다. 이는 1차원 문제에 무리 없이 적용되어 사용되었지만, 다차원으로 확장되었을 때 원하지 않는 방향으로의 감쇠를 일으켜 상향 가중 효과는 흐름 방향으로만 필요하다는 것이 자명하였다. 그래서 SU/PG 기법에서는 다음과 같은 가중함수를 이용한다.

$$B_i' = B_i + \alpha \Delta x W_x \frac{\partial B_i}{\partial x} + \alpha \Delta y W_y \frac{\partial B_i}{\partial y} \quad (7)$$

여기서,  $B_i$ 는 형상함수이고,  $\alpha$ 는 상향 가중 인자,  $\Delta x, \Delta y$ 는 요소의 형상을 나타내기 위한 계수를 나타낸다. 본 논문에서는  $\Delta x = \sqrt{(\partial x / \partial \xi)^2 + (\partial x / \partial \eta)^2}$ 과  $\Delta y = \sqrt{(\partial y / \partial \xi)^2 + (\partial y / \partial \eta)^2}$ 의 값을 사용하였다.(Katopodes, 1982) 여기서,  $\xi, \eta$ 는 국지 좌표계의 좌표축에 해당하며,  $x, y$ 는 전체 좌표계의 좌표축을 나타낸다. 그리고  $W$ 는 유선 방향에 대한 대류항의 도함수에 해당하는 행렬로써 다음과 같이 정의한다.

$$[W_x] = [M] \begin{bmatrix} \lambda_i \\ |\lambda_i| \end{bmatrix} [M]^{-1}, [W_y] = [M] \begin{bmatrix} \lambda_i \\ |\lambda_i| \end{bmatrix} [M]^{-1} \quad (8)$$

여기서,  $[M], [M]^{-1}, \lambda_i$ 는 각 대류 행렬에 대한 좌고유벡터, 우고유벡터, 고유치를 나타낸다. 지배 방정식을 나타내는 식 (5)를 국지 좌표계로 좌표 변환하고 유한요소 수식화하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} B_i^T \left( \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} + A \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} + D \right) d\Omega = 0 \quad (9)$$

여기서,  $T$ 는 전치 행렬,  $\tau$ 는 국지 좌표계에 대한 시간항,  $\hat{U}$ 는 격자점에서의 근사해를 나타낸다. 식 (9)에서 필요한 시간항에 대해서 유한 차분화하고 SU/PG 유한요소 수식화 과정을 거치면 식 (10)과 같다.

$$\begin{bmatrix} B_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} + \alpha \Delta x [W_x] \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} B_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} + \alpha \Delta y [W_y] \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} B_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \{0\} \quad (10)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \alpha \hat{h}^{n+1} - \beta + \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \\
 E_2 &= \alpha \hat{p}^{n+1} - \beta + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{pq}{h} \right) + gh \frac{\partial z_0}{\partial x} + gn^2 \frac{p \sqrt{p^2 + a^2}}{h^{7/3}} \\
 E_3 &= \alpha \hat{q}^{n+1} - \beta + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{pq}{h} \right) + gh \frac{\partial z_0}{\partial y} + gn^2 \frac{q \sqrt{p^2 + a^2}}{h^{7/3}} \\
 \alpha &= \frac{1}{\theta \Delta \tau}, \quad \beta = \alpha \hat{U}^n + \left( \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau} \right)^n
 \end{aligned} \tag{11}$$

위에서 유도했던 비선형 방정식은 Newton-Raphson 기법으로 해를 구할 수 있다. 구성된 계수 행렬은 전 해석 영역에 대해서 전체 매트릭스를 구성하게 되며, 적절한 경계 조건에 대해 허용오차 범위 내에 들 때까지 계산이 수행되고 완료된다.

### 3. 모형의 적용

2차원 SU/PG 모형은 상하류부 수심비가 각각 0.5, 0.1 및 0.02인 경우에 대해서 적용하고 그 결과를 BG, PG 기법들과 비교함으로써 본 연구기법의 2차원 문제에 대한 적용성을 입증하였다.

#### 3.1 댐붕괴파 해석(큰 수심비의 경우)

요소 크기는 50m×50m이고 205개의 절점, 160개의 요소가 사용되었다. 한계값에 대해서는 0.0001의 값을 사용하였고, 수렴 한계 횟수는 100회로 주었다. 초기 조건으로 x방향으로 950m 까지 10m의 값을 주었고 1000m부터 2000m까지는 5m의 값을 주었다. 경계 조건으로 상하류단의 초기 수심값을 부여하였다. 최적의 해를 구하기 위해서 음해 유한 요소 기법은 Cr=0.47인 전파 속도 9.35m/s를 기준으로 한 1.25초의 시간 증분에 대해서 계산하였다. 모든 음해 유한 요소 기법은  $\theta=0.5$ 와  $\theta=1.0$ 의 두 값을 사용하여 적용시켰다. 그림 1 (a), (b)는 가중합수와 형상합수가 동일한 BG 기법에 대해서 음해 정도를 달리하면서 적용시킨 결과를 나타낸다. 수심의 변동폭이 크고, 음해 정도가 커짐에 따라 해의 진동 정도가 다소 감소함을 확인할 수 있었다.

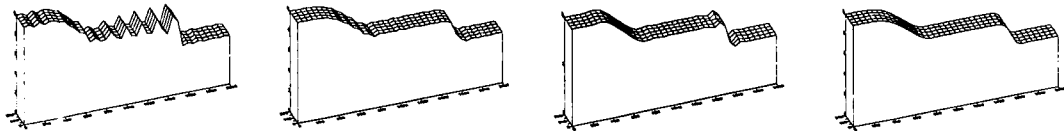


그림 1. 적용결과 (a)  $\theta=0.5$ , BG (b)  $\theta=1.0$ , BG (c)  $\theta=0.5$ , PG (d)  $\theta=1.0$ , PG  
( $t=60s$ ,  $H_1/H_0=0.5$ ,  $\Delta t=1.25s$ )

그림 1 (c), (d)는 PG 기법에 대한 모의결과를 나타낸다. 불연속 함수의 추가로 인하여 BG 기법에 비해 진동이 감소함을 확인할 수 있으며, 음해 정도가 커질수록 정확해에 더 가까운 결과를 나타내었다.

그림 2는 SU/PG 기법에 적용시킨 결과를 나타낸다. 적당한 상향 가중 인자를 찾기 위해서  $\alpha=0.25$ 와  $\alpha=0.5$ 의 값에 대해서 적용시켜 보았다. 그리고 음해 정도의 영향을 알아보기 위해서 다른 유한요소기법에서와 마찬가지로 0.5와 1.0의 값으로 모의하였다. 그림에서도 알 수 있듯이 음해 정도보다는 상향가중 인자에 민감하게 반응하였고, PG 기법에서의 해와 거의 유사한 해를 나타내었다. 이는 상하류부 수심비가 작아서 파속의 영향이 크지 않은 것으로 보인다.

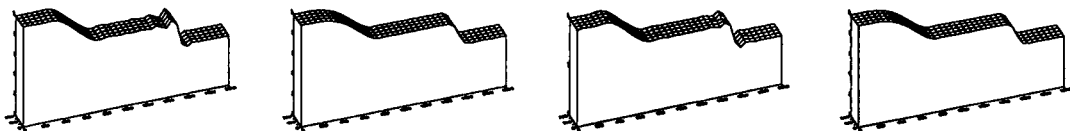


그림 2. SU/PG 기법의 적용결과 (a)  $\theta=0.5$  (b)  $\theta=1.0$  ( $\alpha=0.25$ ) (c)  $\theta=0.5$  (d)  $\theta=1.0$  ( $\alpha=0.5$ )  
( $t=60s$ ,  $H_1/H_0=0.5$ ,  $\Delta t=1.25s$ )

### 3.2 댐붕괴파 해석(작은 수심비의 경우)

이번 수치 실험에 적용시킨 요소, 한계값, 수렴 한계 횟수는 상하류부 수심비 ( $H_1/H_0=0.5$ )와 동일하게 하였다. 초기 조건으로  $x$  방향으로 950m까지 10m수심을 주었고 1000m부터 2000m까지는 1m수심을 주었다. 경계 조건으로 상하류단의 초기 수심값을 주었다.

상하류부 수심비가 작은 경우에 비해 이번 수치 실험은 각 기법의 차이점을 확연히 나타내었다. PG 기법의 경우 5초 내에 음해의 정도에 관계없이 모든 해가 발산하여 수치 모의가 거의 불가능하였다. 그림 3 (a), (b)는 SU/PG 기법에 대한 수치 결과를 나타낸 것으로 다른 기법에 비해 진동의 폭이 적음을 알 수 있다. 특히 음해 정도를 1.0으로 하고 상향 가중 인자를 0.25의 값으로 결정한 결과 정확해에 유사함을 알 수 있었다. 상하류부 수심비가 큰 경우 음해의 정도에 따라 발산의 정도에 민감하게 반응하였다. 음해 정도를 0.5로 선 정함에 따라 7.5초까지 수렴하였고 그 이후 시간에 대해서는 발산이 되어 더 이상의 모의가 불가능하였다.

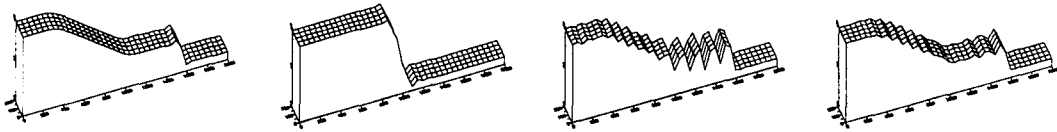


그림 3. (a)  $\theta=0.5$ , SU/PG (b)  $\theta=1.0$ , SU/PG (c)  $\theta=0.5$ , BG (d)  $\theta=1.0$ , BG  
( $H_1/H_0=0.1$ ,  $\Delta t=0.625s$ ,  $\alpha=0.25$ ,  $t=60s$ )

PG 기법과는 달리 BG 기법의 경우 발산은 거의 발생하지 않았다. 하지만 불연속을 잘 반영하지 못하는 가중함수를 사용하므로 그림 3 (c), (d)에서처럼 충격파 부근의 불연속 지점에 대해서 포착할 수가 없었다.

SU/PG 기법의 Dry/Wet 처리 정도를 파악하기 위한 것으로 수심비가 최대로 작은 수치 실험을 수행하였다. 수심비가 작을수록 발산이 심해 최대 7.5초까지 모의를 할 수 있었다. 이러한 모의에서도 알 수 있듯이 BG 기법이나 PG 기법에 비해 SU/PG 기법은 불연속을 더 잘 포착할 수 있음을 알 수 있었고, 불연속을 잘 반영함에 따라 정확해에 더 근접하고 있음을 알 수 있다. 그리고 요소 상에 계산될 때 상향 가중 인자의 큰 변동 없이 모의가 가능함을 알 수 있다.

### 4. 결 론

본 연구는 하천흐름에 관한 해석 알고리즘으로 유한요소기법을 선정하여 이에 대한 2차원 수식화와 모형 적용 등을 통하여 대류가 지배적인 흐름에서도 적용될 수 있는 알고리즘을 제공하였다.

1. 상향 가중 행렬의 일반화를 통해 다차원으로의 확장성을 검증하였고 각 인자의 변동양상을 통하여 불연속 특성을 더욱 효과적으로 추적할 수 있는 것으로 나타났다.
2. 수치 적용 예는 상하류부 수심비가 매우 작은 경우의 댐 붕괴파와 상하류부 수심비가 큰 댐붕괴파에 대해서 적용하였고 그 결과를 BG(Bubnov-Galerkin, PG(Petrov-Galerkin)) 등과 비교함으로써 SU/PG 모형이 다른 기법에 비해 우수한 것으로 나타났다.

### 감사의 글

본 연구는 21세기 프론티어연구개발사업인 수자원의 지속적 확보기술개발사업단의 연구비지원(과제번호 2-3-1)에 의해 수행되었습니다.

### 5. 참고문헌

1. 한건연, 박재홍, 이을래 (1997). "개수로내의 점변 및 급변 부정류에 대한 유한요소해석: II. 적용 예." 한국수자원학회논문집, 제30권, 제1호, pp. 35-44.
2. Hughes, T.J.R. and Brooks, A.N. (1982). "A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure." *Finite Elements in Fluids*, Vol. 4, London.
3. Brooks, A. N. and Hughes T.J.R. (1980). "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 32, pp. 199-259