

2차 적응 IIR 대역 통과 필터의 해석

김정국, 조복태, 이재욱, 서용수
 동서대학교 정보시스템공학부 전자공학전공

Analysis of Second Order Adaptive IIR Band Pass Filters

Jeongkuk Kim, Boktae Lee, Jaewook Lee, and Yongsu Seo

Dept. of Electronic Engineering, Division of Information Systems Engineering, Dongseo University

요약

디지털 2차 적응 IIR 대역 통과 필터의 진폭 특성을 해석, 적응 계수와 입력 신호의 중심 주파수 그리고 극의 각도의 관계를 해석하고, 적응 계수의 경계를, 기존에 발표된 세 알고리즘을 예로 들어, 평가하였다.

I. 서론

디지털 적응 필터는 FIR(Finite Impulse Response) 또는 IIR(Infinite Impulse Response) 필터로 구성된다. IIR 필터는 FIR 필터에 비해 낮은 차수로 그 복잡함의 감소로 구조와 계산 양을 매우 감소시킬 수 있다. 디지털 적응 필터는 주로 입력 신호의 중심 또는 노치(notch) 주파수에 따라 적응 계수를 갱신시켜 입력 신호를 추적하는 시스템(system)이다. 적응 IIR 필터는 일반적으로 2차의 특성 가변 대역 통과 또는 대역 저지(notch) 필터, 적응(감도) 신호 발생 회로, 그리고 적응 알고리즘으로 구성된다.

II. 본론

2.1 디지털 2차 IIR 대역 통과 필터의 설계

본 논문에서는, 아날로그(analog) 대역 통과 필터에서 디지털 대역 통과 필터를 설계한다. 중심 각 주파수 ω_0 에서 크기 1을 가지고 3 dB 통과 대역폭 b 인, 아날로그 2차 IIR 대역 통과 필터의 전달 함수는 다음과 같이 주어진다.

$$H_B(s) = \frac{bs}{s^2 + bs + \omega_0^2} \quad (1)$$

식 (1)은, 쌍-선형(bilinear) 변환하면, 대응하는 디지털 필터의 전달 함수는 다음과 같이 주어진다.

$$H_B(z) = H_B(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}} = \frac{b(1-z^{-2})}{(1+\omega_0^2+b)-2(1-\omega_0^2)z^{-1}+(1+\omega_0^2-b)z^{-2}} \quad (2)$$

중심 각 주파수 $\Omega_0 (= \omega_0 T)$ 은, 식 (2)의 크기를 1로 두면, 식 (3)과 같다. 여기서 T 는 샘플링(sampling) 주기이다.

$$\cos \Omega_0 = \frac{1-\omega_0^2}{1+\omega_0^2} \quad (3)$$

식 (2)은, 극(pole)의 반경 r 과 중심 각 주파수 Ω_0 으로 표시하면, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H_B(z) = \frac{1-r^2}{2} \frac{1-z^{-2}}{1-(1+r^2)\cos \Omega_0 z^{-1}+r^2 z^{-2}} \quad (4)$$

여기서, r^2 는 다음과 같이 두었다.

$$r^2 = \frac{1+\omega_0^2-b}{1+\omega_0^2+b} \quad (5)$$

식 (2)을, 극의 반경 r 과 극의 각 θ 로 표시하면,

$$H_B(z) = \frac{1-r^2}{2} \cdot \frac{1-z^{-2}}{1-2r\cos \theta z^{-1}+r^2 z^{-2}} \quad (6)$$

여기서, 극의 각 θ 는 다음과 같이 두었다.

$$\cos \theta = \frac{1-\omega_0^2}{\sqrt{(1+\omega_0^2)^2-b^2}} \quad (7)$$

중심 각 주파수 $\cos \Omega_0$ 과 극의 각 $\cos \theta$ 의 관계는,

$$\cos \Omega_0 = \frac{2r}{1+r^2} \cos \theta. \quad (8)$$

만약 r 이 1에 가까이 가면 $\Omega_0 \approx \theta$ 이다.

2.2 특성-가변 IIR 대역 통과 필터의 설계

Soderstrand는 식 (6)의 극의 각 θ 와 적응 계수 $a[n]$ 과의 관계를 다음과 같이 두었다.

$$H_B(z) = \frac{1-r^2}{2} \frac{1-z^{-2}}{1-2ra[n]z^{-1}+r^2 z^{-2}} \quad (9)$$

식 (9)에서, 적응 계수 $a[n]$, 극의 반경 r , 그리고 극의 각 θ 의 관계와 중심 각 주파수 Ω_0 과의 관계는, 크기를 1로 두면, 다음과 같이 얻을 수 있다[1].

$$\theta = \cos^{-1}(a[n]), \quad \Omega_0 = \cos^{-1}\left(\frac{2r}{1+r^2} a[n]\right) \quad (10)$$

Mratin은 식 (4)의 중심 각 주파수 Ω_0 과 적응 계수 $a[n]$ 과의 관계를 다음과 같이 두었다[2].

$$H_B(z) = \frac{1-r^2}{2} \frac{1-z^{-2}}{1-(1+r^2)^2 \left(1 - \frac{a[n]}{1+r^2}\right)^2 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (11)$$

식 (11)에서, 적응 계수, 극의 반경, 그리고 극의 각과 그리고 중심 각 주파수와의 관계는,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1+r^2-a^2[n]}{2r}\right), \quad \Omega_0 = \cos^{-1}\left(1 - \frac{a^2[n]}{1+r^2}\right). \quad (12)$$

Nishimura는 식 (4)의 중심 각 주파수 Ω_0 과 적응 계수 $a[n]$ 과의 관계를 다음과 같이 두었다[3].

$$H_B(z) = \frac{1-r^2}{2} \frac{1-z^{-2}}{1-(1+r^2)a[n]z^{-1}+r^2 z^{-2}} \quad (13)$$

식 (13)에서, 적응 계수 $a[n]$, 극의 반경 r , 그리고 극의 각 θ 의 관계와 중심 각 주파수 Ω_0 과의 관계는,

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1+r^2}{2r}\left(1 - \frac{a^2[n]}{2}\right), \quad \Omega_0 = \cos^{-1}(a[n]). \quad (14)$$

2.3 특성-가변 대역 통과 필터의 크기

식 (9)의 극의 반경 r 과 적응 계수 $a[n]$ 의 안정 조건은, July의 안정도 검사(test)로, 다음과 같이 주어진다.

$$0 < r < 1, \quad -1 < a[n] < 1 \quad (15)$$

식 (9)의 크기 $|H_B(\Omega)|$ 는, 극의 반경 $r=0.9$, 적응 계수 $a[n]$ 을 -0.9 부터 0.9 까지 스텝(step) 0.1 로 가변 시켰을 때, 0 에서 π 까지 주파수 Ω 의 특성 곡선은 그림 1과 같다.

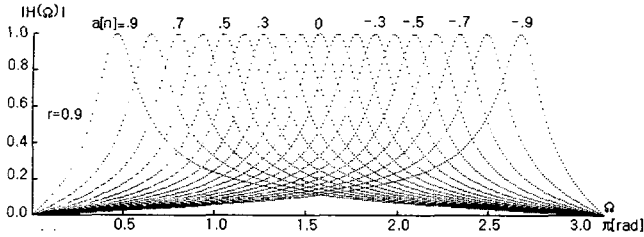


그림 3. 식 (9)의 크기 $|H(\Omega)|$ 스펙트럼

식 (10)에서, $-1 < \cos \Omega_0 < 1$ 임으로, 적응 계수 $a[n]$ 의 범위는, 근사적으로, 다음과 같다.

$r=0.5$ 일 때, $-1.25 < a[n] < 1.25$ ($a[n]$ 의 동적 범위=2.50),

$r=0.7$ 일 때, $-1.06 < a[n] < 1.06$ ($a[n]$ 의 동적 범위=2.12),

$r=0.9$ 일 때, $-1.00 < a[n] < 1.00$ ($a[n]$ 의 동적 범위=2.01).

여기서, $a[n]$ 의 동작 범위는 식 (15)에서, $-1 < a[n] < 1$ 임으로 2로 제한된다. 즉, r 이 작아지면, 선형 중앙($\pi/2$) 주파수 영역에서는 조밀하고, 저·고주파 영역은 느슨하다.

식 (10)의 적응 계수 $a[n]$ 과 중심 각 주파수 Ω_0 과의 관계는, 극의 반경 r 을 $0.5, 0.7$, 그리고 0.9 로, 안정 범위 $-1 < a[n] < 1$ 에서, 가변 시켰을 때, 그림 2와 같다.

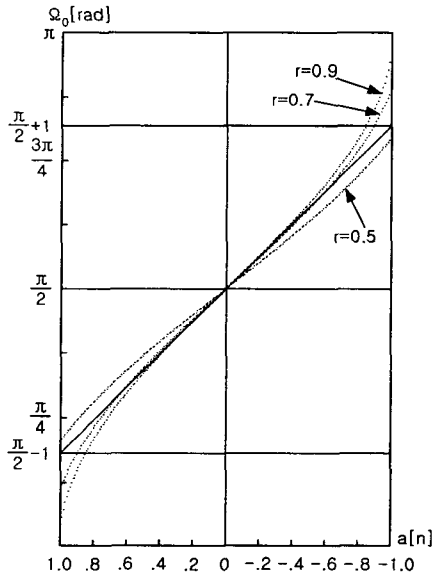


그림 4. $a[n]$ 과 Ω_0 의 관계

식 (11)의 극의 반경 r 과 적응 계수 $a[n]$ 의 안정 조건은,

$$0 < r < 1, \quad 0 < a[n] < 2. \quad (16)$$

식 (11)의 크기 $H_B(\Omega)$ 의 스펙트럼은 극의 반경 $r=0.9$, 적응 계수 $a[n]$ 을 0.1 부터 1.9 까지 스텝 0.1 때, Ω 를 0 에서 π 까지 변경시킬 때, 그림 3과 같다.

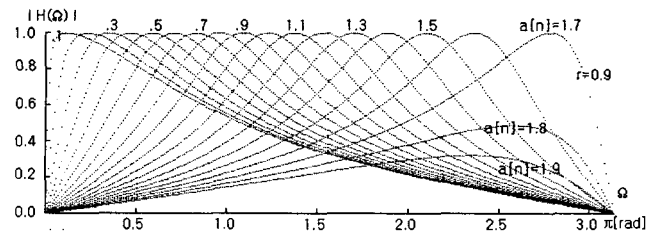


그림 5. 식 (11)의 크기 스펙트럼

식 (12)에서, $-1 < \cos \Omega_0 < 1$ 임으로, 근사적으로,

$r=0.5$ 일 때, $0 < a[n] < 1.58$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 1.58),

$r=0.7$ 일 때, $0 < a[n] < 1.72$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 1.72),

$r=0.9$ 일 때, $0 < a[n] < 1.90$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 1.90).

식 (12)에서, r 이 $0.5, 0.7$, 그리고 0.9 때, $a[n]$ 을 동적 범위 내에서 가변 시켰을 때, Ω_0 과 관계는 그림 4와 같다. 즉, r 이 작아지면, 0 (DC) 주파수 영역부터 비-선형으로 되고, 동적 범위도 좁아진다.

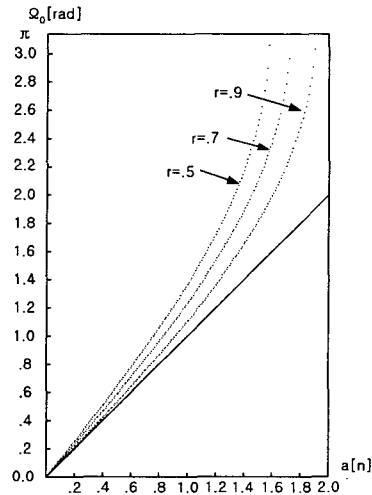


그림 6. $a[n]$ 과 Ω_0 의 관계

식 (13)의 극의 반경 r 과 적응 계수 $a[n]$ 의 안정 조건은,

$$0 < r < 1, \quad -1 < a[n] < 1. \quad (17)$$

식 (9)의 크기 $|H_B(\Omega)|$ 는, 극의 반경 $r=0.9$, 적응 계수 $a[n]$ 을 -0.9 부터 0.9 까지 스텝 0.1 로 변경시킬 때, 스펙트럼은 그림 5와 같다.

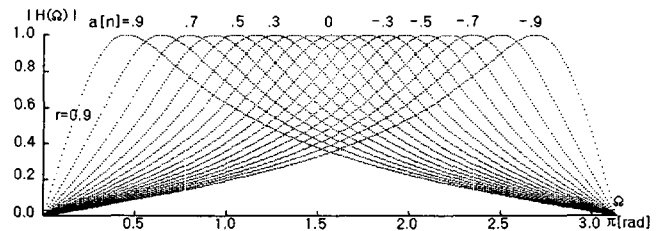


그림 7. 식 (13)의 크기 스펙트럼

식 (14)에서, $-1 < \cos \Omega_0 < 1$ 임으로, 따라서, $a[n]$ 의 동적 범위는, r 과 무관,

$r=0.5, 0.7, 0.9$ 때, $-1 < a[n] < 1$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 모두 2.0).

$a[n]$ 과 Ω_0 의 관계는 그림 6과 같다.

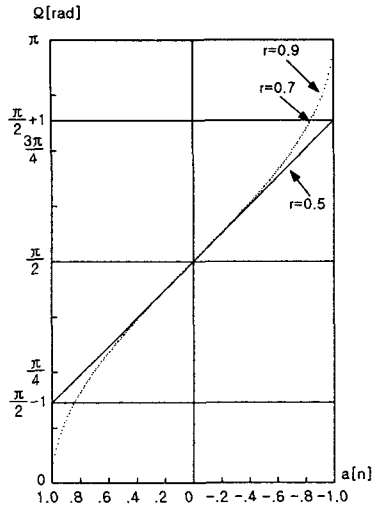


그림 8. a[n]과 Ω₀의 관계

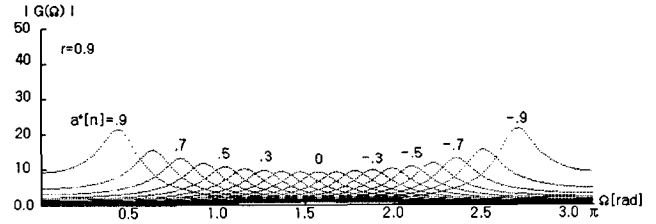


그림 9. 식 (21)의 크기 스펙트럼

식 (22)에서, $-1 < \cos \Omega_0 < 1$ 임으로, 적응 계수의 범위는, $r=0.5$ 일 때, $-0.80 < a[n] < 0.80$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 1.60), $r=0.7$ 일 때, $-0.93 < a[n] < 0.93$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 1.88), $r=0.9$ 일 때, $-0.99 < a[n] < 0.99$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 1.98). 즉, r 이 1에 접근할수록 선형이고 동작 범위는 넓어진다. 식 (21)에서, r 이 0.5, 0.7, 그리고 0.9 때, $a[n]$ 을 동적 범위 내에서 가변 시켰을 때, Ω_0 과의 관계는 그림 8과 같다.

2.4 적응(감도)신호 발생 회로의 설계

적응 파라미터 $a[n]$ 을 갱신시키는 적응 신호 발생 회로를 설계하기 위해, Soderstrand의 식 (9)을 입·출력 차분 방정식으로 표시하면,

$$y[n] = 2ra[n]y[n-1] - r^2y[n-2] + \frac{1-r^2}{2}(x[n] - x[n-2]). \quad (18)$$

$y[n]$ 의 기울기는, 식 (18)을 $a[n]$ 에 대해 편 미분하면,

$$\frac{\partial y[n]}{\partial a[n]} = 2ry[n-1] + 2ra[n] \frac{\partial y[n-1]}{\partial a[n]} - r^2 \frac{\partial y[n-2]}{\partial a[n]}. \quad (19)$$

식 (19)을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} \phi[n] &= 2ry[n-1] + 2ra[n]\phi[n-1] - r^2\phi[n-2], \\ \phi[n-i] &\approx \frac{\partial y[n-i]}{\partial a[n]}, \quad i=0, 1, 2. \end{aligned} \quad (20)$$

여기서, $\phi[n]$ 을 적응 또는 감도 신호라 한다. 대역 통과 필터의 출력 $y[n]$ 을 입력으로 하는, 적응 신호 발생 회로의 전달 함수는 다음과 같이 주어진다.

$$G(z) = \frac{\Phi(z)}{Y(z)} = \frac{2rz^{-1}}{1 - 2ra[n]z^{-1} + r^2z^{-2}} \quad (21)$$

여기서, $\Phi(z)$ 와 $Y(z)$ 는 $\phi[n]$ 과 $y[n]$ 의 z 변환이다.

식 (21)에서, 적응 계수 $a[n]$ 과 극의 반경 r 그리고 중심 각 주파수 Ω_0 과의 관계는, 크기를 미분하고 0으로 두면,

$$\Omega_0 = \cos^{-1} \left(\frac{1+r^2}{2r} a[n] \right). \quad (22)$$

식 (21)의 안정 조건은, 분모가 식 (9)과 같으므로, 식 (15)과 같다.

식 (21)의 크기 $|G(\Omega)|$ 는, 극의 반경, $r=0.9$, 적응 계수 $a[n]$ 을 -0.9부터 0.9까지 스텝 0.1 때, Ω 의 0에서 π 까지 스펙트럼은 그림 7과 같다.

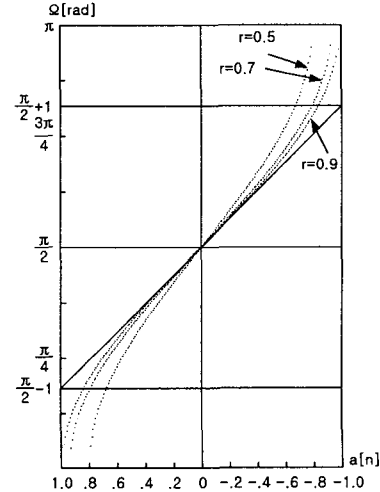


그림 10. a[n]과 Ω₀

식 (11)에 대응하는 적응 신호 발생 회로의 전달 함수는,

$$G(z) = \frac{\Phi(z)}{Y(z)} = \frac{-2a[n]z^{-1}}{1 - (1+r^2) \left(1 - \frac{a^2[n]}{1+r^2} \right) z^{-1} + r^2z^{-2}}. \quad (23)$$

식 (23)에서, 적응 계수 $a[n]$ 과 극의 반경 r 그리고 중심 각 주파수 Ω_0 과의 관계는,

$$\Omega_0 = \cos^{-1} \left(\frac{1+r^2}{2r} \left(1 - \frac{a^2[n]}{1+r^2} \right) \right). \quad (24)$$

안정 조건은, 분모가 식 (11)과 같으므로, 식 (16)과 같다. 식 (23)의 크기 $|G(\Omega)|$ 는, 극의 반경, $r=0.9$, 적응 계수 $a[n]$ 을 0.1부터 1.9까지 스텝 0.1 때, Ω 의 0에서 π 까지 스펙트럼은 그림 9와 같다.

식 (24)에서, $-1 < \cos \Omega_0 < 1$ 임으로, 적응 계수의 범위는, 근사적으로, 다음과 같이 주어진다.

$r=0.5$ 일 때, $0.67 < a[n] < 1.43$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 0.76),
 $r=0.7$ 일 때, $0.41 < a[n] < 1.67$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 1.26),
 $r=0.9$ 일 때, $0.10 < a[n] < 1.89$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 1.79).

즉, r 이 1에서 멀어질수록, 급격하게 비 선형으로 되고 동작 범위도 좁아진다.

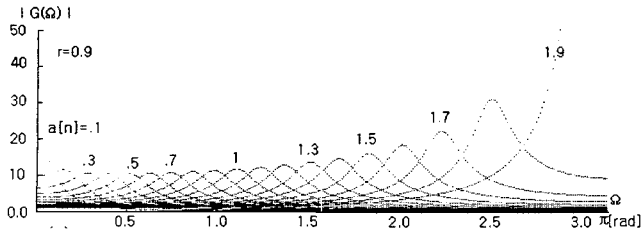


그림 11. 식 (21)의 크기 스펙트럼

식 (24)에서, $r=0.5, 0.7$, 그리고 0.9 때, $a[n]$ 을 동적 범위 내에서 가변 시켰을 때, Ω_0 의 관계는 그림 10과 같다.

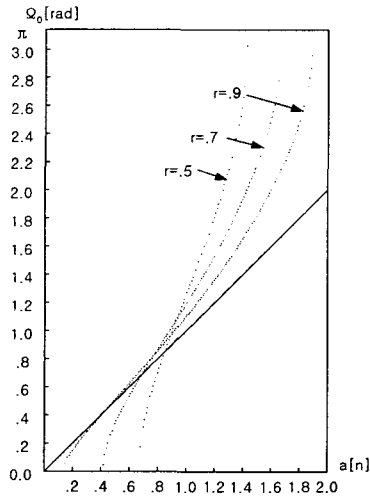


그림 12. $a[n]$ 과 Ω_0 의 관계

식 (13)에 대응하는 적응 신호 발생 회로의 전달 함수는,

$$G(z) = \frac{\Phi(z)}{Y(z)} = \frac{(1+r^2)z^{-1}}{1-(1+r^2)a[n]z^{-1}+r^2z^{-2}} \quad (25)$$

여기서, $\Phi(z)$ 와 $Y(z)$ 는 $\phi[n]$ 과 $y[n]$ 의 z 변환이다.

식 (25)에서, 적응 계수 $a[n]$ 과 극의 반경 r 그리고 중심 각 주파수 Ω_0 과의 관계는, 크기를 미분하고 0으로 두면,

$$\Omega_0 = \cos^{-1}\left(\frac{1+r^2}{2r}\right)a[n] \quad (26)$$

식 (25)의 안정 조건은, 분모가 식 (13)과 같으므로, 식 (17)과 같다.

식 (25)의 크기 $|G(\Omega)|$ 는, 극의 반경, r 이 0.9 , 적응 계수 $a[n]$ 이 -0.9 부터 0.9 까지 스텝 0.1 때, Ω 의 0 에서 π 까지 주파수 스펙트럼은 그림 11과 같다.

식 (26)에서, $-1 < \cos \Omega_0 < 1$ 임으로, 적응 계수의 범위는, 근사적으로, 다음과 같이 주어진다.

$r=0.5$ 일 때, $-0.64 < a[n] < 0.64$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 1.28),

$r=0.7$ 일 때, $-0.88 < a[n] < 0.88$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 1.76),

$r=0.9$ 일 때, $-0.98 < a[n] < 0.98$ ($a[n]$ 의 동적 범위는 1.97).

즉, r 이 1에 접근할수록 선형이고 동작 범위도 넓어진다.

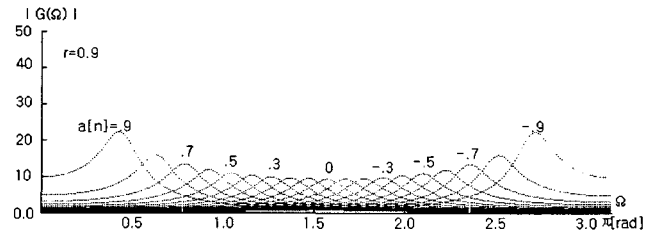


그림 13. 식 (25)의 크기 스펙트럼

식 (26)에서, $r=0.5, 0.7$, 그리고 0.9 때, $a[n]$ 을 동적 범위 내에서 가변 시켰을 때, Ω_0 의 관계는 그림 12와 같다.

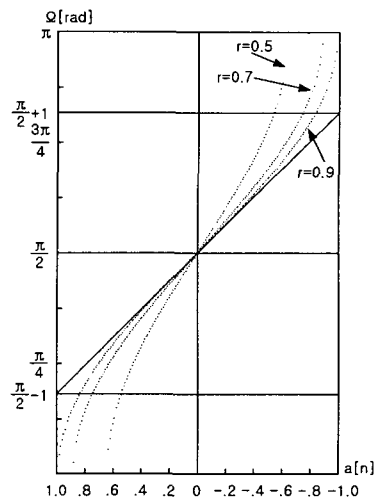


그림 14. $a[n]$ 과 Ω_0 의 관계

III. 결론

적응 계수의 동적 범위와 선형 영역은 극의 반경이 1에 접근할수록 넓어진다. 적응 계수와 극의 각 또는 중심 주파수의 관계가 정현(sin)으로 주어지면, 선형 영역이, 0(DC) 근방, 여현(cos)으로 주어지면 중앙($\pi/2$)의 주파수 영역이 선형이다.

참고 문헌

- [1] M. A. Soderstrand et al. "Elimination of narrow-band interference in BPSK-modulated signal reception," in Proc. IEEE Trans. Circuits Syst., Singapore, pp. 2798-2801, June 1986.
- [2] K. W. Martin and M. T. Sun, "Adaptive filters suitable for real-time spectral analysis," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-33, pp. 218-229, Feb. 1986.
- [3] S. Nishimura, J. K. Kim, and K. Hirano, "Mean-squared error analysis of an adaptive notch filter," IEEE, Int. Symp. C'ct Syst. p. 732-735 May 1989.