

## 멀티웨이브렛 필터뱅크의 구조 분석

### Analysis of the multiwavelet filter bank architecture

허 응, 최재호, 박태윤, 이철수

Ung Heo, Jae-Ho Choi, Tae-Yoon Park, Cheol-Soo Lee  
전북대학교 컴퓨터공학과 미디어통신 연구실(heo\_ung@daum.net)

#### 요약

본 논문에서는 여러 개의 기저함수를 갖는 멀티웨이브렛 필터 뱅크의 구조를 분석한다. 멀티웨이브렛 기저함수로 이루어진 필터뱅크는 매트릭스 형태의 값을 갖는다. 멀티웨이브렛은 직교성, 대칭성, 그리고 짧은 구간응답을 동시적으로 제공할 수 있어 기존의 단일 웨이브렛 보다 신호의 분석 및 압축 처리 측면에서 우수한 성능을 얻을 수 있다. 또한 멀티웨이브렛은 스칼라 웨이브렛과 다르게 필터뱅크의 입력 열을 두개 또는 그 이상을 가질 수 있다. 본 논문은 이러한 멀티웨이브렛 필터뱅크의 입력 열을 얻는 방법과 실제적인 데이터가 어떻게 적용되는지를 보인다.

#### ABSTRACT

In this paper, we have analyzed a multiwavelet filter bank architecture which have several bases. The filter bank composed of multiwavelets bases is matrix-valued. Multiwavelets offer simultaneous orthogonality, symmetry, and short support, which is not possible for the scalar wavelet system, hence multiwavelet system can obtain excellent performance in signal analysis and compress. Also the multiwavelet differs from the scalar wavelet system in requiring two or more input streams to the multiwavelet filter bank. In this paper, we describe methods for obtaining such a input stream and how apply the actual data.

#### I. 서론

웨이브렛은 이미지 압축이나 노이즈 제거에 탁월한 성능을 가지고 있어 신호 처리 분야에 유용한 도구로 사용되어져 왔다. 이 스칼라 웨이브렛은 하나의 스케일링 함수를 가지고 있는 반면에 최근에 연구 되어 지고 있는 멀티 웨이브렛은 하나의 함수를 표현하기 위해서 여러개의 모 웨이브렛 함수가 사용되어진다.[1] 이러한 멀티웨이브렛은 짧은 임펄스 응답, 직교성, 대칭성, 고차근접성과 같은 특성을 함께 제공할 뿐만 아니라 경계부분에서 좋은 성능을 가진다.[5] 그러므로 멀티 웨이브렛은 이미지 압축이나 노이즈 제거측면에서 스칼라웨이브렛 보다 훨씬 더 우수한 성능을 제공한다.

본 논문에서는 우선 멀티웨이브렛의 기저함수를 설명하기 위해 다 해상도분석에 대해 살펴보고 두 번째로 멀티웨이브렛이 사용된 다중필터뱅크의 구조에 대해 설명하며 세 번째로 다중필터의 입력을 위한 전처리필터와 이를 다시 재구성하기 위한 후처리필터에 대해 그리고 마지막으로 가상의 입력 값을 가지고 멀티웨이브렛의 필터뱅크 분해와 재구성을 통해 멀티웨이브렛 전체 시스템이 어떻게 작동하는지 분석한다.

#### II. 여러 개의 스케일링 함수를 가진 멀티웨이브렛

스칼라 웨이브렛과 마찬가지로 멀티웨이브렛 또한 다 해상도 분석을 기반으로 하는 이론이다. 다른 점이 있다면 멀티웨이브렛은 여러 개의 스케일링 함수를 갖는다. 일반적인 다 해상도는 하나의 스케일링 함수  $\phi(t)$ 와 하나의 웨이브렛 함수  $w(t)$ 를 갖고 다음과 같은 특성이 있다.

-시간 이동된  $\phi(t-k)$ 는 서로 독립적이며 부분 공간(subspace)  $V_0$ 의 기저함수를 만든다.

-확장되고 시간 이동된  $\phi(2^j t - k)$ 는 부분 공간  $V_j, j \in Z$ 의 하나의 기저함수를 만들고 아래와 같은 관계를 갖는다.

$$L \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset L \subset V_j \subset L$$

$$\bigcup_{-\infty}^{\infty} V_j = L^2(R) \quad , \quad \bigcap_{-\infty}^{\infty} V_j = \{0\} \quad (1)$$

-하나의 웨이브렛  $w(t)$ 가 있고, 이것의 시간 이동된  $w(t-k)$ 는 서로 독립적이며 부분 공간  $w_0$ 의 기저 함수를 만든다. 이것은  $V_1$ 에 대한 부분 공간으로 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$V_1 = V_0 + W_0 \quad (2)$$

멀티 웨이브렛을 위한 MRA의 개념은  $V_1$  를 위한 기저함수가  $N$ 개의 스케일링 함수  $\phi_1(t-k), \phi_2(t-k), \dots, \phi_N(t-k)$ 로 만들어진다는 것을 제외하고는 같다. 이 스케일링 함수의 벡터 표현은  $\Phi(t) = [\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)]^T$  이며 아래의 행렬확장방정식은 스칼라 웨이브렛 시스템과 유사한 형태를 가지고 있다.

$$\Phi(t) = \sum_k C[k]\Phi(2t-k) \quad (3)$$

여기서 계수  $H[k]$ 는 스칼라가 아닌  $N \times N$  행렬이다. 이러한 스케일링 함수와 관련된  $N$ 개의 웨이브렛은  $w_1(t), \dots, w_N(t)$ 이며 아래의 행렬웨이브렛방정식을 만족한다.

$$W(t) = \sum_k D[k]\Phi(2t-k) \quad (4)$$

스케일링 함수와 같이  $W(t) = [w_1(t), \dots, w_N(t)]^T$  벡터 표현이며 계수  $G[k]$  또한  $N \times N$  행렬로 이루어져 있다. 예를 들어 멀티웨이브렛에서는 Geronimo, Hardin, Massopust-GHM가 만든 두개의 스케일링 함수  $\phi_1(t), \phi_2(t)$ 과 두개의 웨이브렛 함수  $w_1(t), w_2(t)$ 를 가지고 있으며 그림 1과 2에 나타냈다. GHM 멀티웨이브렛 시스템은 아래와 같은 행렬확장방정식과 행렬웨이브렛방정식으로 나타낼 수 있으며  $H[k]$ 와  $G[k]$ 는 각각  $2 \times 2$  행렬로 이루어져 있다.

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = C[0]\Phi(2t) + C[1]\Phi(2t-1) + C[2]\Phi(2t-2) + C[3]\Phi(2t-3) \quad (5)$$

$$C[0] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} \\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}, \quad C[1] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$C[2] = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}, \quad C[3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$W(t) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = D[0]\Phi(2t) + D[1]\Phi(2t-1) + D[2]\Phi(2t-2) + D[3]\Phi(2t-3) \quad (7)$$

$$D[0] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -3 \\ 1 & 3\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad D[1] = \begin{bmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & -10 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D[2] = \begin{bmatrix} \frac{9}{\sqrt{2}} & -3 \\ 9 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D[3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

figure 1 : Geronimo-Hardin-Massopust 의 스케일링 함수  
figure 2 : Geronimo-Hardin-Massopust 의 멀티웨이브렛

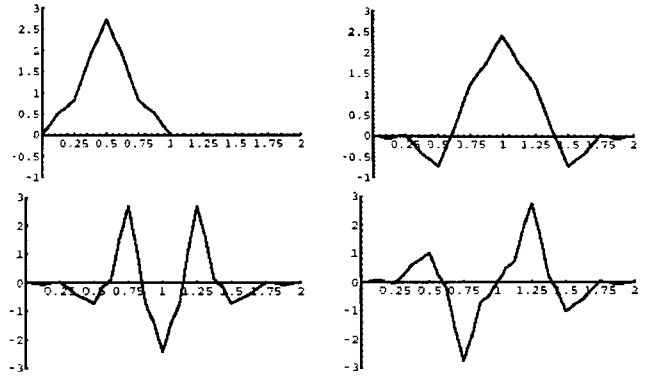


그림 1에서 살펴볼 수 있듯이 GHM 스케일링 함수는 각각  $[0,1]$ 과  $[0,2]$ 의 짧은 임펄스 응답을 가지며 대칭적인 모양과 함께 시간 이동된 스케일링 함수 들은 서로 직교한다. 또한 그림 2에서 GHM 웨이브렛 함수는 좌우 대칭/상하대칭의 모양을 가지며 각각  $[0,2]$ 의 짧은 임펄스 응답을 갖는다. 이에 비하여 4개의 스칼라 계수 값을 가지고 있는 다우비치  $D_4$  스칼라 웨이브렛 시스템과 그 외의 단일 웨이브렛 시스템은 비대칭적인 모양과 함께 비교적 긴 임펄스 응답들을 가지고 있다.

### III. 멀티웨이브렛과 다중필터뱅크

멀티웨이브렛 시스템은 행렬 값을 갖는 다중필터뱅크 (multirate filter bank)를 갖는다.[1] 식(6)과 (8)에서와 같이  $H[k]$ 와  $G[k]$ 는  $2 \times 2$ 계수 행렬로 표현되고 이들은 각각 저대역 통과 필터와 고대역 통과 필터를 나타낸다.

2 채널  $2 \times 2$  행렬 필터뱅크는 두개의 입력 데이터 열을 가지고 이 입력 데이터는  $H$ 와  $G$ 에 의하여 필터링 되어진 후 4개의 데이터 열로 출력되고 2 만큼 다운샘플링 된다. 이러한 2채널 멀티웨이브렛 필터뱅크분해를 그림 3에서 보이고 있다. 식(8)에서 주어진 저대역 필터  $H[k]$ 에서  $H_{0,0}[k]$ 와  $H_{1,0}[k]$ 는 첫 번째 입력 데이터  $c_{1,n}^{(0)}$ 에 그리고  $H_{0,1}[k]$ 와  $H_{1,1}[k]$ 은 두 번째 입력 데이터  $c_{2,n}^{(0)}$ 에 각각 곱하여 진다. 또한 저대역 통과 필터와 마찬가지로 고대역 통과 필터  $G[k]$ 에서  $G_{0,0}[k]$ 와  $G_{1,0}[k]$ 는 첫 번째 입력  $c_{1,n}^{(0)}$ 에  $G_{0,01}[k]$ 와  $G_{1,1}[k]$ 은  $c_{2,n}^{(0)}$ 에 대해 각각 곱해 진다. 이러한 행렬로 이루어진 필터계수 행렬들은 아래와 같은 직교성 조건을 만족한다.[6]

$$\sum_{k=0}^{N-1} H[k]H[k-2l]^T = 2\delta_{0,l}I \quad (9)$$

시간영역에서 필터링과 다운 샘플 되는 과정을 동시에 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.



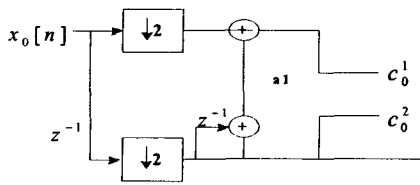


Figure 5 : Prefilter Q의 내부 구조

$$c_{1,n} = \frac{\phi_2(1)x[2n+1] - \phi_2(1/2)(x[2n+2] + x[2n])}{\phi_2(1)\phi_2(1/2)}$$

$$c_{2,n} = \frac{x[2n+2]}{\phi_2(1)} \tag{17}$$

식(17)로 부터 구해진 계수 값들은 멀티필터 통과 후 다음 레벨의 계수 값들을 만들어낸다. 그림 3,4는 멀티웨이브렛의 분해와 합성을 보여주고 있다.

V. 실험 및 고찰

임의의 값을 가지고 분해 과정과 합성과정을 살펴보면 다음과 같다. 다음과 같다.

$$x_o[n] = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ M \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ M \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ M \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(4) \\ M \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} x(-1) \\ x(1) \\ x(3) \\ M \end{bmatrix} \tag{18}$$

전처리필터 통과후  $x[n]$ 은 식(17)에 의해  $c_{1,n}^{(0)}, c_{2,n}^{(0)}$ 을 얻는다. 편의상 아래와 같이  $c_{1,n}^{(0)}$ 은  $m, c_{2,n}^{(0)}$ 는  $n$ 의 인덱스로 표시한다.

$$c_o = [m_o; n_o], L, c_n = [m_n; n_n] \tag{19}$$

식(19)는 아래의 멀티필터의 입력 값이 된다. 고대역 필터도 동일하게 구성할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} C_{, [0]} \\ C_{, [1]} \\ C_{, [2]} \\ C_{, [3]} \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & & & & & & \\ & H[3] & H[2] & H[1] & H[0] & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & H[3] & H[2] & H[1] & H[0] \\ & & & & & & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_o[0] \\ C_o[1] \\ C_o[2] \\ C_o[3] \\ M \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$c_{-1} = [3/10 * m_2 + 3/10 * m_3 + 2/5 * 2^{(1/2)} * n_3, -1/40 * 2^{(1/2)} * m_0 + 9/40 * 2^{(1/2)} * m_1 - 3/20 * n_1 + 9/40 * 2^{(1/2)} * m_2 + 1/2 * n_2 - 1/40 * 2^{(1/2)} * m_3 - 3/20 * n_3]$$

$$d_{-1} = [-1/40 * 2^{(1/2)} * m_0 + 9/40 * 2^{(1/2)} * m_1 - 3/20 * n_1 + 9/40 * 2^{(1/2)} * m_2 - 1/2 * n_2 - 1/40 * 2^{(1/2)} * m_3 - 3/20 * n_3, 1/20 * m_0 - 9/20 * m_1 + 3/20 * 2^{(1/2)} * n_1 + 9/20 * m_2 - 1/20 * m_3 - 3/20 * 2^{(1/2)} * n_3]$$

이 값은 분해필터와 입력값의 계산된 결과이며 일부만 나타내었다.

이렇게 구해진 출력 값들은 다음 레벨의 입력 값이 된다. 각 레벨의 단계에서 후처리 필터를 사용하면 그 레벨에서 분해된 신호의 상태를 확인할 수 있다. 분해된 신호를 재구성하기 위해서 합성 멀티 필터를 사용한다. 본 논문에서 합성필터는 분해필터 직교 필터를 사용하였다.

$$H_m(z) = \begin{bmatrix} H(Z) & H(-Z) \\ G(Z) & G(-Z) \end{bmatrix}$$

$$H_m(z)H_m^*(z) = cI_2, \tag{21}$$

분해필터의 저대역과 고대역의 출력 값들은 업 샘플링 되어진후 각각의 대역에 해당하는 합성필터에 입력되어진다. 합성필터를 통해 출력된 값들은 서로 더해지며 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\text{합성필터 통과후 출력값 } y = \frac{1}{2}m_n, \frac{1}{2}n_n$$

여기에 상수 2가 곱해지고 후처리 필터를 적용하면 원래의 신호 값인  $x[n]$ 을 복원할 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 여러개의 기저 함수를 갖는 멀티웨이브렛 필터뱅크의 구조에 대해 분석 했다. 또한 전처리 필터를 통해 멀티웨이브렛 필터뱅크의 입력 열을 구현했으며 실제적인 임의의 값을 사용하여 완벽하게 원래의 값을 복원할 수 있음을 보았다. 향후 전처리 필터와 후처리 필터에 관한 연구가 필요하며 성능이 좋은 전,후처리 필터가 고안된다면 멀티웨이브렛은 신호처리나 영상압축에 있어 탁월한 성능을 줄 것으로 사료된다.

참고문헌

- [1] V. M.Gadre and R. K. Patney, "Vector multirate filtering and matrix filter bank," *Proc. IEEE ISCAS*, San Diego, 1992.
- [2] J. Geronimo, D. Hardin, and P. R. Massopust, "Fractal functions and wavelet expansions based on several function," *J.Approx. Theory*, vol. 78, pp.373-401, 1994.
- [3] R. A. Gropinath, J. E. Odegard, and C. S. Burrus, "Optimal wavelet representation of signals and the wavelet sampling theorem," *IEEE Trans. on Circ. and Sys. II*, vol.41, pp. 262-277, 1994.
- [4] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelet and Filter Banks*, Wellesley, MA:Wellesley-Cambridge Press, 1995.
- [5] G. Strang and V. Strela, "Short wavelets and matrix dilation equations," *IEEE Trans. on SP*, vol. 43, pp. 108-115, 1995.
- [6] V. Strela, P. N. Heller, G. Strang, P. Topiwala, and C. Heil, "The application of multiwavelet filter banks to image processing," *IEEE Trans. on Image Processing*.