

# 근사 복원 IIR/FIR QMF 필터뱅크에서 지연요소 변화에 따른 특성에 관한 연구

이 상 준, 김 남 수, 김 남 호  
 부경대학교 공과대학 제어계측공학과

## A Study on the Characteristics of Delay Parameter Change in Approximately Reconstruction IIR/FIR QMF Filter Banks

Sang Jun Lee, Nam Su Kim, Nam Ho Kim  
 Dept. of Control and Instrumentation Eng., Pukyong National Univ.

### Abstract

This paper shows a novel and simple IIR/FIR QMF(quadrature mirror filter) filter banks, mixed IIR and FIR structure. Here, FIR filters used for phase compensation. In this paper, we introduced analysis and synthesis filter banks, which used FIR linear phase filters and allpass filters.

In result, phase response of analysis and synthesis filter banks become approximately linear characteristic.

Simultaneously, aliasing distortion can be completely canceled.

### I. 서론

현대 사회의 발전과 더불어 디지털 신호의 처리에 대한 관심이 높아지고 있다. 디지털 신호처리를 위해 다양한 디지털 필터가 사용된다. 기존의 필터들은 FIR구조를 이용하여 설계되었으며, 최근에는 앨리어싱과 크기 왜곡을 최소화시키는데 효과적인 IIR구조가 여러 분야에 응용되고 있다. 그러나 IIR구조는 위상 왜곡이 제거되지 않는 단점 때문에, 복잡한 합성 필터뱅크가 요구되는, anticausal filtering을 사용하는 방법과 무한 길이의 신호를 처리하기 위한 double buffering 구성을 적용하는 방법이 사용된다[1],[2],[4]. 그러므로, 최근의 연구는 FIR구조와 IIR구조를 혼합한 합성 필터뱅크를 사용한다.

QMF 필터뱅크는 분석과정에서 발생하는 왜곡을 합성 과정에서 제거하는 장점을 가지고 있으므로 최근 많은 연구에 적용되고 있다.

따라서, 본 논문에서는 QMF 필터뱅크 구조를 적용하며, 위상 왜곡을 보상하기 위해서 다른 접근방법들과 비교하여 간단한 형태의 FIR 필터를 사용한 IIR/FIR QMF 필터뱅크를 설계한다.

### II. 2-채널 QMF 필터뱅크

그림 1은 2-채널 필터뱅크이며,  $H_k(z)$ 는 분석 필터들을 나타내고,  $G_k(z)$ 는 합성 필터들을 나타낸다.

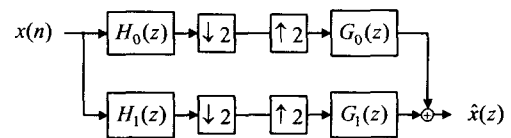


Fig. 1. Two-channel filter bank structure.

이 시스템의 입출력 관계는 식 (1)과 같다.

$$\widehat{X}(z) = X(z) T_{lin}(z) + X(-z) T_{alias}(z) \quad (1)$$

선형 왜곡 전달함수  $T_{lin}(z)$ 와 앨리어싱 전달함수  $T_{alias}(z)$ 는 각각 식 (2)와 식 (3)으로 나타낸다.

$$T_{lin}(z) = \frac{1}{2} [H_0(z) G_0(z) + H_1(z) G_1(z)] \quad (2)$$

$$T_{alias}(z) = \frac{1}{2} [H_0(-z) G_0(z) + H_1(-z) G_1(z)] \quad (3)$$

$$G_0(z) = H_1(-z) \text{ and } G_1(z) = -H_0(-z) \quad (4)$$

합성 필터들이 식 (4)와 같으면 앨리어싱은 완전히 제거된다. 분석 필터들이  $H_0(z) = H_1(-z)$ 의 관계에 있을 때, 이것을 QMF라고 하고, 폴리페이저 요소들을 사용하여 분석 필터뱅크를 나타낸다.

QMF 필터뱅크는 식 (4)를 만족하고 폴리페이저 요소

를 포함하는 올패스 필터  $A_k(z)$  ( $k=0, 1$ )로 구성되며, IIR 서브밴드 필터를 이룬다.

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0(z^2) \\ z^{-1}A_1(z^2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[G_0(z) \ G_1(z)] = \frac{1}{2} [z^{-1}A_1(z^2) \ A_0(z^2)] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

분석-합성 필터는 식 (5)와 식 (6)으로 정의되며[5], 식 (4)를 만족하므로 앨리어싱 왜곡은 완전히 제거되어진다. 그러나 위상 왜곡은 올패스 필터  $A_0(z)$ 와  $A_1(z)$ 에 의한 영향으로 계속 존재한다. 식 (5)와 식 (6)을 식 (2)에 대입하여 다음의 선형 왜곡 함수를 얻는다.

$$T_{lin}(z) = \frac{1}{2} z^{-1} A_0(z^2) A_1(z^2)$$

분석-합성 필터구조의 결과를 그림 2에 나타내었다.

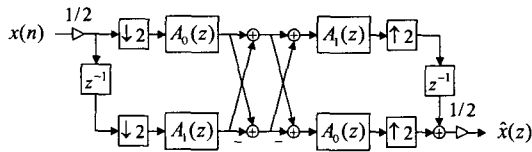


Fig. 2. Two-channel allpass filter bank.

### III. 위상 왜곡의 보상

올패스 필터의 위상 왜곡을 보상하기 위해 FIR 필터를 설계한다[3].

안정한 1차의 올패스 필터는 식 (7)과 같다.

$$A_i(z) = \frac{z^{-1} + a_i}{1 + a_i z^{-1}}, \quad 0 < a_i < 1, \quad a_i \in \mathbf{R} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & z^{-d} - (-1)^d \cdot a^d \\ & = (z^{-1} + a) \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k a^k z^{-(d-1-k)} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F_i(z) & = (1 + a_i z^{-1}) \sum_{k=0}^{d_i-1} (-1)^k a_i^k z^{-(d_i-1-k)} \\ & = (-1)^{d_i-1} a_i^{d_i-1} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{d_i-1} ((-1)^{d_i-1-k} a_i^{d_i-1-k} \\ & \quad \cdot (1 - a_i^2) z^{-k} + a_i z^{-d_i}) \end{aligned} \quad (9)$$

식 (8)의 다항식 인수분해 관계를 기초로 하여 설계된 위상 보상 FIR 필터  $F_i(z)$ 는 식 (9)로 정의된다.

식 (7)과 식 (8), 그리고 식 (9)로부터 다음의 식 (10)을 얻을 수 있다.

$$A_i(z) F_i(z) = z^{-d_i} - (-1)^{d_i} a_i^{d_i} \quad (10)$$

$0 < a_i < 1$ 이므로,  $a_i^{d_i}$ 를 최소로 하는 차수  $d_i$ 의 FIR 필터를 선택하여,  $A_i(z) F_i(z)$ 가  $z^{-d_i}$ 의 딜레이를 가지도록 근사화 할 수 있다.

### IV. 일반화 된 2-채널 IIR/FIR 필터뱅크

일반화 된 2-채널 필터뱅크의 구조는 그림 3과 같다.

선형 왜곡 전달함수와 앨리어싱 전달함수의 일반적인 표현은 식 (11)과 식 (12)이다.

$$\begin{aligned} T_{lin}(z) & = \frac{1}{4} z^{-1} \\ & \cdot (A_{a,0}(z^2) F_{a,0}(z^2) A_{s,0}(z^2) F_{s,0}(z^2) \\ & \quad + A_{a,1}(z^2) F_{a,1}(z^2) A_{s,1}(z^2) F_{s,1}(z^2)) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} T_{alias}(z) & = \frac{1}{4} z^{-1} \\ & \cdot (A_{a,0}(z^2) F_{a,0}(z^2) A_{s,0}(z^2) F_{s,0}(z^2) \\ & \quad - A_{a,1}(z^2) F_{a,1}(z^2) A_{s,1}(z^2) F_{s,1}(z^2)) \end{aligned} \quad (12)$$

그림 3으로부터 IIR/FIR QMF 필터뱅크를 설계한다.

크기 왜곡을 최소화시키고, 앨리어싱 왜곡을 제거하며 근사적으로 선형 위상인 분석 필터와 합성 필터를 설계하는 것이다. 분석 필터와 합성 필터들을 각각 식 (13)과 식 (14)를 이용한다.

$$\begin{aligned} A_{a,0}(z) & = 1, & F_{a,0}(z) & = Q_0(z) \\ A_{a,1}(z) & = A_1(z), & F_{a,1}(z) & = F_0(z) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A_{s,0}(z) & = 1, & F_{s,0}(z) & = 2Q_1(z) \\ A_{s,1}(z) & = A_0(z), & F_{s,1}(z) & = 2F_1(z) \end{aligned} \quad (14)$$

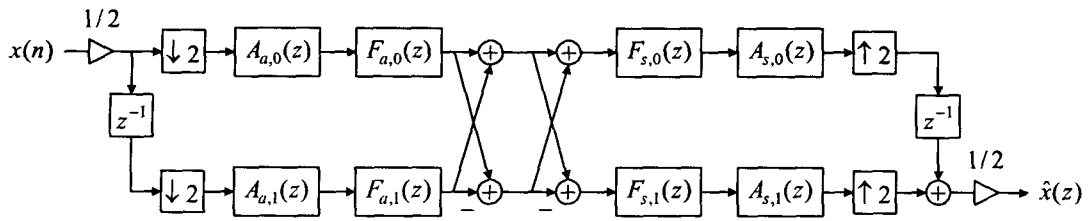


Fig. 3. Generalized two-channel analysis-synthesis IIR/FIR filter bank.

$$Q_i(z) = A_i(z)F_i(z) = z^{-d_i} - (-1)^{d_i} a_i^{d_i}$$

$$|H_i'(e^{j\omega})| = |F_0(e^{j2\omega})||H_i(e^{j\omega})| \approx |H_i(e^{j\omega})| \quad i = 0, 1$$

여기서,  $Q_i(z)$ 는 차수  $d_i$ 의 FIR 필터이다.

### V. 시뮬레이션 및 결과

선형 왜곡 전달함수  $T_{lin}(z)$ 는 식 (15)와 같고, 선형 왜곡 에러  $E_{lin}(z)$ 가 복원 된 신호에서 나타난다.

본 논문에서 사용된 올패스 필터의 계수 값들은  $a_0 = 0.2031$ 과  $a_1 = 0.6783$  이다.

$$\begin{aligned} T_{lin}(z) &= z^{-(2d_1+2d_0+1)} + E_{lin}(z) \\ E_{lin}(z) &= \frac{1}{2}(-1)^{d_0+d_1} a_0^{d_0} a_1^{d_1} z^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{2}(-1)^{d_0} a_0^{d_0} z^{-(2d_1+1)} \\ &\quad - \frac{1}{2}(-1)^{d_1} a_1^{d_1} z^{-(2d_0+1)} \end{aligned} \quad (15)$$

지연요소에 대한 영향을 알아보기 위해  $d_0$ 를 2에서 16까지 2씩 증가시키고,  $d_1$ 을 1에서 80까지 변화시켰다. 크기 왜곡의 리플크기와 그룹딜레이의 변화를 그림 4의 (a), (b)에서 각각 나타내었다.

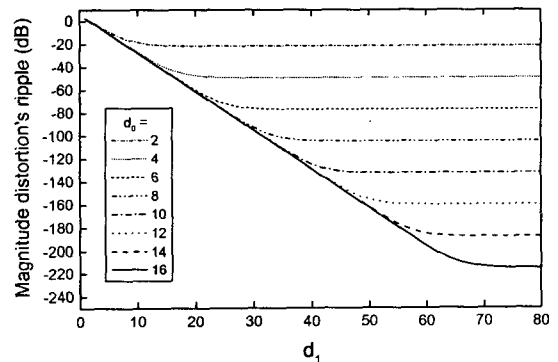
$E_{lin}(z)$ 는 선형 왜곡 에러를 나타내고, 만약,  $a_i^{d_i} \approx 0$ 가 되도록 하는,  $d_1 \gg d_0$ 인 차수  $d_i$ 를 선택하면  $E_{lin}(z) \approx 0$ 이다. 그리고,  $T_{lin}(z)$ 는 근사적으로 선형 위상이고 모든 주파수에 대해  $|T_{lin}(e^{j\omega})| \approx 1$ 이 된다. 그러므로 필터뱅크의 전체 지연은  $D = 2d_1 + 2d_0 + 1$ 로 고정된다. 앨리어싱 왜곡 전달함수는 각각의 폴리페이즈 요소들의 조합으로 완전히 제거된다.

변형된 분석 필터들을 식 (21)에 나타내었다.

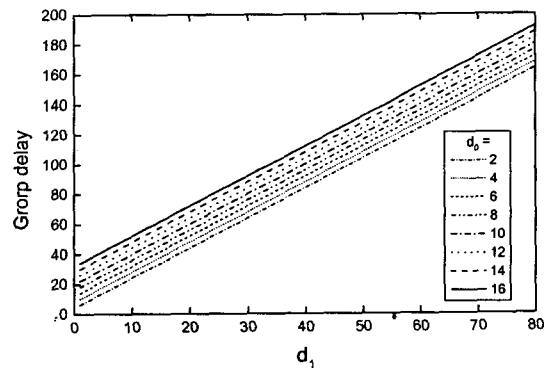
$$\begin{aligned} H_0'(z) &= \frac{1}{2}(Q_0(z^2) + z^{-1}A_1(z^2)F_0(z^2)) \\ &= H_0(z)F_0(z^2) \\ H_1'(z) &= \frac{1}{2}(Q_0(z^2) - z^{-1}A_1(z^2)F_0(z^2)) \\ &= H_1(z)F_0(z^2) \end{aligned} \quad (21)$$

이 필터들은 위상 보상을 위한  $F_0(z)$ 의 영향으로 위상 응답의 왜곡이 감소한다.

크기 주파수 응답은 보상 필터  $F_0(z)$ 가 올패스 필터와 유사한 동작을 하므로, 순수한 분석 필터뱅크와 유사하다.



(a) Magnitude distortion's ripple



(b) Aliasing distortion's average value

Fig. 4. Response by  $d_0, d_1$  value

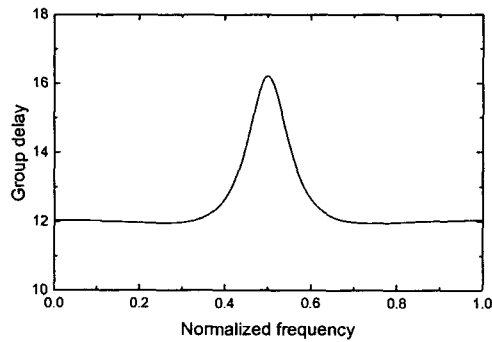


Fig. 5. Group delay of Analysis filters.

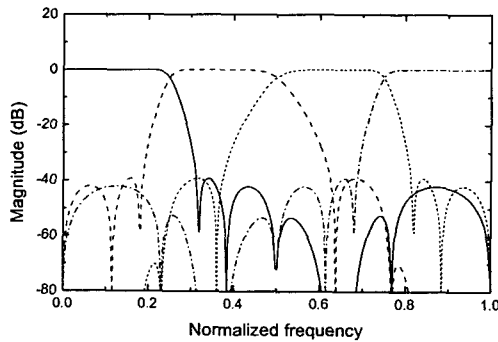
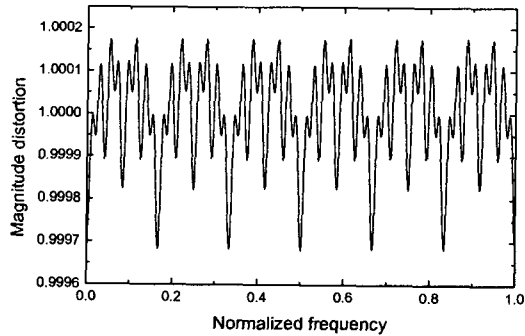
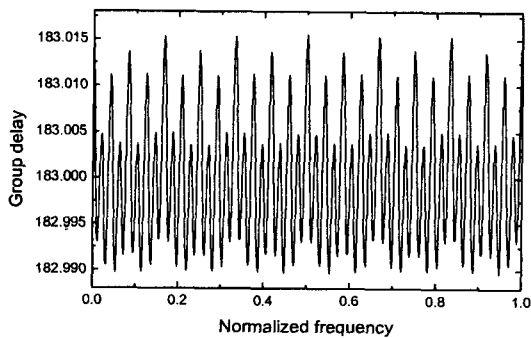


Fig. 6. Magnitude frequency responses of analysis filters in 4-channel.



(a) Magnitude distortion



(b) Group delay

Fig. 7. Magnitude distortion and group delay

of overall system in 4-channel.

그림 5에서는 분석 필터의 그룹딜레이를 나타내었으며, 통과대역과 저지대역에서 근사한 선형위상임을 확인하였다. 그림 6은 2-채널 IIR/FIR QMF 필터뱅크를 확장한 4-채널 필터뱅크를 설계하여 분석 필터의 크기 응답을 나타내었다. 그림 7에서는 4-채널 필터뱅크의 전체 시스템의 크기 왜곡과 그룹딜레이를 나타내었다.

## VI. 결론

본 논문에서는, 폴리페이즈 영역에서 필터뱅크의 크기와 앨리어싱, 그리고 위상 왜곡을 보상하기 위해, 2-채널 IIR/FIR 필터뱅크 구조에 QMF 관계를 적용하였다. IIR 필터를 적용하여 크기 왜곡을 최소화하고 앨리어싱 왜곡을 제거하였으며, FIR 필터를 적용하여 위상 왜곡을 보상하였다. 지연요소를 변화하여 합성 필터 뱅크의 출력에서 복원 에러의 증가/감소가 전체 시스템 지연을 감소/증가시키는 특성을 얻었다. 따라서, 지연요소의 영향을 무시할 때, 합성 필터뱅크의 설계 비용을 줄이는 효과를 기대할 수 있으며, 2-채널 필터뱅크를 확장하여 4-채널 필터뱅크를 설계하여 같은 결과를 얻었고, 결과로서 다 채널 필터뱅크로 확장하는 것이 가능할 것이다.

## 참고문헌

- [1] C. D. Creusere and S. K. Mita, "Efficient audio coding using perfect reconstruction noncausal IIR filter banks", *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, 4:115-123, Mar. 1996.
- [2] R. Czarnach, "Recursive processing by noncausal digital filters", *IEEE Trans. on Acoust, Speech, Signal Processing*, ASSP-30:363-370, 1982.
- [3] E. Galijasevic and J. Kliewer, "Non-uniform near-perfect-reconstruction oversampled DFT filter banks based on allpass-transforms", In *Proc. Ninth IEEE DSP Workshop(DSP 2000)*, Hunt, TX, USA, Oct. 2000.
- [4] S. K. Mitra, D. D. Creusere, and H. Babic, "A novel implementations of perfect reconstruction QMF banks using IIR filters for infinite length signals", In *Proc. IEEE Int. Sympo. Circuits and Systems*, pages 2312-2315, San Diego, USA, May 1992.
- [5] P. P. Vaidyanathan, "Multirate Systems and Filter Banks", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.