

# 웨이블릿 발자국 흔적을 기초로 한 잡음 제거

허 곽, 정원용

경남대학교 정보통신공학과

## Denoising based on Wavelet Footprints

Keol Huh, Won-yong Chong

Information & Telecommunication Engineering, Kyungnam University

### 요약

웨이블릿 변환이 소개된 후, 웨이블릿 임계치 기법이 신호의 잡음제거에 중요한 효과를 가져왔다. 그러나 웨이블릿 임계치 잡음제거 기법 역시 불연속점 주위에서 의사 깃스 현상을 일으키는 단점을 가지고 있다.

본 논문은 웨이블릿 발자국 흔적(Wavelet Footprints) 알고리즘을 소개한다. 웨이블릿의 시간영역에서의 특이점들에 의해 남겨진 흔적이라는 의미를 가지는 발자국 흔적의 새로운 개념을 도입하여 불연속 주위의 의사 깃스 현상을 개선하고자 한다. 제안된 알고리즘은 더 일반적인 신호들로 확장되어지고, 신호의 잡음제거와 같은 문제에 효과적인 해법을 제시 할 수 있다.

### I. 서론

신호 잡음제거의 목적은 신호 획득, 처리시 주변환경과 처리장치 등에서 오염된 신호로부터 원래의 고유신호를 정확히 복원함으로써 이후 신호처리 과정에서 사용되어질 고유 신호의 특징추출을 효과적으로 하는데 있다.

최근 몇 년 동안 백색 가우시안 잡음의 설정 위에서 비선형 기술을 이용하여 신호의 잡음을 제거하는 방법이 소개되었다. 신호처리분야에서 웨이블릿이 소개된 후, 웨이블릿 임계치 잡음제거 기법이 신호의 잡음제거에 효과적임이 증명되었다. 그러나 웨이블릿 임계치 잡음제거기법 역시 불연속점 주위에서 의사 깃스 현상을 일으키는 단점을 가지고 있다. 이러한 단점을 부분적으로 감소시키기 위해 천이 불변 임계치 알고리즘이 제안되었으나 만족할 만큼 의사 깃스 현상을 줄이지 못했다.[1]

국부적인 특성들이 웨이블릿의 고유성이기 때문에 웨이

블릿은 몇 개의 계수들을 가지고도 신호들을 표현 할 수가 있다. 이것은 불연속들을 표현 할 때 부적절한 푸리에 기저와 대조를 이룬다. 스케일 함수와 더불어, 웨이블릿 발자국 흔적은 구간별 다항식 신호는 물론이고, 구간별 부드러운 신호도 잘 근사화 한다.[2]

이 논문에서 웨이블릿 발자국 흔적에 기초로 한 새로운 알고리즘을 소개하고 frame expansion을 사용하지 않더라도 의사 깃스 현상이 제거되어짐을 보여준다.

### II. 웨이블릿 임계치 잡음제거 기법

웨이블릿 변환을 이용하여 잡음을 제거하는 가장 보편적인 방법은 신호를 직교 웨이블릿 기저 함수로 분해하는 강성/연성 임계치 잡음제거이다. 변환된 계수가 강성/연성 임계치 보다 적으면 제거되고, 남은 계수는 역변환 되어 원신호가 복원된다.

구간  $I=[a, b]$ 에서  $(\psi_{j,n})_{j,n \in \Psi}, (\phi_{J,n})_{J,n \in \Theta}$ 을 웨이블릿과 스케일 함수라 두고 원신호  $x$ 에 백색잡음을 더한 잡음신호  $\hat{x} \in L^2(I)$ 는 식 (1)과 같이 표현된다.

$$\hat{x} = \sum_{(j,n) \in \Psi} \langle \hat{x}, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n} + \sum_{(j,n) \in \Theta} \langle \hat{x}, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n} \quad (1)$$

강성 임계치 연산자는

$$\tau(x) = \begin{cases} x & \text{if } |x| \geq \lambda \\ 0 & \text{if } |x| < \lambda \end{cases} \quad \text{이고,}$$

연성 임계치 연산자는

$$\tau(x) = \begin{cases} x - \text{sgn}(x)\lambda & \text{if } |x| \geq \lambda \\ 0 & \text{if } |x| < \lambda \end{cases} \text{이다.}$$

그림 1과 같이 그려진다.

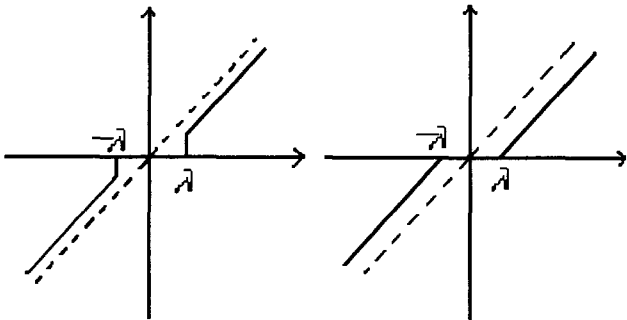


그림 1. 강성/연성 임계치

임계치  $\lambda = \sigma\sqrt{2\log N}$ 으로 정의되고,  $\sigma$ 는 선택되어진 웨이블릿 계수의 표준편차,  $N$ 은 신호의 샘플수를 나타낸다.

임계치 연산자를 사용하여 잡음이 제거된 신호  $x_0$ 는 식 (2)와 같다.

$$x_0 = \sum_{(j,n) \in \psi} \tau(\langle \hat{x}, \psi_{j,n} \rangle) \psi_{j,n} + \sum_{(j,n) \in \emptyset} \langle \hat{x}, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n} \quad (2)$$

연성 임계치 기법은 연산자의 연속성 때문에 웨이블릿 계수 구조가 강성 임계치 기법에 비해 잘 보존되는 장점을 가지고 있어 의사 김스 현상이 감소된다. 그러나 모든 웨이블릿 계수의 값이 작아지고 지역 평균이 보존되지 않아 최대점이 손상되는 단점을 가지고 있다.[3][4]

### III. 발자국 흔적(footprints)

신호의 다항식은 크기 계수들과 그것의 천이에 의해서 확실히 표현되어진다. 영차 모멘트들은 불연속 주위의 많은 non-zero 계수들을 이끌어 낸다. 웨이블릿 계수들의 실례와 불연속을 그림 2에서 나타낸다.

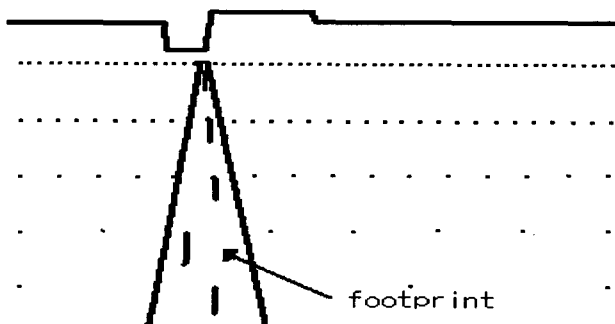


그림 2. 불연속에 위치한 footprints

신호  $x[n]$ 은 고역필터  $y_0[n]$ , 대역통과  $y_1[n], y_2[n], \dots, y_{J-1}[n]$ , 저역필터  $y_J[n]$ 에 대응되는  $y_0[n], y_1[n], \dots, y_J[n]$ 의  $J+1$  시퀀스로 변환된다.

시간 영역 불연속은 subsampling 후에 필터들의 길이  $L-1$ 에 의해 발자국 흔적 (footprints)라 불리는  $J$  사이즈의 응답을 발생한다. 이 발자국 흔적은 불연속의 위치에 의존하고 이 불연속은  $2^J$ 의 발자국 흔적을 가진다. 발자국 흔적은  $\widehat{f}_{p_k}^{(d)}$ 로서 표현하며 식 (3)과 같이 나타낸다.

$$\widehat{f}_{p_k}^{(d)}[n] = \sum_{j=1}^J d_{j,k} \psi_{j,k}[n] \quad (3)$$

여기서  $j, k$ 는 시간영역에서 불연속의 위치이며,  $d$ 는 불연속 주위의 두 가지 다항식 중 최대 차수이다.

고정 위치  $k$ 에서 하나의 불연속을 가지는 구간별 선형 신호를 생각해보자. 그림 3에 4차원 직교 기저 함수를 표시한다.

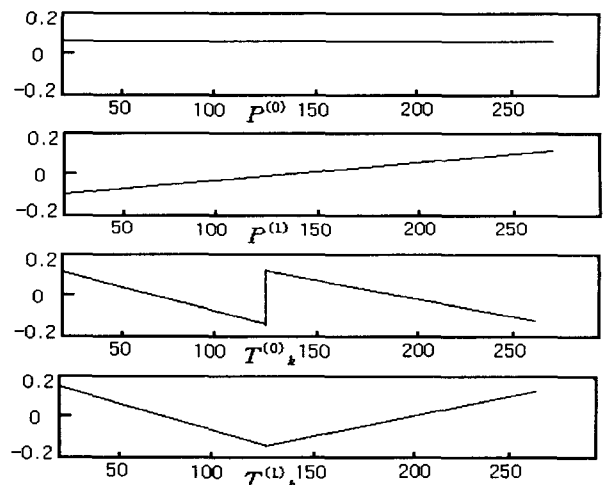


그림 5.  $N=256$ 이며  $k$ 에서 불연속 위치를 가지는 선형 신호의 직교 기저

이 기저 함수는 임의의 신호를 부드러운 부분과 과도 상태 부분으로 두 개의 직교 선형 부분공간으로 분해하는 장점이 있으며 이 두 부분 공간을 부드러운 부분공간 (smooth sub-space)와 과도상태 부분공간(transient sub-space)라고 부르며,

$$\begin{pmatrix} P^{(0)}, P^{(1)} : & \text{smooth subspace} \\ T^{(0)_k}, T^{(1)} : & \text{transient subspace} \end{pmatrix}$$

로 표기한다.

신호  $X$ 의  $J$ 단계 웨이블릿 ( $Y = W \cdot X$ )를 생각하자.

신호  $X: (P^{(0)}, P^{(1)}, T^{(0)_k}, T^{(1)_k})$ 에 대한 기저를 표

현하는 4개의 신호들에 웨이블릿 변환을 실행한다.

여기서  $P^{(0)}, P^{(1)}$ 은 스케일링 함수로써 표현되어지는 반면,  $T^{(0)}_k, T^{(1)}_k$ 은 영이 아닌 웨이블릿 계수이다.

$f_{p_k}^{(0)}$ 와  $f_{p_k}^{(d)}$ 은  $T_k^{(0)}$ 와  $T_k^{(1)}$ 에 의해서 생성되는 발자국 흔적이라 부르고, 단위 직교 형태는  $\widehat{f_{p_k}^{(0)}}$ 와  $\widehat{f_{p_k}^{(1)}}$ 으로 나타낸다.

임의의 불연속을 특성화하기 위해서  $2^J$  쌍의 발자국 흔적이 필요하고 이것을 사전  $D$ 라고 부른다.

$X$ 가 위치  $k_1$ 과  $k_2$ 에서 불연속을 가지고, 충분히 떨어져 있으면 발자국 흔적은 중복되지 않고 직교라고 하며 식 (4)와 같이 표시한다.[2][5]

$$X = W^{-1} \left[ Y_s + \sum_{d=0}^1 \langle Y, \widehat{f_{p_k}^{(d)}} \rangle \widehat{f_{p_k}^{(d)}} + \sum_{d=0}^1 \langle Y, \widehat{f_{p_k}^{(d)}} \rangle \widehat{f_{p_k}^{(d)}} \right] \quad (4)$$

여기서  $Y_s$ 는  $Y$ 의 스케일링 계수이다. 발자국 흔적은 시간영역 기저의 국부적 표현을 제공하므로 직교 기저로서 더 많은 불연속을 가진 신호  $X$ 를 표현 할 수 있다.

최대 차수  $D > 1$ 을 가지는 구간별 다항식 신호로 확장하면, 불연속은  $D+1$  발자국 흔적의 일차 결합으로 설명되어지고, 이 발자국 흔적은 천이불변성이 있으므로 임의의 불연속을 표현하기 위해서는  $(D+1) \cdot 2^J$  발자국 흔적 사전  $D$ 가 필요하다.

본 논문의 잡음 제거 알고리즘은 다음의 같은 순서도를 따른다.

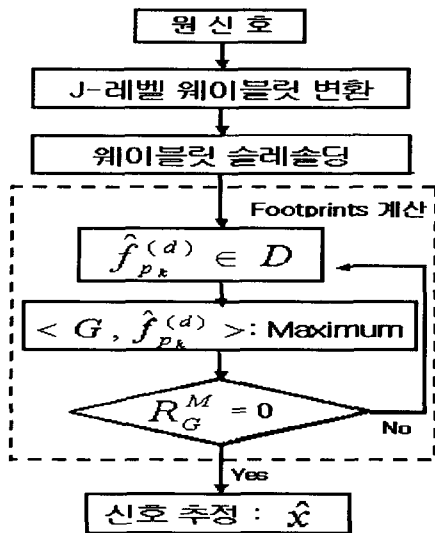


그림 6. footprints 잡음제거 알고리즘 순서도

여기서,

$$R_G^M = G - \sum_{d=0}^D \langle G, \widehat{f_{p_{km}}^{(d)}} \rangle \{ \langle G, \widehat{f_{p_{km}}^{(d)}} \rangle \} \widehat{f_{p_{km}}^{(d)}} \quad (5)$$

$$\widehat{x} = W^{-1} \left[ G_s + \sum_{M=0}^{M-1} \sum_{d=0}^D \langle R_G^M, \widehat{f_{p_{km}}^{(d)}} \rangle \widehat{f_{p_{km}}^{(d)}} \right] \quad (6)$$

이다.  $M$ 은 전체 반복 횟수이고  $R_G^M$ 은  $M$ 번 반복한 후  $G$ 의 스케일링 계수이다.

#### IV. 실험 결과 및 고찰

실험 데이터로 1024개 샘플의 구간별 상수 신호인 Blocks과 선형이지만 한 개의 불연속을 가지는 삼각신호를 사용하였다. 실험의 모든 과정은 Matlab 소프트웨어를 사용하였고, 성능의 척도는 SNR를 사용하였다.

그림 5와 6은 원신호 데이터에 백색 잡음이 첨가된 신호에서 웨이블릿 연성 임계치, 웨이블릿 강성 임계치, 웨이블릿 발자국 흔적(footprints)의 3가지 알고리즘을 사용하여 잡음을 제거한 비교 결과이다.

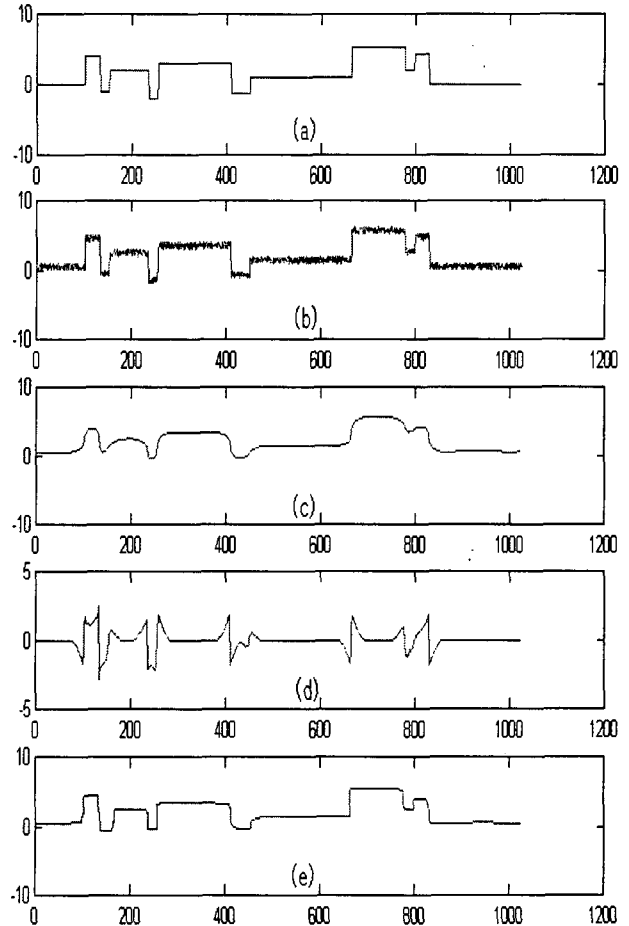


그림 7. 블록 신호 결과 비교

- (a) 원신호(블록 신호)
- (b) 잡음이 첨가된 신호
- (c) 연성 임계치 기법
- (d) 강성 임계치 기법
- (e) Wavelet footprints

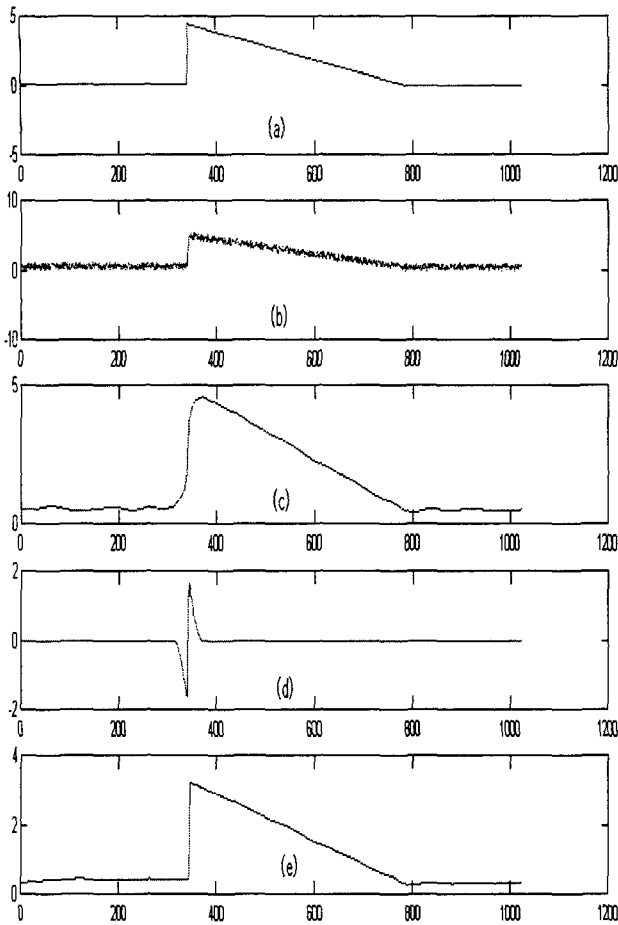


그림 8 . 삼각 신호 결과 비교

- (a) 원신호(삼각신호)
- (b) 잡음이 첨가된 신호
- (c) 연성 임계치 기법
- (d) 강성 임계치 기법
- (e) Wavelet footprints

그림 5와 6의 (c)에서 보는바와 같이 연성 임계치 잡음 제거는 불연속 주위에 많은 손실이 발생하였고, (d)의 강성 임계치 잡음 제거는 불연속 주위의 값만 보존 할 뿐 신호의 근사를 수행하지 못하였다.

그림 5와 6의 (e)는 본 논문에서 제안한 웨이블릿 발자국 흔적(footprints) 알고리즘을 사용한 결과이다. 기저 함수로 Haar를 사용하였고, 수행 결과 부드러운 영역은 최대한 보존하면서 불연속 주위의 의사 깃스 현상을 현저히 감소 시켰다.

표 1은 3가지 잡음 제거 기법들의 SNR 결과를 비교한 것이다. 본 논문에서 제안한 기법(footprints)이 연성 임계치 기법보다 7.6024dB 좋은 결과를 가짐을 확인 할 수 있고 강성 임계치 기법보다 17.3656dB 좋은 결과를 가짐으로써 불연속 주위의 의사 깃스 현상을 제거에 많은 효과가 있음을 확인 할 수 있다.

표 1. SNR 비교표

신 호	Soft	Hard	footprint
Blocks	9.9631	0.1889	17.5655
Triangle	10.8223	0.7390	18.4009

### V. 결 론

기존의 웨이블릿 임계치 기법을 잡음제거에 각각 독립적으로 적용하면 의사 깃스 현상이나 계단 현상을 발생시키는 단점을 가지고 있었다. 웨이블릿 발자국 흔적(footprints) 알고리즘을 구현하여 본 결과 연성 임계치 잡음 기법보다 SNR이 최대 7.6dB까지 개선되었고 시각적으로도 불연속점 주위의 의사 깃스 현상이나 계단 현상과 같은 단점을 현저히 감소됨을 확인하였다.

향후 과제로 산업체 환경에서의 음성 신호나 심전도 신호와 같은 실시간 데이터 획득 환경을 구성하여 이 환경에서 얻은 잡음 신호를 실시간으로 데이터의 처리 실험과 2차원 이상의 신호에 대한 확장이 필요하다.

### 참고 문헌

- [1]Stephane Maller, "A Wavelet tour of signal processing", 1999.
- [2]P.L.Dragotti, and M. Vetterli, "Shift-invariant Gibbs Free Denoising Algorithm based on Wavelet Transform Footprints", 2000.
- [3]RR. Coifman, D.L. Donoho, "Translation-Invariant Denoising", 1995.
- [4]R.T.Rockfellar, Convex Analysis", 1972.
- [5]P.Prandoni and M.Vetterli " Approximation and Compression of Piecewise Smooth Functions", 1999.