

# QP 방법과 McClellan 변환을 이용한 2차원 FIR Elliptic 필터 설계에 관한 연구

김 남 수, 이 상 준, 김 남 호  
부경대학교 공과대학 제어계측공학과

## A Study on QP Method and Two Dimensional FIR Elliptic Filter Design with McClellan Transform

Nam Su Kim, Sang Jun Lee, Nam Ho Kim  
Dept. of Control and Instrumentation Eng., Pukyong National Univ.

### Abstract

There are several methods for the design of 2D filter. Notable among them is McClellan transform method. This transform allows us to obtain a high order 2D FIR filter through mapping the 1D frequency points of a 1D prototype FIR filter onto 2D frequency contours. We design 2D filter using this transform. Then we notice for mapping deviation of the 2D filter.

In this paper, Quadratic programming (QP) method allows us to obtain coefficients of McClellan transform. Then we compare deviation of QP method with least-squares(LS) method. Elliptic filter is used for comparison.

The optimal cutoff frequencies of a 1D filter are obtained directly from the QP method. Also several problem of LS method are solved.

### I. 서 론

2차원 필터를 설계하는 방법에는 windowing techniques, minimax 설계, least-squares 방법 등이 있다. 본 논문에서는, 이들 중 잘 알려진 McClellan 변환을 이용할 것이다. 이 변환은 전형적인 1차원 FIR 필터에서 2차원 주파수 영역으로 사상함으로써 매우 쉽게 2차원 FIR 필터를 설계할 수 있다[1],[2],[4].

LS를 이용한 설계법에서는 사상오차를 최소화 하는 최적의 차단주파수를 선정하기 어렵고, McClellan 변환함수의 제약조건을 만족시키기가 어렵다.

본 논문에서는, QP 방법을 이용한 컴퓨터 연산에 의해

Elliptic 필터를 설계하고, LS 방법을 이용한 설계법에서의 문제점들을 제거하였다.

### II. McClellan 변환

1차원 FIR 필터는 아래의 식(1)과 같다.

$$B(\omega) = \sum_{n=0}^N b(n)e^{-j\omega n} \quad (1)$$

2차원 FIR 필터는 식(2)의 형태로 나타낸다.[5]

$$H(\omega_1, \omega_2) = B(\omega) |_{\cos(\omega) = T(\omega_1, \omega_2)} \quad (2)$$

McClellan 변환 함수는 식(3)과 같다.[4]

$$\cos(\omega) = T(\omega_1, \omega_2) \quad (3)$$

$$T(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^I t(i, j) \cos(i\omega_1) \cos(j\omega_2) + \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L s(k, l) \sin(k\omega_1) \sin(l\omega_2) \quad (4)$$

식(4)에서 첫 번째 cos항은 2차원 필터의 주파수 사분면에 대한 대칭적인 부분에 대한 항이며, sin항은 비대칭에 관한 항이다.

### III. Least-squares 방법

그림 1은 1차원 필터와 2차원 필터의 주파수 사상 관계를 나타낸다.

그림 1에서 1D의 통과대역( $0 \leq \omega \leq \omega_c$ )은 2D 통과대역 영역( $I_s$ )으로, 차단주파수( $\omega_c$ )는 curve C로, 저지대역( $\omega_c \leq \omega \leq \pi$ )로 사상됨을 보이고 있다.

여기에서, curve C에 따른 사상 오차는 식(5)로 정의되었다.

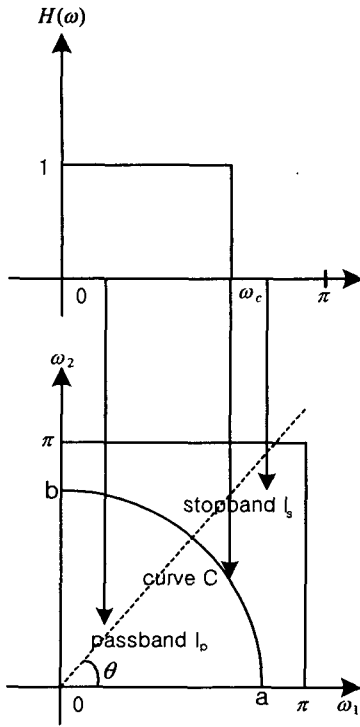


Fig. 1. Mapping relationship from 1D low-pass filter to 2D FIR filter.

$$E = \sum_{m=0}^{M-1} |\cos(\omega_c) - T(\omega_{1m}, \omega_{2m})|^2 \quad (5)$$

식(5)에서 M은 필터의 길이이다.

LS법을 이용한 2가지 조건과 설계법은 다음의 과정과 같다.

먼저 McClellan 변환함수의  $T(\omega_{1m}, \omega_{2m})$ 를 벡터형식으로 나타내면 식(6)과 같다.

$$T(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{a}' \mathbf{e}(\omega_1, \omega_2) \quad (6)$$

식(6)에서 벡터  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{e}$ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [t_{00}, \dots, t_{IY}, s_{11}, \dots, s_{KL}]^t \\ \mathbf{e}(\omega_1, \omega_2) &= [1, \dots, \cos(I\omega_1)\cos(J\omega_2), \\ &\quad \sin(\omega_1)\sin(\omega_2), \dots, \sin(K\omega_1)\sin(L\omega_2)]^t \end{aligned} \quad (7)$$

식(5)의 사상오차는 식(8)의 형태로 나타낼 수 있다.

$$E = \mathbf{a}' \mathbf{Q} \mathbf{a} - 2 \mathbf{a}' \mathbf{p} + d \quad (8)$$

식(8)의  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $d$ 는 식(9)와 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{e}(\omega_{1m}, \omega_{2m}) \mathbf{e}'(\omega_{1m}, \omega_{2m}) \\ \mathbf{p} &= \sum_{m=0}^{M-1} \cos(\omega_c) \mathbf{e}(\omega_{1m}, \omega_{2m}) \\ d &= \sum_{m=0}^{M-1} \cos^2(\omega_c) \end{aligned} \quad (9)$$

식(6)과 식(8)에 의한 LS 방법의 두 가지 조건식은 아래와 같다.

$$\mathbf{a}' \mathbf{Q} \mathbf{a} - 2 \mathbf{a}' \mathbf{p} + d \quad (\text{최소화})$$

$$\mathbf{G} \mathbf{a} = \mathbf{f}$$

이 두 조건으로 Lagrange 연산법을 이용하여 벡터  $\mathbf{a}$ 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{p} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{G}' (\mathbf{G} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{G}')^{-1} [\mathbf{G} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{p} - \mathbf{f}] \quad (10)$$

지금까지의 LS 방법은 다음의 문제점을 가지고 있다. 사상오차를 최소화하기 위한 차단주파수를 선정하기 위해 모든 주파수 구간 ( $0 \leq \omega \leq \pi$ )에 대해 스캐닝을 해야 하며, 이로 인한 상당한 시간 소모가 예상된다. 그리고, 이때 선정된 차단주파수가 최적이라 볼 수가 없다. 또한, McClellan 변환 함수의  $T(\omega_{1m}, \omega_{2m}) \leq 1$ 의 조건을 항상 만족한다는 보장이 없다. 이후 우리는 QP 방법을 이용함으로써 이 문제점들을 해결할 것이다.

#### IV. Quadratic programming 방법

QP 방법의 설계법을 위한 네가지 조건은 다음의 과정에 나타내었다.

먼저 사상오차에 관한 조건은 식(11)과 같은 벡터의 형태로 나타낼 수 있다.

$$E = \bar{\mathbf{a}}' \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{a}} \quad (11)$$

식(11)에서  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}$ 는 식(12)와 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} &= [\cos(\omega_c), \mathbf{a}']^t \\ \bar{\mathbf{Q}} &= \sum_{m=0}^{M-1} \bar{\mathbf{e}}(\omega_{1m}, \omega_{2m}) \bar{\mathbf{e}}'(\omega_{1m}, \omega_{2m}) \\ \bar{\mathbf{e}}(\omega_1, \omega_2) &= [-1, \mathbf{e}'(\omega_1, \omega_2)]^t \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)에서  $(\omega_{1m}, \omega_{2m})$ 는 curve C에 대한 주파수 샘플이다.

두 번째로 1차원 통과대역  $[0, \omega_c]$ 에서 2차원 통과대역 영역을  $I_p$ 로의 사상에 관한 제약조건이다.

$$\cos(\omega_c) + \epsilon \leq T(\phi_{1k}, \phi_{2k}) \leq \cos(0) - \epsilon \quad (13)$$

$$k = 1, 2, \dots, L_1$$

식(13)에서  $\epsilon$ 은 아주 작은 양수,  $(\phi_{1k}, \phi_{2k})$ 는  $I_p$ 에 대한 주파수 샘플이다.

식(13)을 식(6)을 이용하여 표현하면 식(14)와 같다.

$$\cos(\omega_c) + \epsilon \leq \mathbf{a}' \mathbf{e}(\phi_{1k}, \phi_{2k}) \leq 1 - \epsilon \quad (14)$$

$$k = 1, 2, \dots, L_1$$

식(14)를 식(15)의 형태로 변형한다.

$$\mathbf{U}_p \bar{\mathbf{a}} \leq \mathbf{g}_p \quad (15)$$

식(15)의  $U_p$ ,  $g_p$  행렬은 식(16)과 같다.

$$U_p = \begin{bmatrix} 1 & -e^{j(\phi_{11}, \phi_{21})} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -e^{j(\phi_{1L_1}, \phi_{2L_1})} \\ 0 & e^{j(\phi_{11}, \phi_{21})} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & e^{j(\phi_{1L_1}, \phi_{2L_1})} \end{bmatrix} \quad g_p = \begin{bmatrix} -\epsilon \\ \vdots \\ -\epsilon \\ 1-\epsilon \\ \vdots \\ 1-\epsilon \end{bmatrix} \quad (16)$$

세 번째는, 1차원의 저지대역  $(\omega_c, \pi)$ 에서 2차원 저지대역 영역  $I_s$ 로의 사상에 대한 제약 조건이다.

$$\cos(\pi) + \epsilon \leq T(\phi_{1k}, \phi_{2k}) \leq \cos(\omega_c) - \epsilon \quad (17)$$

$$k = 1, 2, \dots, L_2$$

식(17)을 식(6)을 이용하여 식(18)과 같이 나타낼 수 있다.

$$-1 + \epsilon \leq a^t e(\phi_{1k}, \phi_{2k}) \leq \cos(\omega_c) - \epsilon \quad (18)$$

$$k = 1, 2, \dots, L_2$$

식(18)을 아래의 식(19)의 형태로 변형한다.

$$U_s \bar{a} \leq g_s \quad (19)$$

식(19)의  $U_s$ ,  $g_s$  행렬은 식(20)과 같다

$$U_s = \begin{bmatrix} -1 & e^{j(\phi_{11}, \phi_{21})} \\ \vdots & \vdots \\ -1 & e^{j(\phi_{1L_2}, \phi_{2L_2})} \\ 0 & -e^{j(\phi_{11}, \phi_{21})} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & -e^{j(\phi_{1L_2}, \phi_{2L_2})} \end{bmatrix} \quad g_s = \begin{bmatrix} -\epsilon \\ \vdots \\ -\epsilon \\ 1-\epsilon \\ \vdots \\ 1-\epsilon \end{bmatrix} \quad (20)$$

마지막으로,  $\bar{a}$ 의 첫 번째 항인  $\cos(\omega_c)$ 가  $|\cos(\omega_c)| \leq 1$  조건을 만족한다. 이는 아래의 식으로 표현되어진다.

$$|v^t \bar{a}| \leq 1 \quad (21)$$

식(21)에서 벡터  $v = [1, 0, \dots, 0]^t$ 이다.

식(21)을 식(22)의 형태로 변형한다.

$$U_c \bar{a} \leq g_c \quad (22)$$

식(22)에서  $U_c$ ,  $g_c$ 는 아래와 같다.

$$U_c = \begin{bmatrix} v^t \\ -v^t \end{bmatrix} \quad g_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$\bar{a}$ 는 식(15), (19), (22)의 제약조건에 따라 식(11)의 사상 에러  $E$ 를 최소화함으로써 결정된다. 이로써, 아래와 같은 설계 조건을 구할 수 있다.

$$\bar{a}^t \bar{Q} \bar{a} \quad (\text{최소화})$$

$$U \bar{a} \leq g$$

위의 조건에서  $U$ ,  $g$ 는 식(24)의 행렬식과 같다.

$$U = \begin{bmatrix} U_c \\ U_p \\ U_s \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} g_c \\ g_p \\ g_s \end{bmatrix} \quad (24)$$

위의 조건을 QP에 적용시켜 McClellan 변환 함수의 계수와 차단주파수  $\omega_c$ 를 구한다.

QP 방법은 사상오차를 최소로 하는 최적의 1차원 필터의 차단 주파수  $\omega_c$ 를 프로그래밍에 의해 선정할 수 있다.  $\bar{a}$ 의 첫 번째 항에 대한 제약조건에 의해 McClellan 변환 함수  $T(\omega_{1m}, \omega_{2m}) \leq 1$ 를 항상 만족시킬 수 있다.

## V. 2차원 필터 설계

2차원 필터 설계를 위한 1차원 필터는, QP 방법에 의해 구해진 차단주파수로 등리플 저역통과 필터를 설계한다.

1차원 저역통과 필터의 전형적인 형태를 아래에 나타내었다.

$$B(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_c - \frac{\Delta F}{2} \\ 0 & \omega_c + \frac{\Delta F}{2} \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (25)$$

식(25)에서  $\omega_c$ 는 차단주파수,  $\Delta F$ 는 천이대역이다.

2차원 elliptic 필터의 설계는 먼저 QP 방법에서의  $\bar{Q}$ 를 구하기 위한 curve C에 따른 주파수 샘플  $(\omega_{1m}, \omega_{2m})$ 은 식(26)에 나타나며,  $\theta$ 는 타원의 방향각이다.

$$\omega_{1m} = a \cos \frac{2m\pi}{M} \cos \theta - b \sin \frac{2m\pi}{M} \sin \theta \quad (26)$$

$$\omega_{2m} = a \cos \frac{2m\pi}{M} \sin \theta - b \sin \frac{2m\pi}{M} \cos \theta$$

$U_p$ ,  $U_s$  행렬을 구하기 위한 주파수 샘플 구간은  $-\pi \leq \omega_1 \leq \pi$ ,  $\omega_2 = \omega_1$ 이다. 그리고, elliptic 필터는 주파수 사분면에 대해 비대칭이므로 비대칭에 관한 항인  $\sin$  항의 계수  $s_k \neq 0$ 이다. 그러므로, McClellan 변환 함수의 차수는  $I, J, K, L$ 을 고려하여 선정한다.

설계된 2차원 필터와 기존의 필터를 비교하기 위한 2차원 필터의  $\omega_c$ 에 대한 root mean square deviation은 식(27)로 정의한다.

$$D = \left[ \sum_{m=0}^{M-1} [\cos(\omega_c) - T(\omega_{1m}, \omega_{2m})]^2 \right]^{1/2} \quad (27)$$

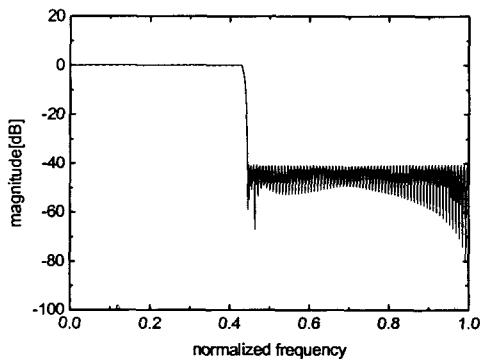
VI. 시뮬레이션 및 결과

Elliptic 필터의 설계조건은 McClellan 변환 함수의 차수  $I=J=K=L=1$ , 필터의 길이  $M=50$ 이다. QP 방법을 이용하여 설계된 elliptic 필터의 McClellan 변환 함수의 계수와 차단주파수  $\omega_c$ 를 표 1에 나타내었으며, QP와 LS 방법으로 2D elliptic 필터 설계시 발생하는 deviation을 비교하였다.

Table 1. Elliptic filter design with orientation  $\theta$ , 1D cutoff frequency  $\omega_c$ , McClellan transform coefficients and comparison of deviation.

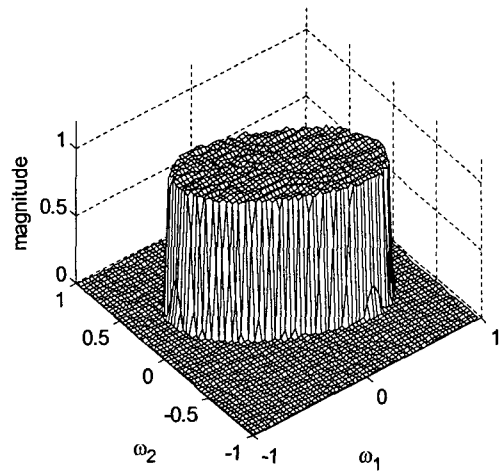
$\theta$	$-45^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$
$a/\pi$	5/6	0.25	0.125
$b/\pi$	0.5	0.5	0.25
$t_{00}$	0.0950	0.7015	-0.1644
$t_{01}$	0.3014	0.0138	0.1242
$t_{10}$	0.3014	0.2056	0.5584
$t_{11}$	0.2923	0.0656	0.3914
$s_{11}$	-0.2730	0	-0.3811
$\omega_c/\pi$	0.4364	0.1356	0.1934
D(QP)	0.02246	0.00032	0.00138
D(LS)[4]	0.02353	0.00120	0.00149

1차원 등리플 저역통과 필터의 설계 조건으로 차단주파수  $\omega_c=0.4364\pi$ , ripple=0.01, 천이대역  $\Delta F=0.05$ 인 필터의 주파수응답 특성은 그림 2(a),  $\theta=-45^\circ$ 에서의 FIR elliptic 필터를 그림 2(b)에 구현하였다.



(a) Frequency response of 1D low-pass filter

Elliptic filter(a=5/6, b=0.5,  $\theta=-45^\circ$ )



(b) Frequency response of 2D elliptic filter  
Fig. 2. Elliptic filter design with QP.

VII. 결론

LS 방법을 이용하여 2차원 필터를 설계할 때, 사상오차를 최소화하는 최적의 차단주파수를 선정하는데 어려움이 있었으며, McClellan 변환 함수의 제약조건을 항상 만족하지 못했다.

본 논문에서 제시한 QP 방법을 이용하여 LS 방법의 문제점들을 제거하였으며, 사상오차 또한 LS 방법을 이용하여 2차원 필터를 설계했을 때 보다 현저히 줄어들었다.

QP의 제약조건에서, 주파수 샘플 구간을 세밀하게 할수록 사상오차를 더욱 줄일 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

- [1] A. P. Bede Liu, "Digital signal processing", John Wiley & Sons, Inc., 1976.
- [2] M. S. Reddy, S. N. Hazra, "Design of elliptically symmetric low-pass two-dimensional FIR filters using the McClellan transformation", IEEE Trans. Circuits Syst., 1987.
- [3] L. B. Jackson, "Digital filters and signal processing", Kluwer Academic Publishers, vol. 34, 1989.
- [4] H. Chen, G. E. Ford, "A unified eigenfilter approach to the design of two-dimensional zero-phase FIR filters with the McClellan transform", IEEE Trans. Circuits Syst. II, Analog Digit. Signal Process, vol. 41, 1994
- [5] <http://www.mathworks.com/search/>