

계단형 퍼지 이동 슬라이딩 평면을 이용한 비선형 제어

유 병 국, 양 근 호

한려대학교 멀티미디어정보통신공학과

Nonlinear Control using Stepwise Fuzzy Moving Sliding Surface

Byung Kook Yoo, Keun Ho Yang

Dept. of Multimedia, Information & Telecommunication Engineering, Hanlyo University

Abstract

This short paper suggests a control strategy using a stepwise fuzzy moving sliding surface. The moving surface is a Sugeno-type fuzzy system that has the angle of state error vector and the distance from the origin in the phase plane as inputs and a first-order linear differential equation as an output. The surface initially passes arbitrary initial states and subsequently moves towards a predetermined surface via rotating or shifting. the proposed method reduces the reaching and tracking time and improves robustness. The asymptotic stability of the fuzzy sliding surface is proved. The validity of the proposed control scheme is shown in computer simulation for a second-order nonlinear system.

1. 서 론

슬라이딩 모드제어방식[1-4]에서 스위칭 평면에 도달하도록 하는 단계를 도달모드(reaching mode)라 하며 이때는 스위칭 평면을 기준으로 양과 음의 제어입력을 가하게 되며 이로 인해 제어입력에 이산입력을 포함한다. 그리고 스위칭 평면을 따라 원점으로 수렴하는 단계를 슬라이딩 모드(sliding mode)라 한다. 도달모드에서는 불확실성(uncertainty)이나 외란(external disturbance)에 대하여 슬라이딩 모드에서 가지는 강인성을 보장받지 못하기 때문에 단시간 내에 슬라이딩 모드에 도달하도록 해야한다. 그러나 이를 위해서 제어입력을 크게 하면 슬라이딩 모드에서 큰 채터링이 발생되며 특히 시스템의 초기상태와 슬라이딩 평면과 거리가 크면 도달시간이 길어지며 입력이 커지게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 [5-6]에서는 슬라이딩 모드에 구간 연속적인 기법과 일차함수를 이용한 연속적인 이동 슬라이딩 모드를 제안하였으며 [7]에서는 특수한 퍼지 소속함수를 갖는 단일 값 결론 부를 갖는 퍼지논리를 이용한 이동 슬라이딩 모드를 제안하였다. 이는 오차를 고려한 연속적인 형태의 슬라이딩 모드이지만 위상평면에서 오차만을 고려하였으며 이로 인해 상태변수의 위치에 따라 적절한 이동이 어렵고 특히 사용된 퍼지시스템에서 이용된 특정 퍼지 소속함수에 대하여만 안정도가 증명되어있다. [8]에서는 이러한 단점을 보완하고자 오차와 오차의 미분을 이용하여 슬라이딩 평면을 양방향(시계방향, 반 시계방향)으로 회전시키는 방식을 제안하였으나 반 시계방향으로의 회전은 큰 의미가 없고 슬라이딩 모드를 회전시키는 목적, 즉 추적시간(tracking time)을 줄이려 하는 목적에 부합되지 않는다.

본 논문에서는 Sugeno-type 퍼지시스템을 이용하는 퍼지 슬라이딩 평면을 제안하고 이 평면의 안정도를 증

명한다. 이 평면의 동작은, 안정한 영역에서는 도달시간과 추적시간을 줄이기 위해 회전하게 되며 불안정한 영역에서는 강인성을 유지하면서 상태를 안정한 영역으로 보내기 위해 평행이동 한다. 제안된 방식은 상태오차벡터의 크기정보를 이용한 계단형 평면을 이루기 때문에 개념적으로는 슬라이딩 평면이 이산적으로 회전하도록 되어있으나 실제로는 그 슬라이딩 평면이 퍼지시스템이기 때문에 연속적으로 이동하게 된다.

II. 일반적인 고정 슬라이딩 평면 이용방식

다음과 같은 2차 비선형 시스템을 고려하자.

$$\ddot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t) \quad (1)$$

여기서 $f(x)$, $g(x)$ 는 연속함수이며 $u(t)$ 는 제어입력을, $x = [x \ \dot{x}]^T$ 는 상태벡터이며 $f(x)$ 에 대한 추정 가능한 함수를 $\tilde{f}(x)$ 라하고 다음과 같은 조건을 가정한다.

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq F(x) \quad (2)$$

여기서 $F(x)$ 는 알고있는 양의 함수이며 $g(x)$ 에 대한 상한과 하한은 알고 있다고 가정한다.

$$0 < g_{\min} \leq g(x) \leq g_{\max} \quad (3)$$

$g(x)$ 의 추정 \hat{g} 를 다음과 같이 정의한다[3].

$$\hat{g} = (g_{\min}g_{\max})^{1/2} \quad (4)$$

$x_d = [x_d \ \dot{x}_d]^T$ 를 추적하고자 하는 궤적이라 하면 추적오차는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$e = x - x_d = [e \ \dot{e}]^T \quad (5)$$

안정한 슬라이딩모드제어를 위한 $s(e, t)$ 는 다음과 같다.

$$s(e, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) e(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t), \lambda > 0 \quad (6)$$

$s(e, t) = 0$ 시변 평면을 $S(t)$ 라 정의하면, 모든 $t > 0$ 에 대하여 시스템 오차 궤적이 슬라이딩 평면 $S(t)$ 상에 남아있도록 하는 슬라이딩 조건은 다음과 같다.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|, \quad \eta > 0 \quad (7)$$

결국 (6)으로부터

$$\dot{s} = f(x) + g(x)u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} \quad (8)$$

이다. 따라서 제어입력은

$$\begin{aligned} u &= \hat{g}^{-1}(\hat{u} - k \operatorname{sgn}(s)), \\ \hat{u} &= -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e}, \\ \operatorname{sgn}(s) &= \begin{cases} +1 & \text{if } s > 0 \\ -1 & \text{if } s < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

이며 $\beta = (g_{\max}/g_{\min})^{1/2}$ 로 놓고

$$k \geq \beta(F + \eta) + (\beta - 1) |\hat{u}| \quad (11)$$

조건을 만족하도록 k 를 설계하면 제어입력 (9)는 (7)과 같은 슬라이딩 조건을 만족하게 된다.[3]

III. 계단형 퍼지 이동 슬라이딩 평면

1. 퍼지 슬라이딩 평면

(1)과 같은 2차 비선형 시스템에 대한 일반적인 방식에서의 슬라이딩 평면은 (6)과 같다. 이러한 슬라이딩 평면을 적절하게 회전시키기 위해 위상평면상에서 상태오차 벡터가 e 축과 이루는 각도 θ 와 상태오차벡터의 크기 d 를 입력으로 가지는 Sugeno-type 퍼지 시스템으로 설계한다면 l 번째 퍼지 규칙은 다음과 같다.

$$R^l: \text{If } \theta \text{ is } T^l \text{ and } d \text{ is } D^l, \text{ then } s(\underline{e}) = \dot{e} + \lambda_l e \quad (11)$$

여기서 $s(\underline{e})=0$ 은 슬라이딩 평면을 나타내며 T^l 와 D^l 는 l 번째 퍼지규칙에 대한 입력변수 θ 와 d 상에 각각 정의된 퍼지집합이고 θ 와 d 는 다음과 같다($\dot{e}e \leq 0$ 인 경우).

$$\theta = -\tan^{-1}(\dot{e}/e), \quad d = \sqrt{e^2 + \dot{e}^2} \quad (12)$$

또한 각 퍼지 규칙에 대한 λ_l 은 양의 실수로 설정한다면 각 규칙에 의한 슬라이딩 평면은 안정하며 다음과 같은 해를 갖는다.

$$e = \operatorname{EXP}(-\lambda_l t) \quad (13)$$

즉, 각 규칙에 대한 슬라이딩 모드는 $1/\lambda_l$ 을 시정수로 하는 동특성을 가지며 $\lambda_l > 0$ 이므로 점근적 수렴을 보장한다. 이제 (11)과 같은 규칙으로 이루어진 퍼지시스템에서 단일 값 퍼지화 방법을 사용하고 퍼지추론으로 '곱연산'을 사용한다면 다음과 같이 표현되어진다.

$$s(\underline{e}) = \frac{\sum_{i=1}^m [(\mu_{T^i}(\theta) \cdot \mu_{D^i}(d)) \cdot (\dot{e} + \lambda_i e)]}{\sum_{i=1}^m (\mu_{T^i}(\theta) \cdot \mu_{D^i}(d))} \quad (14)$$

여기서 $w^i(\underline{e}) = \frac{\mu_{T^i}(\theta) \cdot \mu_{D^i}(d)}{\sum_{i=1}^m (\mu_{T^i}(\theta) \cdot \mu_{D^i}(d))}$ 로 놓으면

$$s(\underline{e}) = \sum_{i=1}^m w^i(\underline{e}) (\dot{e} + \lambda_i e) \quad (15)$$

로 쓸 수 있다.

정리 1. (15)과 같은 퍼지시스템에서 입력변수 θ 와 d 상에 설정된 각각의 모든 퍼지집합 T^i 와 D^i 을 각 입력변수의 전체집합 $\theta \in U_\theta \subset R$ 와 $d \in U_d \subset R$ 에 대하여 다음 식을 만족하도록 설정하면 (15)에 의해 형성되는 슬라이딩 모드는 항상 안정하다.

$$U_\theta \subseteq \operatorname{supp}(\bigcup_{i=1}^m T^i), \quad U_d \subseteq \operatorname{supp}(\bigcup_{i=1}^m D^i) \quad (16)$$

여기서 $\operatorname{supp}(\cdot)$ 는 퍼지집합에 대한 지지(support)를 나타내며 \bigcup 은 합집합을 나타낸다.

증명. (15)의 w^i 은 각 퍼지 규칙에 대한 점화도(firing rate)이므로 $w^i \in [0, 1]$ 이며 $\sum_{i=1}^m w^i = 1$ 이다. 따라서 (15)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s(\underline{e}) &= (w^1 + w^2 + \dots + w^m) \dot{e} \\ &\quad + (w^1 \lambda_1 + w^2 \lambda_2 + \dots + w^m \lambda_m) e \quad (17) \\ &= \dot{e} + (w^1 \lambda_1 + w^2 \lambda_2 + \dots + w^m \lambda_m) e \end{aligned}$$

여기서 모든 $\lambda_l, l=1, 2, \dots, m$ 은 양의 실수이며 w^i 은 (16)의 조건에 의해서 모두 0인 경우는 없으므로 $w^1 \lambda_1 + w^2 \lambda_2 + \dots + w^m \lambda_m$ 은 양의 실수이다. 즉, $\lambda = w^1 \lambda_1 + w^2 \lambda_2 + \dots + w^m \lambda_m$ 로 놓으면

$$s(\underline{e}) = \dot{e} + \lambda e, \quad \lambda > 0 \quad (18)$$

이때 결국 퍼지시스템에 의해 형성되는 슬라이딩 평면 (15)는 항상 안정하다. Q.E.D.

정리 1을 통해 제안된 퍼지 슬라이딩 평면이 동특성 (13)에 의해 안정함을 알 수 있으며 2장에서와 같은 전체 제어시스템은 안정하다.

2. 퍼지 슬라이딩 평면을 이용한 평면의 회전

먼저 e 와 \dot{e} 로 구성되는 위상 평면에서 초기상태 $e(t=0)$ 와 $\dot{e}(t=0)$ 가 2, 4사분면에 존재할 때 도달모드의 도달시간(reaching time)을 줄이기 위해 이 상태가 슬라이딩 평면상에 존재하도록 슬라이딩 평면을 조절해야 하며 이 평면을 회전시켜 평면의 기울기를 크게 하여 슬라이딩 모드의 추적시간이 줄어들도록 한다. 따라서 슬라이딩 평면의 기울기는 최대 기울기로 설정한 λ_{\max} 로 이동해준다. 그림으로 표현하면 다음 그림 1과 같다.

이러한 회전이 가능하도록 하기 위하여 (15)와 같은 퍼지 시스템의 규칙을 다음과 같이 설정한다. 이것은 $\dot{e}e \leq 0$ 인 경우에 해당된다. 이 때 각 입력변수에 설정된 퍼지집합은 표 1과 같이 각각 6개의 퍼지집합을 사용하며 이 때 Gaussian 형태의 퍼지집합을 사용함으로써 (16)식을 만족하도록 설정한다.

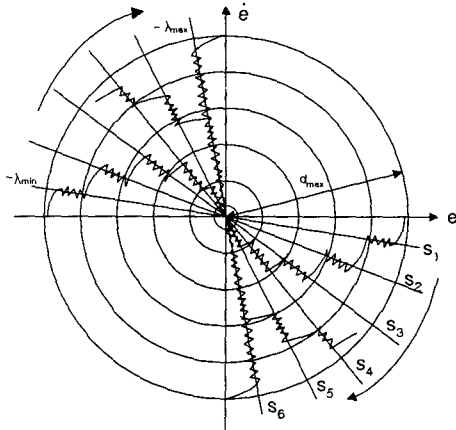


그림 1. 2, 4사분면에 있을 때의 슬라이딩 평면 회전

표 1. 안정한 영역에서의 퍼지 슬라이딩 평면의 회전을 위한 퍼지규칙 테이블

$\frac{d}{\theta}$	ZE	S	MS	M	ML	L
ZE	S ₆	S ₅	S ₄	S ₃	S ₂	S ₁
S	S ₆	S ₆	S ₅	S ₄	S ₃	S ₂
MS	S ₆	S ₆	S ₆	S ₅	S ₄	S ₃
M	S ₆	S ₆	S ₆	S ₆	S ₅	S ₄
ML	S ₆	S ₆	S ₆	S ₆	S ₆	S ₅
L	S ₆	S ₆	S ₆	S ₆	S ₆	S ₆

3. 슬라이딩 평면의 이동

이제 초기상태 $e(t=0)$ 와 $\dot{e}(t=0)$ 가 1, 3사분면에 존재할 때 도달시간을 줄이기 위하여 슬라이딩 평면을 다음과 같이 설정한다.

$$s(e) = \dot{e} + \lambda_{max} e + \epsilon \tag{19}$$

여기서 ϵ 은 위상평면의 \dot{e} 축의 절편이다. 먼저 초기상태가 위상평면의 1, 3사분면에 존재한다면 이 상태가 슬라이딩 평면에 존재하도록 해야하며 이를 위해 ϵ 은 다음과 같이 결정된다.

$$\epsilon = -\dot{e} - \lambda_{max} e \tag{20}$$

이 때 λ_{max} 는 앞절의 가장 큰 기울기 값이며 이것은 위상평면상의 안정한 영역인 2, 4사분면에 도달되도록 하기 위한 것이다. 따라서 이를 통해 상태는 e 축에 통과하여 2 또는 4사분면에 들어오게 되며 앞 절에서와 같이 슬라이딩 평면을 회전시키게 된다. 이를 그림으로 나타내면 그림 4와 같다. 이것은 비록 오차의 크기는 양과 음으로 커지게 되나 상태를 슬라이딩 평면상에 위치시켰기 때문에 강인한 특성을 얻을 수 있기 때문이다[8].

IV. 컴퓨터 시뮬레이션

본 장에서는 계단형 퍼지 이동 슬라이딩 평면을 이용한 제안된 제어전략을 [3]의 예제를 이용하여 컴퓨터 시

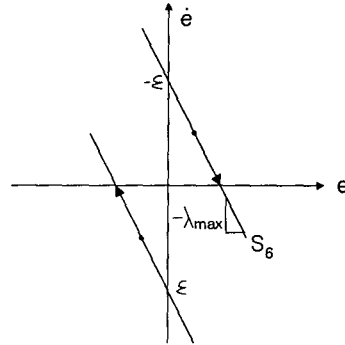


그림 2. 1, 3사분면에서의 슬라이딩 평면의 설계

뮬레이션 결과를 보이며 기존의 고정 슬라이딩 평면을 이용한 방식과의 비교를 통하여 그 타당성을 살펴본다.

$$\ddot{x} + (|\sin(t)| + 2) \dot{x}^2 \cos(3x) = (0.5 \cos(3t) + 1.0)u \tag{21}$$

여기서 $\tilde{y} = -2.0 \dot{x}^2 \cos(3x)$ 로 놓고 $F = 1.0 \dot{x}^2 |\cos(3x)|$ 으로 할 수 있다. 또한 $g_{min} = 0.5$, $g_{max} = 1.5$ 이며 기존의 방식과 제안된 방식의 비교를 위하여 원하는 궤적을 $x_d = 0.0$ 로 설정하였다.

고정 슬라이딩 평면을 사용하는 기존의 방식에 대한 슬라이딩 평면 (6)의 설계에서 $\lambda = 11.0$ 으로, $\eta = 0.1$ 로 하였다. 결국 제어입력은 (9)와 (10)으로부터 다음과 같이 설계된다.

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= -2.0 \dot{x}^2 \cos(3x) \\ F &= 1.0 \dot{x}^2 |\cos(3x)| \\ \hat{u} &= -\tilde{y} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \\ k &= \beta(F + 0.1) + (\beta - 1) |\hat{u}| \\ u &= \hat{g}^{-1}(\hat{u} - k \operatorname{sgn}(s)) \end{aligned} \tag{22}$$

여기서 $\hat{g} = (g_{min} g_{max})^{1/2} = \sqrt{0.75}$ 이며 $\beta = (g_{max} / g_{min})^{1/2} = \sqrt{3}$ 이다. 계단형 퍼지 이동 슬라이딩 평면을 이용하는 방식에서 사용된 파라미터로는 $\lambda_{min} = 0.09$, $\lambda_{max} = 11$ 이며 $\theta_{max} = d_{max} = 1.0$ 이며 퍼지규칙은 표 1과 같이 설정하였고 여기서 각각의 $s_j, j=1, 2, \dots, 6$ 는 다음과 같이 설계하였다. 그리고 이 경우는 (18)과 (22)에 대한 $\lambda = w^1 \lambda_1 + w^2 \lambda_2 + \dots + w^m \lambda_m$ 이다.

$$\begin{aligned} s_1 &= \dot{e} + 0.09e, \quad s_2 = \dot{e} + 0.36e, \quad s_3 = \dot{e} + 0.7e \\ s_4 &= \dot{e} + 1.4e, \quad s_5 = \dot{e} + 2.7e, \quad s_6 = \dot{e} + 11.0e \end{aligned} \tag{23}$$

그림 3, 4는 초기 값이 $(e_0, \dot{e}_0) = (-0.8, 0.2)$ 으로 2사분면에 대한 결과이며 그림 5, 6은 $(e_0, \dot{e}_0) = (0.3, 0.3)$ 으로 1사분면인 경우에 대한 결과를 나타낸다. 그림 5는 기존의 고정 슬라이딩 평면을 이용한 방식(FSS : Fixed Sliding Surface)과 제안된 계단형 퍼지 이동 슬라이딩 평면(SFMSS : Stepwise Fuzzy Moving Sliding Surface)을 이용한 방식을 비교하였다. 그림 4(a)

는 FSS에 대한 제어입력을, 그림 6(b)는 SFMSS에 대한 제어입력을 나타내며 이를 통하여 기존의 FSS방식에 비하여 제안된 SFMSS방식이 빠른 시간 내에 원점으로 수렴되었음을 확인할 수 있다. 이것은 슬라이딩 평면을 기울기가 큰 방향으로 회전을 시킴으로써 도달시간을 줄이고 추적시간(tracking time)을 향상시켰기 때문이다. 슬라이딩 평면의 회전을 퍼지시스템을 이용하여 수행하기 때문에 개념상 계단형의 형태를 취하지만 그 회전이 연속적으로 일어나기 때문에 그림 4(b)와 같이 원점에 수렴하기 전에는 채터링이 발생되지 않는다. 그림 5는 초기상태가 1, 3사분면에 있을 때의 경우이며 III.3절에서의 분석에 대한 결과를 확인할 수 있으며 상태 변위와 수렴속도에는 큰 차이를 보이고 있지 않으나 그림 6의 입력비교를 통해 안정한 영역에 들어올 때 가지 그림 6(b)에서 초기 제어입력에 채터링이 발생되고 있음을 알 수 있다.

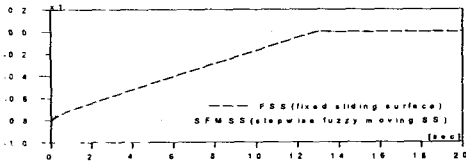
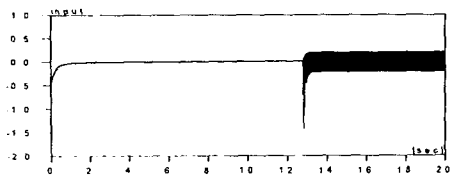
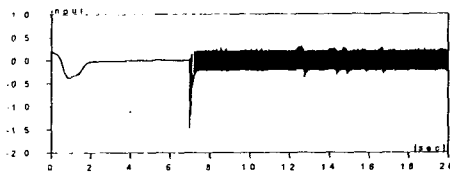


그림 3. FSS($\lambda = 11.0$)와 SFMSS 비교, $(-0.8, 0.2)$



(a) FSS($\lambda = 11.0$)에 의한 제어입력



(b) SFMSS에 의한 제어입력

그림 4. FSS($\lambda = 11.0$)와 SFMSS의 입력, $(-0.8, 0.2)$

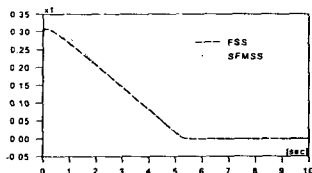
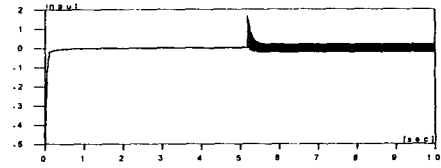


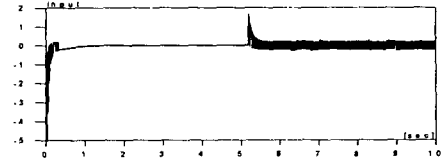
그림 5. FSS($\lambda = 11.0$)와 SFMSS 비교, $(0.3, 0.3)$

V. 결론

본 논문에서는 Sugeno-type 퍼지시스템을 이용하여 퍼지 스위칭 평면을 구성하고 이를 이용한 2차 시스템의



(a) FSS($\lambda = 11.0$)에 의한 제어입력



(b) SFMSS에 의한 제어입력

그림 6. FSS($\lambda = 11.0$)와 SFMSS의 입력, $(0.3, 0.3)$

제어방식을 제안하였다. 이 퍼지 슬라이딩 평면은 위상평면 상에서 그 기울기를 키우는 방향으로 회전하며 이를 통하여 슬라이딩 모드 상에서의 추적시간(tracking time)을 줄이는 방식이다. 개념상으로는 계단형 이동 슬라이딩 평면이나 퍼지시스템을 이용한 퍼지 슬라이딩 평면이기 때문에 슬라이딩 평면이 연속적으로 회전을 하게된다. 제안한 퍼지 슬라이딩 평면의 동특성이 안정함을 증명하였으며 기존의 고정 슬라이딩 평면을 이용한 방식에 비하여 향상된 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

- [1] V. A. Utkin, "Variable structure systems with sliding mode," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-22, No. 2, pp.212-222, Apr. 1977
- [2] V. A. Utkin, "Sliding modes and their applications in variable structure systems," Moscow: Mir, 1978.
- [3] J. J. Slotine and W. Li, "Applied nonlinear control," Prentice Hall, 1991.
- [4] J. Y. Hung, W. Gao and J. C. Hung, "Variable structure control: A survey," IEEE Trans. Industrial Electronics, Vol. 40, No. 1, Feb. 1993.
- [5] S. B. Choi, W. Park and S. Jayasuriya, "A time-varying sliding surface for fast tracking control of second-order uncertain systems," Automatica, Vol. 30, pp.899-904, 1994.
- [6] A. Bartoszewicz, "A comment on 'A time-varying sliding surface for fast and robust tracking control of second-order uncertain systems'," Automatica, Vol. 31, No. 12, pp.1893-1895, 1995.
- [7] Q. P. Ha, D. C. Rye, H. F. Durrant-Whyte, "Fuzzy moving sliding mode control with application to robot manipulators," Automatica, vol. 35, pp.607-616, 1999.
- [8] 전경환, 최봉열, "로봇 매니퓰레이터를 위한 퍼지 이동 슬라이딩 모드제어," 제어·자동화·시스템공학 논문지, Vol. 7, No. 7, pp.597-604, 2001.