

Bessel와 Chebyshev 함수를 이용한 동시 추정에 관한 기법

강석진⁰ 차정근 윤호태 고진환
경북대학교 정보통신학과

coffee911⁰@bcline.com, chal210@inc.knu.ac.kr, htyoon@inc.knu.ac.kr, jikoh@ee.knu.ac.kr

Simultaneous Extrapolations Using Bessel and Chebyshev Functions

Suk-Jin Kang⁰, Jung-keun Cha, Ho-Tae Yoon, Jin-Hwan Koh
Dept. of Information and Communication Kyungpook National University

요 약

전자계 산란의 시간영역 신호는 대응하는 주파수 영역 응답에 대해서도 동시에 효율적인 방법으로 나타낼 수 있는 이유는 다항식의 직교하는 성질 때문이다. 직교 다항식을 이용함으로써, 이른 시간과 낮은 주파수 영역을 동시에 추정할 수 있다. 그 접근법은 CGM(Conjugate Gradient Method)방법과 간단한 DFT(Discrete Fourier transform)에 의거한다. 본 논문에서는 Bessel-Chebyshev 함수를 이용한 이른 시간과 낮은 주파수영역 응답을 동시에 추정하기 위한 접근의 방법을 제시하고, 구현 하였다. 오직 이른 시간과 낮은 주파수 정보를 필요로 하기 때문에 이 방법으로 계산시 반복계산의 수렴속도가 무척 빠르다는 이점이 있어, 신속한 정보를 얻을 수 있다.

1. 서 론

자료의 집합을 정확하게 나타내어 함수를 결정하는 보간법(interpolation)의 가장 기본적인 형태는 자료점의 집합에 다항식을 맞추는(fitting) 것이다. 수치적인 기법을 이용하여 문제를 해결할 때 근사값(approximation)을 얻는 방법과 정확도(accuracy)를 결정하는 두 가지 사항이 고려된다. 이러한 문제들 중 초기값 문제의 근사해의 정확도를 개선시키는데에 외삽법(extrapolation Methods)을 적용 한다[1].

주파수영역 분석을 실행하는 MOM(Method of Moments)은 적분 방정식의 표현을 사용 하는데, 브로드밴드(Broadband)에 대해서 이 접근법은 계산적으로 매트릭스(Matrix) 사이즈를 매우 크게 할 수 있는 단점이 있기 때문에 브로드밴드 분석을 위한 시간영역 적분 방정식 표현에 대하여는 MOT(Marching on in Time)를 사용한다. 이 알고리즘의 중요한 결점은 높은 주파수 진동의 형태에서 낮은 시간에 대해서는 진동 수가 많아지는 불안정한 상태가 일어난다는 것이다[2].

이를 위하여, 본 논문에서는 계산의 양을 최소로 하는 Bessel-Chebyshev 함수의 접근법을 제안한다. 이 접근법은 이른 시간과 낮은 주파수 정보의 발생에 의해서 이 방법으로 계산시 반복계산의 수렴속도가 무척 빠르다는 데 그 특징이 있다. 또한, Chebyshev 다항식은 특정 구간 내에서 이 함수가 직교하는 성질을 가지고 있고, 차수를 증가 시키면 오차가 작아진다는 특성이 있으며, 이른 시간과 낮은 주파수 데이터를 사용 하기 때문에 낮은 시간에 대한 안정된 브로드밴드 정보를 얻을 수 있는 이점이 있다. MOT 알고리즘이 안정된 이른 시간 데이터를 신속히 처리하는 동안 MOM 방법은 효과적으로 낮은 주파수 데이터를 발생 시킬 수 있다.

또한, 이른 시간과 낮은 주파수영역 응답을 동시 추정하기 위한 일반적인 분석의 접근을 제시한다. 그 처리하

는 구조는 대역이 제한된 함수에 의해서 야기 된다는 것을 고려한다. Bessel-Chebyshev 함수를 이용한 신호의 추정방법은 어떤 주어진 신호 초기의 시간영역 데이터 약 30%와 그와 같은 주파수영역 데이터의 양으로 푸리에 변환(Fourier transform)의 성질 비례성(scaling)을 이용하여, 확장의 계수와 비례 요소(scaling factor) l_1 에 의해서 동시에 두 영역을 추정할 수 있다. 이것은 시간영역에서 전체 응답의 정보를 얻거나 전체 주파수 대역에서의 전달 함수의 정보를 얻는 것이 동등하다.

이 추정법은 어떤 새로운 정보를 생성하지 않고 있다. 그것은 이른 시간 데이터가 결여된 높은 주파수 정보를 보상하고, 낮은 주파수 데이터는 낮은 시간의 정보를 서로 보상하고 있기 때문이다. 힐버트(Hilbert)와 푸리에 변환이 상보적인 데이터를 서로 양립함으로써, 추정을 행하는 것이다. 이 신호의 중요한 요건은 이른 시간과 낮은 주파수에 의해서 신속한 응답을 얻을수 있다는 환경에 있어서 주된 이슈가 된다.

본 논문의 구성은 서론에 이어 2장에서는 힐버트 변환에 의한 시간과 주파수 영역의 관계를 소개하고, 3,4장에서는 함수를 이용한 푸리에변환과 그것의 매트릭스 표현에 대해서 알아본다. 5장에서는 이 논문의 시간과 주파수 영역의 추정의 결과를 제시하며, 마지막으로 6장에서 결론을 맺는다.

2. 힐버트 변환(Hilbert Transform)

실시간에 발생하는 신호의 대부분은 복소함수로서 이를 주파수 평면에서 실수부, 허수부, 그리고 진폭변화 및 위상 변화 등으로 나타낼 수 있다. 실제 신호의 실수부나 허수부를 분석하는데 사용되는 힐버트 변환은 동일한 시간영역이나 주파수영역 자체 내에서 신호 변환을 가능케 하여 신호속에 내재된 성분을 추출하여 분석이 가능한 정보를 제공한다. 주어진 정보의 최소 사용을 위해, 그리고 주파수 영역에서 데이터의 원활한 연결성을 위해서

[3]에서 기술되어진 것과 같이 힐버트 변환에 의거한 방법을 사용한다. 이 방법은 시간영역 데이터가 인과(causal)를 이루고 있을때 주파수영역 데이터를 추정하기 위한 반복적 기술이다. 만약 기본적인 시간영역 데이터가 인과 이라면 그것은 주파수영역 응답의 실수부와 허수부는 힐버트 변환에 의해서 관계 되어진다는 특성을 사용한다[4]. 힐버트 변환의 이러한 특성은 진폭 또는 위상 변조된 신호 해석에 매우 유용하다. 이 방법의 상세한 기술은 [3],[5]에서 참조할 수 있다.

3. Bessel-Chebyshev 함수

Chebyshev 다항식은 직교하는 성질 때문에 임의의 구간에서 함수에 대한 최소제곱 근사식을 구하는데 편리하게 이용된다. 직교 기본 커널(Orthogonal basis kernel) $\phi_n(t, l_1)$ 에 의해서 표현 될 수 있는 시간의 시퀀스는 아래와 같다.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(t, l_1) \tag{1}$$

a_n 는 확장 계수이고, l_1 는 비례 요소이다. $J_n(t, l_1)$ 이 차수 n 의 제1종 Bessel 함수라고 하면, 이것은 $\phi_n(t, l_1) = t^{-1} J_n(t, l_1)$ 로서 직교 기본 함수를 선택할 수 있다. 확장된 함수는 아래와 같이 표현 된다.

$$x(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^{-1} J_n(t, l_1) \tag{2}$$

위 수식 (2)의 푸리에 변환은 아래와 같이 나타낼 수 있다[6].

$$X(f) = \sum_{n=0}^N a_n \frac{2i}{n} (-i)^n \left[1 - \left(\frac{f}{l_2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} U_{n-1}\left(\frac{f}{l_2}\right); |f| < l_2$$

$$= 0; |f| > l_2 \tag{3}$$

비례요소 $l_2 = \frac{1}{2\pi l_1}$ 라 할 때, 제2종 Chebyshev 다항식

$U_n(f)$ 는 아래와 같이 정의 된다.

$$U_n(f) = \frac{\sin[(n+1)\cos^{-1}f]}{(1-f^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{4}$$

이 표현에 있어서, 제1종 Chebyshev 다항식과 제2종 Chebyshev 다항식 사이에서의 연관성은 힐버트 변환이다. 그 식은 아래와 같다.

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2} U_{n-1}(y)}{y-x} dy = -\pi T_n(x) \tag{5}$$

제1종 Chebyshev 다항식 $T_n(f)$ 는 아래와 같이 정의 된다.

$$T_n(f) = \cos[n\cos^{-1}(f)] \tag{6}$$

그 결과 인과 시간의 신호와 그것의 푸리에 변환 (7),(8) 그리고 두 식의 관계 (9)는 아래와 같다.

$$x(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^{-1} J_n(t, l_1); t \geq 0 \tag{7}$$

$$X(f) = \begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n \frac{2}{n} (-i)^n \left\{ i \left[1 - \left(\frac{f}{l_2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} U_{n-1}\left(\frac{f}{l_2}\right) + T_n\left(\frac{f}{l_2}\right) \right\}; |f| < l_2 \\ 0; |f| > l_2 \end{cases} \tag{8}$$

$$t^{-1} J_n\left(\frac{t}{l_1}\right) \Leftrightarrow \frac{2i}{n} (-i)^n \left\{ i \left[1 - \left(\frac{f}{l_2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} U_{n-1}\left(\frac{f}{l_2}\right) + T_n\left(\frac{f}{l_2}\right) \right\}; t \geq 0, |f| < l_2 \tag{9}$$

비례요소 l_1 의 선택은 중요성을 가진다. 이것은 신호의 시간 영역에서의 표현과 주파수 영역에서의 표현이 서로 역수 관계에 있기 때문에 또한, l_2 에게 영향을 미친다. N의 결정은 시간과 주파수영역 샘플에 대한 주어진 정보의 충분한 사이즈를 결정할 수 있다. 확장의 계수는 CGM을 사용함으로써, 매트릭스 방정식의 풀이에 의해서 얻을 수 있다.

4. 매트릭스 표현(Matrix Formulation)

$$\begin{bmatrix} \phi_0(t_1, l_1) & \phi_1(t_1, l_1) & \dots & \phi_{N-1}(t_1, l_1) \\ \phi_0(t_2, l_1) & \phi_1(t_2, l_1) & \dots & \phi_{N-1}(t_2, l_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(t_M, l_1) & \phi_1(t_M, l_1) & \dots & \phi_{N-1}(t_M, l_1) \end{bmatrix}_{M \times N} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_M) \end{bmatrix}_{M \times 1} \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Re} \begin{bmatrix} \Phi_0(f, l_2) & \Phi_1(f, l_2) & \dots & \Phi_{N-1}(f, l_2) \\ \Phi_0(f_2, l_2) & \Phi_1(f_2, l_2) & \dots & \Phi_{N-1}(f_2, l_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(f_M, l_2) & \Phi_1(f_M, l_2) & \dots & \Phi_{N-1}(f_M, l_2) \end{bmatrix} \\ \text{Im} \begin{bmatrix} \Phi_0(f, l_2) & \Phi_1(f, l_2) & \dots & \Phi_{N-1}(f, l_2) \\ \Phi_0(f_2, l_2) & \Phi_1(f_2, l_2) & \dots & \Phi_{N-1}(f_2, l_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(f_M, l_2) & \Phi_1(f_M, l_2) & \dots & \Phi_{N-1}(f_M, l_2) \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2M \times N} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} \text{Re} \begin{bmatrix} X(f_1) \\ X(f_2) \\ \vdots \\ X(f_M) \end{bmatrix} \\ \text{Im} \begin{bmatrix} X(f_1) \\ X(f_2) \\ \vdots \\ X(f_M) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi^{(a,b)} & \Phi^{(a,b)} & \dots & \Phi^{(a,b)} \\ \Phi^{(a,b)} & \Phi^{(a,b)} & \dots & \Phi^{(a,b)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{(a,b)} & \Phi^{(a,b)} & \dots & \Phi^{(a,b)} \\ \Phi^{(a,b)} & \Phi^{(a,b)} & \dots & \Phi^{(a,b)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{(a,b)} & \Phi^{(a,b)} & \dots & \Phi^{(a,b)} \\ \Phi^{(a,b)} & \Phi^{(a,b)} & \dots & \Phi^{(a,b)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{(a,b)} & \Phi^{(a,b)} & \dots & \Phi^{(a,b)} \\ \Phi^{(a,b)} & \Phi^{(a,b)} & \dots & \Phi^{(a,b)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{(a,b)} & \Phi^{(a,b)} & \dots & \Phi^{(a,b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} x^{(a)} \\ x^{(b)} \\ \vdots \\ x^{(a)} \\ X(f) \\ \text{Re} \begin{bmatrix} X(f) \\ X(f) \\ \vdots \\ X(f) \end{bmatrix} \\ \text{Im} \begin{bmatrix} X(f) \\ X(f) \\ \vdots \\ X(f) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$x(t) = e^{-(0.033t)^2} \sin 0.25t \quad (t = 0 : 0.9 : 90) \tag{13}$$

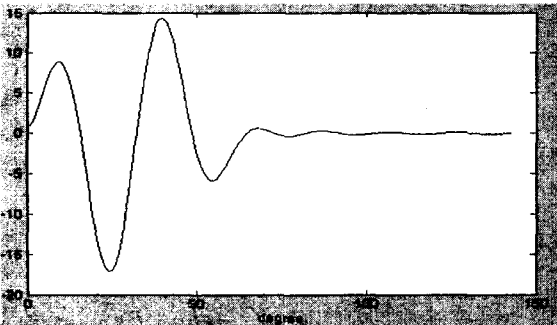
M_1 과 M_2 는 $x(t)$ 와 $X(f)$ 각각 함수에 대하여 주어진 시간과 주파수영역 샘플의 수 이다. 시간영역 데이터의 매트릭스 표현과 주파수영역 표현은 (10),(11)에서 나타낸다. 시간과 주파수영역 데이터의 두 매트릭스 표현의 조합은 식 (12)에서 나타내고 있다. N은 CGM 사용을 위해 정방향 매트릭스를 실행 한다. 즉 아래와 같이 나타

별 수 있다.

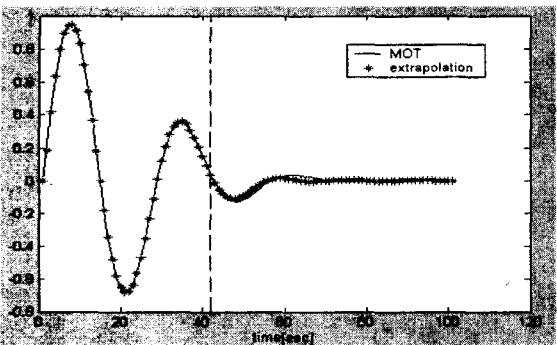
$$N = M_1 + 2M_2 \quad (14)$$

5. 구현 및 결과

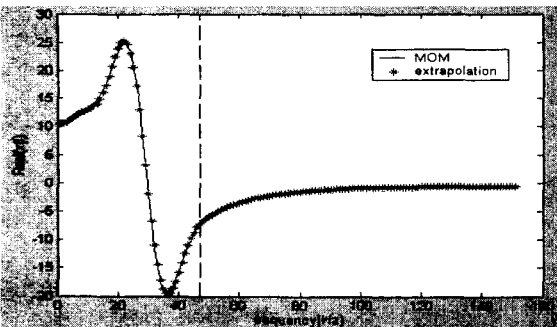
식 (13)을 이용하여 아래와 같이 Bessel 함수의 접근을 하였다. 그림 1은 Bessel 함수의 접근법을 이용한 확장의 계수를 나타내고, 그림2와 3,4는 시간영역 데이터 및 주파수영역 데이터에 대한 푸리에변환의 비례요소와 확장의 계수에 의해서 동시에 두 영역의 추정함을 나타내고 있다. 이것은 힐버트와 푸리에변환이 상보적인 데이터를 서로 양립함으로써, 추정을 실행하기 때문에 두 영역의 결여된 부분을 서로 보상할 수 있는 것이다.



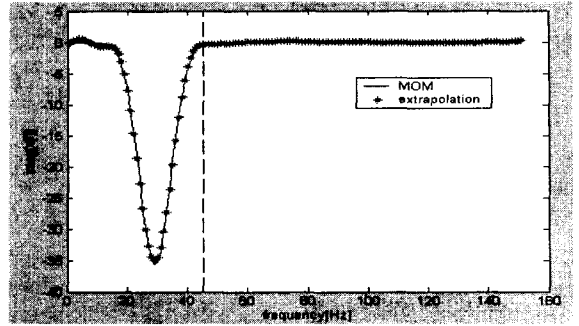
[그림 1] Bessel 함수를 이용한 확장의 계수



[그림 2] Bessel 함수를 이용한 시간영역 응답



[그림 3] Bessel 함수를 이용한 주파수영역 (real part)



[그림 4] Bessel 함수를 이용한 주파수영역 (imag part)

6. 결론

본 논문에서는 Bessel 함수의 접근법을 사용함으로써, 이른 시간과 낮은 주파수 데이터를 사용하는 시간과 주파수 영역에서 동시에 두 영역을 추정하기 위한 접근법과 시뮬레이션 결과를 나타 내었다. Bessel-Chebyshev 다항식 확장의 사용에 의해서 이것은 실행이 된다. 오직 이른 시간과 낮은 주파수 정보를 필요로 하기 때문에 계산의 결과는 최소량이 되고, 이로인해 신속한 신호의 처리 응답의 정보를 얻을 수 있다.

[참고문헌]

- [1] Robert J.Schilling, Sandra L.Harris "Applied Numerical Methods for Engineers", Brooks/Cole, 1999.
- [2] R. S. Adve, T.K. Sarkar, and O. M. Pereira-Filho, "Extrapolation of time-domain responses from three-dimensional conducting objects utilizing the matrix pencil technique," Trans. Antennas Propagat., Jan. 1997.
- [3] S.M Narayana, S. M. Rao, R. S. Adve, T. K. Sarkar, V. Vannicola, M. Wicks, and S. A. Scott, "Interpolation/extrapolation of frequency responses using the Hilbert transform," IEEE Trans. Microwave Theory Tech, Oct. 1996.
- [4] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, Discrete-Time Signal Processing · Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [5] S.M Narayana, T.K Sarkar, R.S Adve, M. Wicks, and V. Vannicola, "A comparison of two techniques for the interpolation/extrapolation of frequency responses," Digital Signal Processing, 1996.
- [6] Abramowitz M., Stegun I.A., Handbook of Mathematical Functions, Dover, 1970