부분 극배치 기법

김성열, 김진용, 이정국,이금원
관동대학교 정보기술공학부(E_mail : kwlee@kwandong.ac.kr)

A Partial Pole Placement Method.

Jin Yong Kim, Seung Youal Kim, Keum Won Lee and Jun Mo Lee
Devision of Information Technologies Eng., Kwandong University

Abstract

Pole placement method is widly used in controller design. For the stabilitiy of the closed loop system, user-specified desired locations including extra pole locations in the s-plane is chosen and by some procedure, feedback gain is obtained.

In this paper, only desired pole location is used, and the caculation process is done for attaining linear quadratic stability. Similariy tranformation is used for this. By computer simulations using MATLAB, the effectiveness is shown.

Keywords : pole placement, feedback gain, similarity transformation,

I. 서론

최적의 LQ(linear Quadratic) 제어 이론은 가중치를 부가한 피드백 속성이다. 이때 가중치는 매개변수로 생각되는 피드백 시스템을 설계하기에 그 표준이 되는 도구 중의 하나이다. 보통 이런 경우에 우리는 시스템에 부여된 가중치를 행렬로써 풀 수가 있다.

참고논문[3, 7, 8]의 최적의 제어에서의 역문제의 결과를 사용함으로써 참고논문[3, 4, 6]는 더 실제적인 ILQ(Inverse linear Quadratic) 설계 방법을 제시했다. 여기서 최적의 제어에 필요한 조건에 의해 최적의 이득, 그리고 피드백 시스템이 최적함에 대한 충분한 조건을 만족시키도록 이 파라메터를 조정한다.

이때 피드백으로부터 얻어진 파라메터 중 몇 개는 시스템의 최적을 나타낸다. 또한 $n-m$ 배열에서의 매개변수는 폐루프 극의 상태에 나타냄에 그 입력 벡터의 차수의 방향을 가리키게 된다. 즉, 참고논문[3, 4, 6]에 제안된 방법의 이점은 폐루프의 $n-m$ 극을 매개변수에 의존하지 않고 정확히 할당한다는 것이다.

본 논문에서는 최적의 파라메터 값의 도출에 있어서 폐루프에서의 좌반면에 $n-m$의 극을 할당하는 것을 연구하고, 아울러 이러한 할당은 전체 폐루프가 안정하도록 이루어 지게 한다.

II. 본론

최적제어

다음 선형시불변시스템을 고려한다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

여기서 상태 $x \in R^n$ 입력 $u \in R^m$ 이다. (A, B)가 가제어이고, 그리고 B는 full column rank를 가진 행렬이다. 일반적으로 최적제어에서는 평가지수가

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru)dt \tag{2}$$

로 한다. $Q \geq 0$와 $R > 0$로 선택하고 이때 최적제어는

$$u = -Kx, \quad K = B^T X \tag{3}$$

여기서 X는 리카치방정식 해법의 최소 양의 준정부호 이다

$$XA + A^T X - XBB^T X + Q = 0 \tag{4}$$

극배치

다음 행렬에 대해 우기약분해를 적용하면[10]

$$(sI - A)^{-1} B = P(s) M(s)^{-1} \tag{5}$$

한편 (3)식의 귀환에 의한 페루프에 대한 우기약분해는

$$(sI - A + BK)^{-1} B = P(s)(M(s) + KP(s))^{-1} \tag{6}$$

와 같다. 또 (6)식의 우변의 일부 행렬은

$$M(s)+KP(s)=(sI+\Phi)E(s) \tag{7}$$

와 같이 두고, $E(s)$는 상수행렬로서 LQ최적성 및 부분극 할당에 사용된다. 만약 식 (7)이 식(5)의 요소를 가지고 있다면

$$E(s)=LP(s) \tag{8}$$

이고 $LB=I$이다. 여기서 $M(s)^{-1}$에 의해 식 (7)은

$$(sI+\Phi)E(s)M(s)^{-1}=I+K(sI-A)^{-1}B \tag{9}$$

가 되고, 이식에 한을 취하고 정리하면

$$sE(s)M(s)^{-1}\rightarrow I \quad (s\rightarrow\infty) \tag{10}$$

이식을 보면 $E(s)M(s)^{-1}$이 strictly proper 라는 것을 알 수 있다. 한편 이를 만족시키는 L을 구하기 위해서는 (5)와 (8)식으로부터

$$\begin{aligned} sE(s)M(s)^{-1}&=sL(sI-A)^{-1}B \\ &=LB+LA(sI-A)^{-1}B \end{aligned} \tag{11}$$

라고 둘 수 있다. 또한 $LB=I$이고 상태피드백 이득 K 가 식 (7), (8)을 만족시킨다면

$$K=LA+\Phi L \tag{12}$$

와 같고 식(5)로부터

$$(sI-A)P(s)=BM(s) \tag{13}$$

가 되고 $LB=I$이기 때문에

$$\begin{aligned} M(s)+KP(s)&=sLP(s)+\Phi LP(s) \\ &=M(s)+(LA+\Phi L)P(s) \end{aligned} \tag{14}$$

한편 폐루프의 극을 구하기 위해서

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

라고 두면, L과 유사변환행렬 T는

$$\begin{aligned} L&=(\ L_1\ \ I\ ) \\ T&=\begin{pmatrix} I & 0 \\ L_1 & I \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

로 둘 수 있고, 식 (12)와 (15)로부터

$$T(A-BK)\ T^{-1}=\begin{pmatrix} A_1-A_2L_1 & A_2 \\ 0 & -\Phi \end{pmatrix} \tag{17}$$

가 된다. 식 (17)을 보면 전체행렬보다는 변환되어 2x2블럭으로 되면서 더 부분극을 설정하기가 쉬워졌다. 즉 m 개의 고유치는 $(A_1-A_2L_1)$에서 얻고, 따라서 L_1값을 얻을 수 있다. 그 나머지는 Φ행렬에서 얻을 수 있다.

LQ Optimality

반환차이행렬을

$$W(s):=I+K(sI-A)^{-1}B \tag{18}$$

와 같이 규정하고

$$W^{\sim}(s)\ W(s)\ >\ I,\ \text{for } all\ s\ =\ j\omega \tag{19}$$

예를 들어, K는 식(19)가 성립한다고 하면 최적값이 된다. 이때 LQ최적성에 관해 [2,7,8]

$$\Phi^T\Phi > \theta(s)\ \text{for } all\ s=j\omega \tag{20}$$

그리고

$$\Phi+D_L \text{ is symmetric} \tag{21}$$

$$\theta(s):=\left[\begin{array}{cc|c} A_L & 0 & B_L \\ -C_L^TC_L & -A_L^T & -S_L^T \\ \hline S_L & b_L^T & R_L \end{array}\right] \tag{22}$$

그리고

$$\begin{pmatrix} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} I & 0 \\ L_1 & I \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} I & 0 \\ -L_1 & I \end{pmatrix},$$

$$S_L:=C_LA_L+D_L^TC_L,$$

$$R_L:=D_L^TD_L+(C_LB_L)^T+C_LB_L$$

한편 식(18)에 식(5)를 대신하고 식(7)을 사용하면,

$$\begin{aligned} W(s)\ &=\ (M(s)+KP(s))M(s)^{-1} \\ &=\ (sI+\Phi)E(s)M(s)^{-1} \end{aligned} \tag{23}$$

그리고, 조건 식(19)는

$$(sI+\Phi)\ (s\,I+\Phi)\ >\ \{M(s)E(s)^{-1}\}\sim\ M(s)E(s)^{-1}$$
$$\forall s\ =\ jw \tag{24}$$

와 같이 쓸 수 있고, 식(11)과 $LB=I$를 참고하면

$$M(s)E(s)^{-1}=s\left[\begin{array}{c|c} A-NLA & B \\ \hline -LA & I \end{array}\right]^{-1}$$
$$=s\left[\begin{array}{c|c} A-BLA & B \\ \hline -LA & I \end{array}\right]=sI-V(s) \tag{25}$$

를 얻을 수 있다. 여기서

$$V(s)\equiv\left[\begin{array}{c|c} A-BLA & (A-BLA)B \\ \hline LA & LAB \end{array}\right] \tag{26}$$

라고 두면 (16)의 유사변환에

$$T(A-NLA)T^{-1}=\begin{pmatrix} A_L & B_L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T(A-BLA)B=\begin{pmatrix} A_L \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_L \\ 0 \end{pmatrix}$$

를 얻으며, 일련의 과정을 거쳐서

$$V(s)=\left[\begin{array}{cc|c} A_L & B_L & B_L \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline C_L & * & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L & D_L \end{array}\right]$$
(27)

가 된다.

III. 설계 과정

우선 식(20)과 식(21)을 만족하는 행열 Φ를 정하여야 한다. 식(20)에 있는 $\theta(s)$ 가 para-Hermite한 행열임을 감안한다. 식(20)에 있는 $(n-m)$개의 극을 $A_1,-A_2L_1$에서 구하고 최소의 실수 α를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\alpha I \geq \theta(s)\ ,\forall\ s\ =\ j\omega \tag{28}$$

이식과 ( )식을 참고로 하면

$$\Phi^T\Phi >\ \alpha I \tag{29}$$

여기서 Φ를 구하기 위해서는 (33)식을 참고로 하여

$$\Phi\ \equiv\ D_T^L\ +\ diag(\ \phi_1,\ldots,\ \phi_m) \tag{30}$$

로 둘 수 있다.

제안1

식 (34)의 함수가 식 (33)을 만족하기 위해서는

$$\phi_i > \alpha\ +\ \|\ D_L\|\ ,i=1,\ldots,m, \tag{31}$$

이 성립하면 된다. 여기서 ‖.‖는 행렬의 최대 특이값으로 표시한다.

증명

식(35)를 가정하고 x값을 $\|x\|=1$로 취하면

$$\|\ \Phi x\|\ \geq\ \|\ diag(\ \phi_1,\ldots,\ \phi_m)x\|\ -\ \|\ D_T^L x\| \tag{32}$$
$$\geq\ (\alpha\ +\ \|\ D_L\|\ =\ \alpha,$$

위 식은 (33)식을 의미한다

IV. 실험 및 시뮬레이션

관심이 있는 시스템은 다음과 같이 2차시스템을 고려한다.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ b\ =\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

예를 들면 -1에 한개의 극을 배치한 다고 하면 본문의 식을 참고로 하면 $L=[1\ 1]$로 선택하면 된다. 이 경우의 변환행렬을 사용한 사용된 행렬은

$$\begin{pmatrix} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{pmatrix}\ =\ TAT^{-1}\ =\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \tag{34}$$

와 같고, 이를 사용하면

$$\theta(s)\ =\ \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ -9 & 1 & 3 \\ \hline -3 & 1 & -2 \end{array}\right]\ =\ \frac{-2s^2-1}{s^2-1}$$
(35)

가 되고 이득의 상한을 구하면 $s=jw$를 대입하여 보면

$$\phi(s) = \leq 1 \quad \forall\ s = j\omega \tag{36}$$

가 되며 따라서 귀환이득은

$$K = [1\ 2] + \varphi*[2\ 1] \tag{37}$$

가 된다. 여기서 ϕ값은 식(31),(36)를 참고하면 2이상이 되는 임의 값, 예들 들면 3을 사용하면 극은 (-1, -3)이 나와서 부분극 (-1)이 잘 배치된 것을 볼 수 있다.

V. 결론

부분 극배치법을 통하여 전체의 극에 대한 설정이 없이 도관심이 있는 극에 대한 배치만 가능하다[1]. 이러한 방법의 단점은 시스템행렬의 모양에 제약이 있다는 것이다. 즉 시스템 행렬 중 B행렬이 [0 I]형태가 되어야 하는 강한 제약조건이 있다. 아울러 3차이상의 시스템의 경우는 관련된 전달함수 의 최대값을 알아야 할 필요가 있다.

본 방법을 통하여는 일종의 자유파라미터를 통하여 해군(solution family)를 얻을 수 있는 장점이 있으나 B행렬의 제약조건을 완화하는 방법에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

[1] 이원섭, 김일환, "차륜형 도립진자의 자세제어", 산업기술연구소 논문집, 제 18권, pp.303-308, (1998)

[2] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, Optimal Control: Linear Quadratic Methods, Prentice Hall, Inc.(1990)

[3] T. Fujii, "A New Approach to the LQ Design from the Viewpoint of the Inverse Regulator Problem," IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-32, No.11, pp.995-1004(1987)

[4] T. Fujii et al. "A Practical Approach to LQ Design and its Application to Engine Control," Proc. 10th IFAC World Congress, Munich(1987)

[5] Misawa, E. A., Arrington, M. S. and Ledgerwood, T. D., "The Totational Inberted pendulum: A Bench-mark System"

[6] T. Fujii and T. Shimomura, "Generalization of ILQ Method for the Design of Optimal Servo-systems," Trans. of the Institute of Systems, Control and Information Eng., Vol. 1, No. 6(1988) (in Japanese)

[7] T. Fujii and M. Narazaki, "A Complete Optimality Condition in the Inverse Problem of Optimal Control," SIAM J. Contr., Vol.22, pp. 327-341(1984)

[8] R.E.Kalman, "When is a Linear Control System Optimal?" Trans. ASME J. Basic Engineering, 86D, pp. 51-60(1964)

[9] W. A. Wolovich, Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag, New York(1974)

[10] K. Sugimoto and A. Inoue, "A Polynomial Matrix Approach to the ILQ Servo Controller Design," Trans. of the Institute of Systems, Control and Information Eng., Vol. 8, No. 6, pp. 242-248 (1995) (in Japanese), also presented at 1st Asian Control Conference, Vol. 3. pp. 199-202, Tokyo, July (1994)