

# 전파 교육에 적용할 수 있는 반복 그린함수 방법을 이용한 전자파 도파관 구조의 새로운 해석법

조 용 회

목원대학교 정보통신전파학부

## A New Analysis of Waveguide Structure Using the Iterative Green's Function Method Applicable to the Electromagnetics Instruction

Cho, Yong Heui

Div. of Information Communication & Radio Engineering, Mokwon University

E-mail: yhcho@mokwon.ac.kr

### 요 약

학부생들이 쉽게 사용할 수 있는 기법인 반복 그린함수 방법(IGFM)을 이용하여 복잡한 전자파 도파관 구조를 이론적으로 해석한다. IGFM은 그린함수와 반복법을 이용한다. IGFM의 간단한 공식화를 위해 단순한 수학 방정식만을 사용한 물리적인 메커니즘을 이용한다. 전형적인 전자파 도파관 구조인 평행판 E평면 T접합에 대한 산란 특성을 IGFM 관점에서 이론적으로 공식화한다. 수치해석 결과를 주파수에 대한 반사와 투과 전력 관점에서 보인다. 우세모드 해를 유도하고 그 결과를 고차모드에 의한 해와 비교한다.

### Abstract

An iterative Green's function method (IGFM) is introduced to analyze complex electromagnetic waveguide structures in view of the university student. The IGFM utilizes the Green's function and iteration scheme. The physical mechanism with simple mathematical equations is used to formulate the IGFM. Scattering characteristics of a standard E-plane T-junction in a parallel-plate waveguide are theoretically investigated in terms of the IGFM. Numerical computations illustrate the characteristics of reflection and transmission powers versus frequency. A dominant-mode solution is presented and compared with the higher-mode solutions.

### I. 서론

전자파 도파관 구조는 위성통신과 같은 고전력 시스템 설계에 기본이 되는 소자이다. 도파관을 설계하기 위하여 도파관의 산란 특성을 해석한다. 산란 특성 해석에 사용되는 수학은 적분방정식(integral equation) 이론과 유수정리(residue theorem)이다. 이 접근법은 학부생들이 이해하기에는 복잡한 고난이도의 수학 이론을 많이 사용한다. 도파관 구조를 고급 수학기법을 사용하지 않고 손쉽게 해석할 수 있는 새로운 방법론인 IGFM을 소개한다. 도파관 구조 중 기본 핵심 소자인 T접합(T-junction)을 해석한다.

도파관 T접합은 일반화된 산란행렬(scattering matrix) 방법을 이용해서 해석되었다. 이 산란행렬을 사용하기 위해서는 행렬대수에 대한 기본적인 이해가 필요하다. 일반화된 산란행렬 방법을 이용하면 결합기, 멀티플렉서(multiplexer), 전력 분배기 등을 설계할 수 있다[1-3]. [4]에서는 복잡한 근사식을 사용하여 E평면(E-plane) T접합에 대한 수식을 등가회로(equivalent network) 관점에서 유도했다. 본 연구에서는 그린함수(Green's function)와 반복법을 이용하여 도파관 E평면 T접합에 대한 해를 유도한다. 유수정리[5]를 사용하지 않고 유도된 해를 이용하여 T접합의 반사와 투과 특성을 계산할 수 있다. 본 연구에 사용된 기법과 비슷한

반복법[6]이 도파관 불연속 구조에 대한 전기장 분포 초기치 추정에 사용되었다.

2. 반복 그린함수 방법

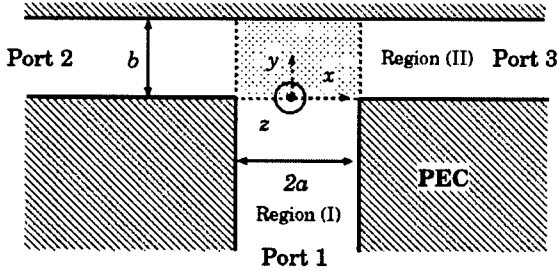


그림 1. 도파관 T접합의 구조

그림 1에서 E평면 T접합 평행판 도파관에 TM 모드가 입사한다고 가정한다. 시간을 나타내는 항목은  $e^{-i\omega t}$ 이다. 그림 1에서 음영으로 표시된 영역은 영역 (I)과 (III)가 중첩이 됨을 표시한다. 영역 (I)과 (III)에 입사하는 자기장은

$$H_0^I(x, y) = I_0^+ \cos a_s(x+a) [e^{i\xi_s y} + e^{i\xi_s(2b-y)}] \quad (1)$$

$$H_0^{II}(x, y) = J_0^{-0} \cos(b_s y) e^{i\xi_s(x+a)} \quad (2)$$

여기서  $a_s = \pi/(2a)$ ,  $\xi_s = \sqrt{k_0^2 - a_s^2}$ ,  $\zeta_s = \sqrt{k_0^2 - b_s^2}$ ,  $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ .  $I_0^+$ ,  $J_0^{-0}$ 는 1번과 2번 포트(port)에 입사하는  $H_z$ 의 크기를 각각 나타낸다. [7]에 나오는 중첩의 원리를 이용하여 그림 1의 구조를 그림 2의 구조로 분해한다.

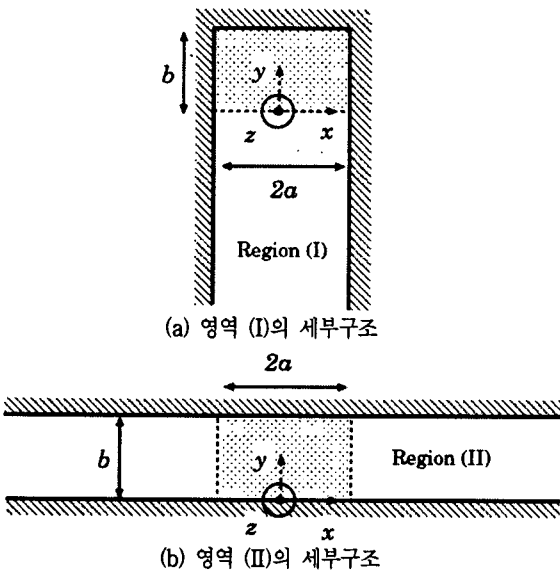


그림 2 도파관 T접합의 세부구조

반복의 원리 관점에서 보면  $H_{n-1}^I(x, y)$ 가  $H_n^{II}(x, y)$ 를

생성하고  $H_n^{II}(x, y)$ 가  $H_n^I(x, y)$ 를 생성한다고 생각한다. 이 과정을 반복하면 자동으로 경계조건을 만족시킬 수 있다. 즉, 반복을 적용하는 것은 전자기파가 그림 1의 구조에 입사할 때 겪는 산란 현상을 그대로 따라가고 있는 것으로 생각할 수 있다. 이 과정을 이용해 영역 (I)과 영역 (III)의  $H_z$ 를 표현하면

$$H_z^I(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^I(x, y) \quad (3)$$

$$H_z^{II}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{II}(x, y) \quad (4)$$

[7]에 있는 그린함수 관계식을 이용하면

$$H_n^{II}(x, y) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{A} = - \int H_{n-1}^I(r') \frac{\partial}{\partial n} G_{II}(r, r') dr' \quad (5)$$

$$H_n^I(x, y) = - \int H_n^{II}(r') \frac{\partial}{\partial n} G_I(r, r') dr' \quad (6)$$

여기서  $\bar{A}$ 는 자기 벡터 퍼텐셜,  $G_I(r, r')$ ,  $G_{II}(r, r')$ 는 영역 (I)과 (III)의 2차원 그린함수를 각각 나타낸다. 그린함수는 점전원이 해당 구조에 복사하는 전기장을 표현하는 함수이다. 2차원 그린함수는 [8]의 표준적인 과정으로 유도할 수 있다. 반복과정을 이용하면 (5)와 (6)은

$$H_n^I(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos a_m(x+a) \times [\text{sgn}(y) e^{i\xi_m y} + e^{i\xi_m(2b-y)}] I_m^n \quad (7)$$

$$H_n^{II}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos(b_m y) \times [\text{sgn}(x+a) e^{i\xi_m(x+a)} J_m^n - \text{sgn}(x-a) e^{i\xi_m(x-a)} J_m^n] \quad (8)$$

여기서  $n=1, 2, \dots$ ,  $\text{sgn}(\cdot) = 2u(\cdot) - 1$ ,  $u(\cdot)$ 는 단위계단(unit step) 함수를 나타낸다.  $I_m^n$ ,  $J_m^n$ 는 그린함수 계산에서 나타나는 모드(mode) 계수이다. (3), (4)를 이용해서  $I_0^+ = 1$ ,  $J_0^{-0} = 0$ 인 경우의 우세모드(dominant-mode) 해를 구하면

$$I_0 = \frac{(1 - e^{2k_0 a})(e^{2k_0 b} - 1)}{4abk_0^2 + (e^{2k_0 a} - 1)(e^{2k_0 b} - 1)} \quad (9)$$

$$J_0^- = \frac{i2k_0 a(e^{2k_0 b} - 1)}{4abk_0^2 + (e^{2k_0 a} - 1)(e^{2k_0 b} - 1)} \quad (10)$$

여기서  $I_m = \sum_{n=1}^{\infty} I_m^n$ ,  $J_m = \sum_{n=1}^{\infty} J_m^n$ . 유사한 방법으로  $I_0^+ = 0$ ,  $J_0^{-0} = 1$ 에 대한 우세모드 해를 구하면

$$J_0^- = \frac{(e^{2k_0 a} - 1)(1 - e^{2k_0 b})}{8abk_0^2 + 2(e^{2k_0 a} - 1)(e^{2k_0 b} - 1)} \quad (11)$$

$$I_0 = \frac{ik_0 b (e^{2k_0 a} - 1)}{4abk_0^2 + (e^{2k_0 a} - 1)(e^{2k_0 b} - 1)} \quad (12)$$

해당 포트에 대한 전자파 전력 계산은

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_L E(x, y) \times H_i^*(x, y) dl \right] \quad (13)$$

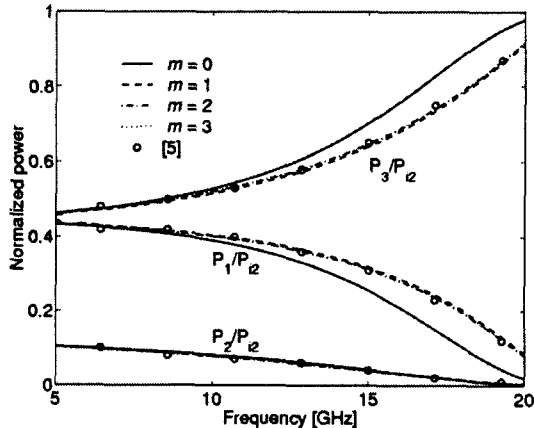


그림 3. 정규화된 반사 전력과 투과 전력의 주파수 특성 ( $n=30, a=3.5 \text{ mm}, b=7 \text{ mm}$ )

그림 3은 평행판(parallel-plate) E평면 T접합에 대한 산란 특성을 보여준다. 산란 특성은 입사하는 전자파의 전력으로 정규화되었다. 수치해석 결과를 보면  $m \geq 1$ 인 경우 [5]의 결과와 잘 일치함을 확인할 수 있다. 즉, IGFEM은 접근 방법이 단순하지만 유수정리와 푸리에 변환(Fourier transform)을 이용해서 얻은 수식과 동일한 결과를 얻을 수 있다. 저주파 영역에서는 우세모드 해가 고차모드 해와 거의 일치함을 그림 3에서 확인할 수 있다.

### 3. 결론

평행판 E평면 T접합에 대한 전자파 산란 관계식을 해석적인 방법인 그린함수와 반복법을 이용하여 얻었다. 사용된 수학 기법은 단순 적분과 그린함수에 대한 수식이다. 경계 조건 적용은 반복이라고 하는 물리적인 현상을 이용해서 만족시킨다. 간단하면서도 엄밀한 평행판 E평면 T접합의 산란 방정식을 공식화하고 수치해석 결과를 다른 수치해와 비교하였다. 반사전력과 투과전력의 특성을 주파수 관점에서 관찰하였다. 저주파 영역에서는 평행판 E평면 T접합에 대한 우세모드 해가 고차모드 해와 거의 비슷하며 실제 응용에서 사용될 수 있음을 보였다.

### 참고문헌

- [1] F. Arndt, I. Ahrens, U. Papziner, U. Wiechmann, and R. Wilkeit, "Optimized E-plane T-junction series power dividers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 35, no. 11, pp. 1052-1059, Nov. 1987.
- [2] J. M. Rebollar, J. Esteban, and J. E. Page, "Fullwave analysis of three and four-port rectangular waveguide junctions," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, no. 2, pp. 256-263, Feb. 1994.
- [3] T. Sieverding, U. Papziner, and F. Arndt, "Mode-matching CAD of rectangular or circular multiaperture narrow-wall coupler," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, no. 7, pp. 1034-1040, July 1997.
- [4] P. Lampariello and A. A. Oliner, "New equivalent networks with simple closed-form expressions for open and slit-coupled E-plane tee junctions," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 41, no. 5, pp. 839-847, May 1993.
- [5] K. H. Park, H. J. Eom, and Y. Yamaguchi, "An analytic series solution for E-plane T-junction in parallel-plate waveguide," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, no. 2, pp. 356-358, Feb. 1994.
- [6] M. F. Iskander and M. A. K. Hamid, "Iterative solutions of waveguide discontinuity problems," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 25, no. 9, pp. 763-768, Sept. 1977.
- [7] Y. H. Cho and H. J. Eom, "Analysis of a ridge waveguide using overlapping T-blocks," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, no. 10, pp. 2368-2373, Oct. 2002.
- [8] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, 2nd ed, New York: IEEE Press, pp. 78-86, 1991.