# 제한된 분지수를 갖는 최소 지름 신장 트리[1]

안희갑*[2] 한요섭[3] 신찬수[4]
2. 한국과학기술연구원 영상미디어 연구센터
3. 홍콩과기대(HKUST), 전산학과
4. 한국외국어대 전자정보공학부
heekap@kist.re.kr, emmous@cs.ust.hk, cssin@hufs.ac.kr

# Minimum-Diameter Spanning Tree with the Bounded Degree

Heekap Ahn*[2] Yo-Sub Han[3] Chan-Su Shin[4]
2. Image Media Research Center, KIST
3. Computer Science Dept., HKUST
4. School of Electronics and Information Engineering, HUFS

**요 약**

이차원 평면에 주어진 $n$ 개의 점을 연결하는 신장 트리(spanning tree) 중에서, 지름이 최소가 되는 최소 지름 신장 트리는 특정 점에서의 분지수가 $n-1$ 까지 증가할 수 있다. 본 논문에서는 트리의 분지수(degree)를 입력으로 받아 그 분지수를 넘지 않는 신장 트리를 구성하면서 트리의 지름은 최소 지름의 상수 배를 넘지 않도록 하는 구성 방법을 제안한다.

## 1. 서 론

이차원 평면에 주어진 $n$개의 점 집합을 $S$라 하자. 이 점들을 모두 선분으로 연결한 트리를 신장 트리(spanning tree)라 한다. 이 트리의 각 에지의 길이는 에지 양 끝 점 사이의 유클리디언 거리로 정의된다. 트리에서 두 점을 연결한 경로(path)는 유일하게 결정되고, 경로의 길이는 경로를 구성하는 에지의 길이의 합으로 정의된다. 트리에서 두 점 사이의 거리는 두 점을 연결하는 경로의 길이로 정의된다. 트리의 지름는 가장 먼 거리의 두 점 사이의 거리로 정의된다.

최소 지름 신장 트리(MDST: Minimum-Diameter Spanning Tree)는 $S$의 점을 연결하는 신장트리 중에서 지름이 가장 작은 트리이다. MDST는 주요 지점을 연결하는 기하 네트워크의 하나로써, 각 지점을 도시로 생각하고 여러 도시를 연결하는 트리 네트워크를 구성한다고 하자. 만약 트리 네트워크의 설치 비용을 줄이고 싶다면, 에지의 길이 합이 최소인 MST(Minimum Spanning Tree)로 구성해야 하지만, 네트워크에서 가장 멀리 떨어진 두 도시간의 통신비용이 중요하다면, 네트워크의 지름이 최소가 되는 MDST를 구성해야 한다. $S$에 대한 MDST를 계산하는 최적 알고리즘은 알려져 있지 않다. 현재까지 알려진 가장 좋은 알고리즘[1]은 1991년에 발표된 $O(n^3)$ 시간 알고리즘이다. 수행 시간이 상대적으로 크기 때문에, 트리의 최소 지름과 크게 차이가 나지 않는 근사 MDST를 계산하는 알고리즘[2]도 최근에 발표되었다.

Ho 등[1]에 의하면, $S$에 대한 MDST는 단항 트리(monopolar tree)이거나 이항 트리(dipolar tree)임이 증명되었다. 단항 트리란 $S$의 한 점이 단항 중심으로 정의되고 나머지 모든 점은 단항 중심에 연결된 형태의 신장 트리이며, 이항 트리는 두 점이 중심으로 정의되며, 두 중심은 선분으로 연결되고 두 점을 제외한 나머지 점들은 두 중심 중 하나에 연결되는 신장 트리이다. 같은 저자들은 또한 최소 지름의 단항 트리는 $O(n\log n)$ 시간에, 이항 트리는 $O(n^3)$ 시간에 계산할 수 있음을 보였다.

만약 MDST가 기간 통신망으로 사용된다면, 각 노드에서 처리해야 할 작업의 양이 적절해야 한다. 이것은 공평한 통신 서비스를 위해 필수적이다. 그런데 한 노드에서 처리해야 할 작업의 양은 노드에 연결된 통신 에지의 수와 밀접한 관계가 있다. 즉, 많은 에지가 노드에 연결되어 있다면 그만큼 많은 작업이 해당 노드에 할당될 가능성이 높아진다. 그런데 위에서 살펴봤듯이, MDST는 단항 트리 또는 이항 트리이므로, 한 노드에 연결된 최대 에지 수는 $n-1$까지 증가할 수 있다. 트리의 각 점의 분지수(degree)는 그 점에 연결된 에지의 개수로 정의되며, 트리의 분지수는 가장 큰 점의 분지수로 정의된다. 결론적으로 MDST의 분지수는 $n-1$ 까지 증가할 수 있다.

두 점 $p,q$ 사이의 유클리디언 거리는 $|pq|$ 로 표기하고, 트리의 경로 $P$의 길이는 $|P|$로 표기한다.

트리의 분지수가 상수로 제한되고 그 지름이 최소 지름의 상수 배를 넘지 않는 신장 트리를 구성하는 방법은 이미 알려져 있다[3]. 트리의 루트 $v_0$에서 임의의 리프 노드 $v_m$ 까지의 경로 $P=\langle v_0,\cdots,v_m\rangle$ 를 고려해보자. 만약, 모든 경로 $P$ 에 대해 그리고 모든 $0\le i\le m$ 에 대해 $|v_0v_i|\le|v_0v_{i+1}|$ 이라면 이 트리는 루트에 대해 단조(monotone)하다고 말한다. 그러나 [3]에서 구성된 트리는 루트에 대한 단조성이 없다. 이 단조성은 네트워크를 실제로 그릴 때 자연스러운 기준으로 볼 수 있다는 의미가 있다. 또한 임의의 모든 분지수를 갖는 신장 트리를 구성할 수 있는 것도 아니다. 본 논문에서는 최소 지름의 상수 배 이내의 지름을 갖고, 입력으로 주어진 임의의 분지수를 만족하며, 루트에 대해 단순한 신장 트리를 구성하는 문제를 살펴본다.

[1] 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구 R05-2002-000-00780-0 지원으로 수행되었음.

## 2. 분지수가 제한된 단조한 신장 트리 구성

양의 상수 $m$ 는 분지수와 관련된 매개변수이다.

### 2.1 MDST가 단항 트리인 경우

단항 중심 $x$ 을 중심으로 $S$ 의 점을 모두 포함하는 가장 작은 크기의 원을 $C$ 라 하자. $x$ 를 중심으로 각이 $2\pi/m$ 인 부채꼴로 원 $C$ 로 나눈다. 부채꼴 $K$ 에 속한 점 $p$ 에 대해, $x$ 를 중심으로 $p$ 를 지나는 작은 원 $C_p$ 를 그린다. 그러면, **잘려진 부채꼴** 모양의 영역 $K'=K\cap(C-C_p)$ 을 정의하자. 이제 $K'$ 를 다시 동일한 각도를 갖는 $m$ 개의 잘려진 부채꼴로 나눈다. 알고리즘에선 계속해서 잘려진 부채꼴을 같은 방법으로 나누게 된다. (잘려진) 부채꼴 $K$ 에 대해, $K$ 의 내부에 포함된 $S$ 의 점들의 집합을 $S(K)$ 라 표기한다. 부채꼴 $K$ 의 경계에는 $S$ 의 점이 최소한 하나 이상 존재하는 데, 그 점은 $S(K)$ 의 점들을 연결한 부트리(subtree)의 루트 역할을 하게 된다. 이 점을 해당 **부채꼴의 루트 점**이라 부른다.

알고리즘은 단항 중심 $x$ 를 전체 루트로 하는 트리를 여러 레벨에 걸쳐 점진적으로 구성한다. 첫 번째 레벨에서는 원 $C$ 를 $m$ 개의 부채꼴로 나눈 후에 각 부채꼴 $K$ 에 대해, $S(K)$ 에 있는 점 중에서 최소한 하나 이상의 점을 뽑는다. 뽑힌 점들을 루트 $x$ 에서 가장 가까운 점 $p$ 을 뽑아 연결한다. 그러면, 잘려진 부채꼴 $K'=K\cap(C-C_p)$ 이 정의된다. 점 $p$ 는 부채꼴 $K'$ 의 루트 점이 된다. 두 번째 레벨에서는 부채꼴 $K'$ 을 $m$ 개의 잘려진 부채꼴 영역으로 다시 나누고, 각 영역의 루트 점을 선택한 후에, 루트 점들을 점 $p$ 에서 시작하는 체인으로 모두 연결한다. 이 과정을 재귀적으로 반복하면서 트리를 구성한다.

이제 각 레벨에서 하는 일을 자세히 살펴보자. 레벨 $(i-1)$ 까지 진행하면서 트리의 일부를 구성했다고 가정하자. 이 트리를 $T_{i-1}$ 이라 하자. 지금은 레벨 $i$ 에 있는 부채꼴 $K$ 에 대해 처리한다고 가정하자. 이 부채꼴의 루트 점을 $p$ 라 하자. 물론 $p$ 는 이전 레벨에서 선택이 되어 자신의 부모 점과 연결되었고 트리 $T_{i-1}$ 에선 리프 노드의 역할을 한다. 이제 $K$ 를 다시 $m$ 개의 부채꼴 $K_1,K_2,\cdots,K_m$ 으로 왼쪽부터 차례대로 나눈다. (그림 1 참조.) 이제 할 일은 부채꼴 $K_j$ 의 루트 점을 $S(K_j)$ 에서 선택하는 것이다.

편의상 루트 점 $p$ 가 $K_2$ 의 윗 변에 온다고 가정하자. 점 $a$ 에서 점 $b$ 방향으로의 직선을 $ab$ 라 하자. $S(K)$ 의 점 중에서 직선 $px$ 의 왼쪽에 있는 점의 집합을 $S_L$ , 오른쪽에 있는 점의 집합을 $S_R$ 이라 하자. 당연히 $S=S_L\cup S_R$ 이다. $S(K_1),\cdots,S(K_{j-1})$ 은 모두 $S_L$ 에 속하고, $S(K_{j+1}),\cdots,S(K_m)$ 은 모두 $S_R$ 에 속한다. $S(K_j)$ 에 속하는 점들은 $px$ 의 왼쪽에 오면 $S_L$ 에 아니면 $S_R$ 에 속하게 된다.

편의상 직선 $px$ 가 수직선이고, 점 $p$ 는 원점에 위치한다고 가정한다. 이제 $S_R$ 의 점 중에서 몇 개를 선택해 연결한 **갈비 체인**(rib chain)을 구성한다. ($S_L$ 에 대한 갈비 체인은 대칭적인 방법으로 구할 수 있다.) 우선 $p$ 와 $K$ 의 오른쪽 위 꼭지점을 지나는 가상의 직선을 $h$ 라 하자. 점 $p$ 를 중심으로 시계 방향으로 $h$ 를 회전하면서 처음으로 만나는 $S_R$ 의 점 $p_1$ 이라 한다. 다시 점 $p_1$ 을 기준으로 $h$ 를 계속 시계 방향으로 회전하면서 처음으로 만나는 $S_R$ 의 점 $p_2$ 를 찾는다. 이 방법을 계속해서 적용하여 $p_3,\cdots,p_k$ 를 찾는다.

이것은 $h$ 가 수직이 될 (즉 $px$ 와 평행 할) 때까지 반복한다. 점 $p$ 와 $p_1,\cdots,p_k$ 을 차례대로 연결하면 위쪽으로 볼록한 체인이 된다. (이 볼록 체인은 $p$ 에 연결된 갈비 체인 중 하나이다.) 쉽게 알 수 있는 사실은 볼록 체인의 윗부분에는 $S_R$ 의 어떠한 점도 존재하지 않는다는 사실이다.

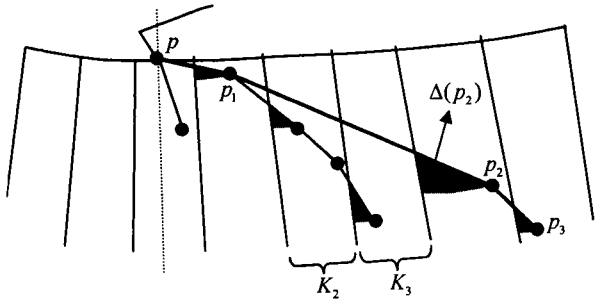


그림 1

인접한 두 점 $p_t$ 와 $p_{t+1}$ 에 대해 $p_t\in S(K_j)$ 이고 $p_{t+1}\in S(K_l)$ 이라고 하자. 우선 $z\le j<l\le m$ 이라 가정한다. 만약 $j+1=l$ 이라면, 서로 인접한 부채꼴에서 점 $p_t$ 와 $p_{t+1}$ 이 하나씩 선택되어 볼록 체인에 참여한 것이지만 $|j-l|>2$ 이라면 부채꼴 $K_{j+1},\cdots,K_{l-1}$ 에서는 루트 점이 전혀 선택이 되지 않았다는 것이다. (그림 1에서 $K_2,K_3$ 이 여기에 해당하며 $p_t=p_1,p_{t+1}=p_2$ 가 됨) 이 부채꼴의 루트 점을 결정하기 위해, 바로 위에서 사용한 갈비 체인을 구성하는 방법을 재귀적으로 다시 적용하여 새로운 갈비 체인을 구성한다.

$S'=S(K_{j+1})\cup\cdots\cup S(K_{l-1})$ 이라 하자. 이 갈비 체인은 점 $p_t$ 부터 시작한다. 우선 직선 $h$ 를 선분 $p_tp_{t+1}$ 에 일치시킨 후에, 시계 방향으로 회전하면서 가장 처음 만나는 $S'$ 의 한 점을 찾고, 다시 그 지점에서부터 회전하여 처음 만나는 점을 계속해서 찾는다. 이 점들을 $p_t$ 부터 차례로 연결하여 위로 볼록한 갈비 체인을 만든다. 물론 이 갈비 체인이 모든 $K_{j+1},\cdots,K_{l-1}$ 의 루트 점을 선택 못할 수도 있다. 이 경우엔 다시 재귀적인 방법으로 갈비 체인을 생성해 나가면 된다. 이젠 각 부채꼴 $K_j$ 에 대해 최소한 하나 이상의 루트 점들이 $S(K_j)$ 에서 선택되었고, 그러한 루트 점들은 여러 개의 갈비 체인을 구성하여 최종적으로는 부채꼴 $K$ 의 루트 점인 $p$ 에 연결된다. 그러나 갈비 체인이 모두 정의된 것은 아니다.

갈비 체인에 연결된 각 점 $q$ 에 대해, 자신이 속한 갈비 체인의 아래쪽 영역과 자신이 속한 부채꼴 영역과 전체 루트 $x$ 를 중심으로 자신을 지나는 원의 내부 영역의 공통 영역을 고려해보자. 그림 1에서 색칠된 부분을 의미한다. 이 영역을 $q$ 에 대한 삼각주라 부르고 $\Delta(q)$ 라 표기한다. 만약, $\Delta(q)$ 에 점들이 존재한다면, 즉 $S(\Delta(q))\neq\phi$ 이라면 그 점들의 루트 점을 결정해야 한다. 그림 1에서 $\Delta(p_2)$ 와 $\Delta(p_3)$ 를 비교해보자. 우선 $\Delta(p_3)$ 에 있는 점들은 $p_3$ 가 속해 있는 갈비 체인에서 $p_3$ 의 부모 점을 (여기선 점 $p_2$ 을) 루트 점으로 하여 재귀적으로 연결하면 된다. 물론, 이 경우엔 $p_2$ 자체가 자신의 부채꼴 영역 $K_2$ 의 루트 점이기도 하므로 $S(K_2)$ 와 $S(\Delta(p_3))$ 에 있는 점들 모두의 루트 점이 되야 한다. 결국, 다음 레벨에서 $p_2$ 는 두 영역을 합한 영역인 $K_2\cup\Delta(p_3)$ 을 자신의 부채꼴 영역으로 간주하여 루트 점이 되어야 한다. 그러나 $\Delta(p_2)$ 에 있는 점들은 사정이 다를 수 있다. 갈비 체인에서 점 $p_2$ 의 부모 점은 $p_1$ 이 된다. 그런데 $p_1$ 에서는 자신을 지나가는 갈비 체인과 함께 자신으로부터 시작하는 갈비 체인도 존재한다.

(만약, 자신으로부터 시작하는 갈비 체인이 두 개 이상이라면 그 중에서 가장 오른쪽에 있는 갈비 체인만을 고려한다.) $x$ 에서 가장 가까운 $S(\Delta(p_2))$ 의 점을 $q$ 라고 하자.

우선 $p_1$ 에서 $q$ 가 보이면 두 점을 선분을 연결한다. 갈비 체인의 정의에 의해, 서로 인접한 두 갈비 체인 사이의 영역엔 어떠한 점도 존재하지 않기 때문에 이 선분은 트리의 다른 에지와 교차하지 않는다. 만약, $p_1$ 에서 $q$ 가 보이지 않는다면, 그것은 $p_1$ 에서 시작하는 갈비 체인이 가로 막고 있기 때문이다. 그러면 $q$ 에서 그 갈비 체인에 접선을 구해 접점을 찾아 $q$ 와 연결한다. 이 선분 역시 다른 갈비 체인과 교차하지 않는다. 이젠 $q$ 가 $\Delta(p_2)$ 의 루트 점이 되어 다음 레벨에서 재귀적으로 같은일을 반복한다.

여기서 한가지 중요한 사실은 두 경우 모두 $q$ 와 연결된 선분은 원 $C_q$ 내부에 완전히 포함된다는 사실이다. 이 사실로부터 $q$ 로부터 연결되는 $\Delta(p_2)$ 의 점들은 단조하게 되고 $q$ 의 부모 점으로의 선분과 $q$ 의 자식 점까지의 선분도 서로 교차하지 않음을 알 수 있다.

이제 남은 일은 다음 단계에서 고려될 부채꼴 영역과 해당 루트 점이 무엇인지 정확히 정의해야 한다. 현재 레벨에서의 부채꼴 $K_j$ 에 대해, $S(K_j)$ 에 속한 점 중에서 (1) 오직 한 점 $p'$만 갈비 체인에 포함된 경우, (2) 그림 1의 $K_2$처럼 두 점 이상이 갈비 체인에 포함된 경우와 (3) 삼각주 영역을 따로 고려한다. 첫 번째 경우는 점 $p'$ 아래 부채꼴 영역인 $K'=K_j-C_{p'}$ 이 다음 레벨의 $p'$ 의 부채꼴 영역이 된다. (물론, $p'$ 이 함께 처리해야 할 삼각주 영역 $\Delta$ 가 존재한다면 부채꼴 영역은 $K'\cap\Delta$ 이 된다.) 두 번째 경우에, 갈비 체인에 속한 점들은 체인의 위에서부터 차례로 $p'_1, p'_2, \cdots$ 순서로 나열되어 있다고 하자. 그러면 다음 레벨에서 고려되는 부채꼴 영역은 $K'_j = K \cap C_{p'_j}$ 으로 정의되고 루트 점은 첫 번째 점인 $p'_1$ 이 된다. 마지막 경우엔, 삼각주 영역이 바로 왼쪽의 부채꼴 영역과 함께 다음 단계에서 고려되거나, 삼각주 영역의 점 중에서 $x$ 에 가장 가까운 점이 루트 점이 되어 독자적으로 고려된다.

마지막으로 할 일은 최종적으로 얻어진 트리 $T$ 의 분지수와 지름을 분석하는 것이다. 우선, 현재 레벨 $i$ 에 부채꼴 영역 $K$의 루트 점 $p$ 의 분지수를 살펴보자. 첫 번째 사실은 부채꼴 $K$ 가 $m$ 개의 부채꼴 영역으로 나뉘어 각 영역마다 최대 한 점이 $p$ 에 연결될 수 있다는 것이다 (단 $p$ 가 속한 부채꼴 $K_2$에서는 두 개의 점이 선택된다.) 두 번째 사실은 $p$ 부터 시작하는 갈비 체인에서 처음 만나는 점의 삼각주 영역에 있는 한 점으로 연결될 수 있기 때문에 위해 최대 $m$ 개의 분지수가 필요하다. 세 번째 사실은 이전 레벨에서 $p$ 가 최대 $m$ 개의 갈비 체인의 시작점이 될 수도 있다는 것이다. 마지막으로 부모로 연결하기 위해 1개의 분지수를 더 필요로 하므로 $p$ 의 분지수는 $(3m+2)$ 를 넘지 않게 된다.

이렇게 얻어진 트리 $T$ 는 에지끼리 교차하지 않으며 단조성을 만족한다는 것을 쉽게 증명할 수 있다. 이 증명은 생략한다. 이제 $T$ 의 지름을 계산해보자. $T$ 에서 전체 루트 $x$ 에서 리프 $q$ 까지 경로를 $P$ 라 하자, $x$ 를

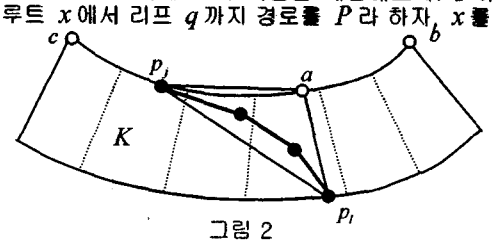

그림 2

중심으로 전체 점 집합 $S$ 를 감싸는 가장 작은 원 $C$ 의 반지름을 $R$ 이라 하자. 그러면 $S$ 에 대한 최소 지름 $D^*$ 는 $D^* > R$ 이 성립한다. 만약 어떤 양의 상수 $d$ 에 대해, $|P| \le dR$ 이 성립한다면, 임의의 두 점 $q, q'$ 을 연결한 경로 $P'$ 에 대해선 $|P'| \le 2|P| \le 2dR \le 2dD^*$ 이 성립하여 $T$ 의 지름이 최소 지름보다 최대 $2d$ 배를 넘지 않게 된다. 이 $d$ 값을 계산해보자. 경로 $P=\langle p_1,\cdots,p_k\rangle$ 라 하자. 여기서 $p_1=x, p_k=q$ 이다. 경로 $P$ 의 일부분 $P_{j,l}=\langle p_j,\cdots,p_l\rangle, 1\le j<l\le k$ 이 레벨 $i$ 의 부채꼴 $K$ 에서 구성되었다고 하자. 그러면 $K$의 루트 점은 당연히 $p_j$ 가 된다. 끝 점 $p_l$ 까지는 갈비 체인을 하나 또는 그 이상의 갈비 체인으로 연결되어 있기 때문에 $P_{j,l}$ 는 아래 그림 2처럼 위로 볼록한 체인이다.

점 $a$ 는 점 직선 $\overline{p_l x}$ 와 $K$ 의 윗변(위쪽 호)과의 교차점이다. 당연히, $P_{j,l}$ 는 삼각형 $\Delta(p_l, a, p_l)$ 에 완전히 포함된다. $P_{j,l}$ 가 위로 볼록하다는 성질을 이용하면, $|P_{j,l}| \le |p_j a| + |a p_l|$ 이 성립한다. $|p_j a|$ 는 호의 길이 $|p_j a|$ 보다 작기 때문에, 레벨 $i$ 에서 $K$의 최대 각을 $\theta_i$ 라면, $|p_j a| \le |p_j a| \le |bc| \le R\sin\theta_i$ 가 된다. $P$ 가 통과하는 각 레벨에 대해, $|ap_l|$ 성분을 다 더하면 $C$ 의 반지름 $R$ 과 같음에 주의하자. 결국 다음이 성립한다.

$$|P| \le R + R\sum_{i=0}^{\infty}\sin\theta_i \le R(1+\sum_{i=0}^{\infty}\sin\theta_i).$$

다음 레벨인 $i+1$ 에서는 각 크기가 $\theta_i$ 인 부채꼴 $K$ 가 $\theta_i/m$ 크기의 부채꼴로 분할된다. 그러나 경우에 따라선 이 부채꼴과 같은 크기의 삼각주가 하나의 영역으로 합쳐져 고려될 수도 있기 때문에, $\theta_{i+1} \le 2\theta_i/m$ 이 된다. 그래서 아래 식이 성립함을 알 수 있다.

$$|P| \le R(1+4\pi\sum_{i=0}^{\infty} m^{-(i+1)}) \le (1+4\pi/(m-1))R$$

결론은 $T$ 의 지름은 최소 지름에 비해 $2(1+4\pi/(m-1))$ 배를 넘지 않는다는 것이다.

### 2.2. MDST가 이항 트리인 경우

이 경우엔 두 개의 중심 점 $x, y$이 주어지고, 점 집합 $S$ 를 $x$ 에 연결된 점들의 집합 $S_x$ 와 $y$ 에 연결된 점 집합 $S_y$ 로 나눈다. 그러면, $x$ 를 루트로 하여 $S_x$ 의 점들을 앞 절의 단항 트리의 경우처럼 트리를 구성하고, $y$ 와 $S_y$ 에 대해서도 같은 방법으로 트리를 구성한 후에 $x, y$ 를 연결하면 최종 트리가 얻어진다. 이 트리의 분지수는 단항 트리의 경우와 같고 지름은 단항 트리의 지름의 2배를 넘지 않게 된다. 자세한 증명은 생략한다. 지금까지 논의를 정리하면 아래 정리와 같다.

**정리 1.** 이차원 평면에 주어진 $n$ 개의 점을 연결하는 신장 트리 중에서 분지수가 $(3m+2)$ 를 넘지 않고, 최소 지름에 비해 $4(1+4\pi/(m-1)) = O(1)$ 배를 넘지 않는 트리가 존재한다.

## 3. 참고문헌

[1] J.-M. Ho, D. T. Lee, C.-H. Chang, C. K. Wong, Minimum Diameter Spanning Trees and Related Problems, SIAM J. Comput. 20(5):987-997, 1991.

[2] J. Gudmundsson, H. Haverkort, S.-M. Park, C.-S. Shin, and A. Wolff, Approximating the Geometric Minimum-Diameter Spanning Tree, *APPROX 2002, Springer LNCS 2462*, pp. 146-160, 2002.

[3] S. Arya, G. Das, D. M. Mount, J. S. Salowe, and M. Smid, Euclidean Spanners: Short, Thin, and Lanky, Proc. Of STOC, pp. 26-37, 1995.