Interval Method를 이용한 음함수 곡면의 렌더링

정재광[O], 노현아, 김재정
전남대학교 대학원 전산학과
chalgoguma@hanmail.net[O] , hyuna@dal.chonnam.ac.kr, jaykim@chonnam.ac.kr

Ray Tracing Implicit Surface Using Interval Method

Jae Kwang Chung[0], Hyuna Noh, Jay Jeong Kim
Department of Computer Science, Chonnam National University

요 약

부정형 물체의 모양을 모델링 하는데 긴요하게 쓰이는 일반적인 음함수 곡면은 골격요소의 종류를 다양하게 선택함에 따라 모델링의 기능이 향상되는 반면 렌더링은 상대적으로 어려워진다. 본 논문에서는 점(point)과 함께 선분이나 원 등이 혼합된 골격 요소로 구성된 음함수 곡면의 렌더링을 위하여 interval method를 이용하는 광선 추적법을 제안한다. interval method는 점이 아닌 다른 모양의 골격 요소에 적용할 때는 난이도가 훨씬 증가하지만 광선과의 교차점을 구하는 등의 상대적으로 어려운 계산과정을 효과적으로 단순화 할 수 있다는 장점이 있다.

1. 서 론

음함수 곡면(implicit surface)은 점이나 선분, 원, 또는 기타의 다양한 기하학적 도형을 골격 요소(skeletal primitives)로 사용하여, 정해진 에너지 밀도 함수에 의한 특정 임계값(threshold)을 만족하는 공간상의 점들의 집합으로 정의되는 곡면으로서 일반적으로 부정형 물체의 형상을 모델링 하는데 성능이 뛰어나며 또한 골격 요소 사이의 용이한 blending으로 유기체의 표현이나 뼈와 같은 골격을 가진 사람의 모델링, 근육의 표현 등의 모델링에 많이 이용되고 있는 기법이다.
그러나 음함수 곡면의 모델링 기능을 향상시키기 위해선 골격요소를 다양하게 사용할 수 있어야 하는데, 이처럼 단순한 점이 아닌 다른 타입의 도형을 골격 요소로 사용하게 되면 모델링 기능성은 좋아지는 반면 그만큼 렌더링 하기가 어려워진다.
광선 추적법으로 implicit surface를 렌더링 하는 방법은 여러가지가 있겠으나 광선과 곡면과의 교점을 구하는 과정에서 크게 두 종류로 요약된다. 첫째는 광선과의 교점을 수치해석적인 계산을 통해 직접 구하려는 방법이며 두 번째로는 직접 근을 계산하는 대신 간접적으로 근의 존재 유무만을 판별하는 방법으로서 주어진 초기 영역에서의 근의 존재 여부를 검사하여 근이 존재하는 영역을 계속적으로 분할하여 그 영역을 좁혀나가는 방법이다. 본 논문에서는 이와 같은 두번째 방법중의 하나로서 interval method를 이용하여 복잡한 골격 요소로 구성된 implicit surface를 렌더링 하는 방법을 제안하였으며 구현된 알고리즘으로 생성된 샘플 이미지를 제시한다.

2. 음함수 곡면

음함수곡면(implicit surface)은 3차원 공간상에서 $F:\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$인 함수 $F(x,y,z)$를 골격 요소로부터의 거리에 반비례하는 에너지의 강도를 나타내는 에너지 밀도 함수(field function)로 하여 실수 임계값(threshold) T에 의해 정의 되어지는 곡면이다.

$$F(x,y,z)-T=0$$

따라서 임계값 T는 필드 함수 값이 T가 되는 점 $P(x,y,z)$들의 집합인 등가면(isosurface)을 정의하게 된다. 임계값 T가 작을수록 에너지 소스에서 등가면까지의 거리는 멀어지게 되므로 필드함수는 에너지 소스와 공간상의 한 점 사이의 거리 r에 따른 함수 $F(r)$로 표현할 수 있다.
1986년 Blinn[1]에 의해 제안된 필드함수 $F(r)=e^{-r^2}$는 blobby model이라고 부르며 원자의 전자구름이나, 분자의 물리적인 ball-and-stick모델에 기초를 두고 있다. 따라서 자기장, 중력장 같은 에너지 장을 표현하는데 자연스러우며 지수함수 형태의 간단한 함수로 정의되는 장점이 있다.
그러나 지수함수의 특성상 공간적으로 무한대의 거리에 있는 점에서도 에너지 값이 영(zero)이 되지 않는 단점이 있다.
이러한 단점 때문에 지수함수를 대처할 수 있는 유사 필드함수를 개발하려는 노력이 계속되어 왔으며 Nishimura의 메타볼(metaball)과 Wyvill의 soft object등이 그것이다.

3. 골격 요소(skeletal primitives)

골격 요소는 점, 선분, 곡선, 원, 다각형등과 같은 다양한 모양을 갖는 에너지 소스로서 골격으로부터의 거리에 반비례하는 필드값에 의해 정의되는 음함수 곡면을 나타내게 된다. 따라서 어떤 모양의 골격 요소든지 그 골격 요소로부터의 거리를 계산하는 함수만 주어지면 음함수 곡면의 기본도형이 될 수 있다. 골격 요소로서 다양한 모양의 기하학적 도형들을 이용할 수 있다면 점 요소만을 사용하는 경우에 비해 원하는 모양을 모델링하기가 훨씬 더 쉬워지게 되며 애니메이션 등에서도 잘 응용될 수 있다. 다음은 몇 가지 기본 도형들을 골격 요소로 사용할 때 공간상의 한 점 $\mathbf{P}$에서 골격요소까지의 거리를 계산하는데 고려해야 할 사항들을 정리한 것이다.

3-1 점(point)

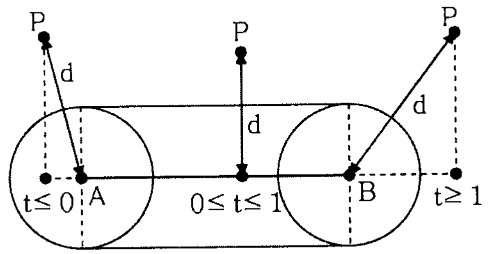
골격형 기본도형이 점인 경우는 3차원 공간상의 한 점 $\mathbf{C}$로 정의되며, 등가면은 구형(ball)을 나타낸다. 점 $\mathbf{C}$로부터 공간상의 한 점 $\mathbf{P}$까지의 거리를 다음과 같이 표기한다.

$$d=|\mathbf{C}-\mathbf{P}|$$

3-2 선분(line segment)

골격 요소가 선분인 경우는 선분의 양 끝점 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{B}$로 정의되며, 등가면은 capsule모양을 나타낸다. 점 $\mathbf{P}$에서 선분 또는 선분의 연장선상에 내린 수선의 발을 $\mathbf{L}$이라하고 $\mathbf{M}$을 벡터

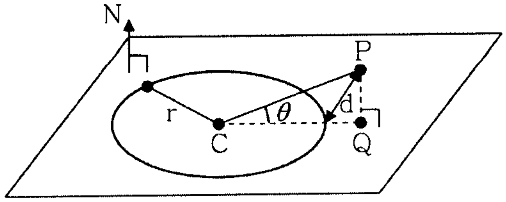
$\mathbf{B}-\mathbf{A}$라 하면 $\mathbf{L}(\mathbf{t})=\mathbf{A}+\mathbf{tM}$으로 나타낼 수 있다. 이 때 점 $\mathbf{P}$의 선분에 대한 상대적인 위치에 따라서 t값이 달라지므로 아래 그림에서처럼 거리 d는 $\mathbf{P}$의 위치에 따라 다르게 구해진다.



$$d=\begin{cases} |\mathbf{P}-\mathbf{A}|, & t\le 0 \\ |\mathbf{P}-(\mathbf{A}+t\mathbf{M})|, & 0\le t\le 1 \\ |\mathbf{P}-(\mathbf{A}+\mathbf{M})|, & t\ge 1 \end{cases}$$

3-3 원(circle)

원 모양의 골격요소는 원의 중심 $\mathbf{C}$, 반지름 r, 원을 포함하는 평면의 단위 법선 벡터 $\mathbf{N}$으로 정의되며, 등가면은 torus모양이 된다.



$\mathbf{P}$에서 원을 포함하는 평면에 내린 정사영을 $\mathbf{Q}$라 하고 벡터 $\mathbf{W}$를 중심 $\mathbf{C}$에서 $\mathbf{Q}$로 가는 단위벡터라 하면, 즉

$$\mathbf{W}=\frac{\mathbf{Q}-\mathbf{C}}{|\mathbf{Q}-\mathbf{C}|} \qquad (A.1)$$

그러면 원과 점 $\mathbf{P}$사이의 거리의 제곱은 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$d^2=|\mathbf{C}-\mathbf{P}+r\mathbf{W}|^2$$

위의 식을 풀면,

$$d^2=r^2+|\mathbf{C}-\mathbf{P}|^2-2r\mathbf{W}\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{C}) \qquad (A.2)$$

이때 $\mathbf{Q}-\mathbf{C}=\mathbf{P}-\mathbf{C}-(\mathbf{N}\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{C}))\mathbf{N}$ 이며

$$(\mathbf{Q}-\mathbf{C})\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{C})=|\mathbf{Q}-\mathbf{C}||\mathbf{P}-\mathbf{C}|\cos\theta$$
$$=|\mathbf{Q}-\mathbf{C}||\mathbf{Q}-\mathbf{C}|=|\mathbf{Q}-\mathbf{C}|^2$$

이므로 (A.1) 으로부터

$$\mathbf{W}\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{C})=\frac{(\mathbf{Q}-\mathbf{C})\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{C})}{|\mathbf{Q}-\mathbf{C}|}=\frac{|\mathbf{Q}-\mathbf{C}|^2}{|\mathbf{Q}-\mathbf{C}|}$$
$$=|\mathbf{Q}-\mathbf{C}|=|\mathbf{P}-\mathbf{C}-(\mathbf{N}\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{C}))\mathbf{N}|$$

를 얻는다. 이를 (A.2)에 대입하면

$$d=\sqrt{r^2+|C-P|^2-2r|P-C-(N\cdot(P-C))N|}$$

4. Interval Method

등가면이 광선 $R(t)$와 교차하는 점은 다음과 같은 t에 대한 방정식으로 표현된다.

$$f(p(x,y,z))=\sum_{i=1}^{n}F_i(x,y,z)-T=0$$
$$p(x,y,z)=R(t)$$
$$f(R(t))=0$$

즉 t 에 관한 방정식 $f(R(t))=0$ 의 근 중에서 최소가 되는 t를 구하여 등가면을 렌더링하게 되는데, 본 논문에서는 interval method를 이용하여 근을 찾는 방법을 제안하였다. interval method는 실수의 범위를 하나의 interval로 정의하여 실수 연산과 비슷하게 interval 자체의 연산을 시행하는 방법으로서 interval X 를 다음과 같이 정의할 때

$$X=[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\le b\} \quad a,b\in\mathbb{R},\ a\le b$$

그러한 interval간의 기본적인 몇 가지 연산들을 정의하면 다음과 같다[2].

표 1. 대표적인 interval연산자 정의

$X=[a,b],\quad Y=[c,d]$
$X+Y=[a+c,b+d]\qquad X-Y=[a-c,b-d]$
$X\times Y=[min\{ab,ad,cb,cd\},max\{ab,ad,cb,cd\}]$
$\frac{1}{X}=\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$ 단, $a>0$ or $b<0$
$e^X=[e^a,e^b]$
$\sqrt{X}=[\sqrt{a},\sqrt{b}]$ 단, $a,b>0$
$X^2=[min(a^2,b^2),max(a^2,b^2)]$

예를 들면 2차 함수 $f(x)=x(x-1)$에 대해 변수 x의 interval이 $X=[0,1]$으로 주어졌을 때 그에 대한 함수의 interval 연산은 다음과 같이 시행된다.

$$f(x)=x(x-1)$$
$$f([0,1])=[0,1]([0,1]-1)$$
$$=[0,1][-1,0]$$
$$=[-1,0]$$

이때 만약 임계값 T 가 interval 연산의 결과인 함수 interval [-1, 0]에 포함된다면 $X=[0,1]$는 함수 $f(x)=T$ 의 근을 포함할 수 있다는 뜻이 된다. 따라서 더욱 정확한 근을 찾아내기 위해서는 interval X를 절반으로 분할하여 좁혀나가면서 위와 같은 함수 interval 연산을 반복하고 T의 포함여부를 확인한다. T값이 포함되지 않는다면 그 구간에는 근이 없다는 의미이므로 버리게 되지만 T값이 포함된다면 그 구간 내에 근이 존재할 가능성이 있다는 의미이므로 그 구간을 다시 나누어 앞의 과정을 반복한다. 이러한 계산은 재귀적 함수로 쉽게 표현될 수 있으며 주어진 에러 범위 까지 연산을 반복하여 최소의 interval까지 좁히게 되면 이 interval 내의 어느 한 값 (보통 중간값)을 $f(x)=T$의 근으로써 사용하게 된다[3].

이처럼 interval method는 방정식의 근을 직접 계산하는 다른 방법과는 달리 음함수 곡면의 필드함수처럼 복잡한 함수의 계산을 직접 할 필요가 없다는 장점을 지닌다.

5. interval method를 이용한 음함수 곡면 렌더링

5.1 광선과의 교차점 계산

4장의 예제 함수에서 설명한 interval method는 3차원 음함수 곡면에서도 동일하게 적용될 수 있다. 3개의 변수로 이루어진 음함수 곡면 $f(p(x,y,z)) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x,y,z) - T = 0$ 을 광선 추적법으로 렌더링하기 위해 interval method를 적용하려면 먼저 광선과 음함수 곡면이 만나는 교점을 구하는 방정식을 구하여 그 방정식의 변수에 대한 interval을 설정하여 앞서와 같은 알고리즘을 적용하도록 해야 한다. 광선 추적법의 경우에는 음함수 곡면과 광선이 교차하는 지점인 $p(x,y,z)$에 $R(t)$를 대입하면 $f(R(t)) = 0$ 라는 하나의 변수 t로 이루어진 단일 변수 함수가 얻어지며, 광선과 가장 먼저 교차하는 지점만 렌더링에 필요하므로 $t > 0$ 인 최소의 근만 구하면 된다.

시점에서 스크린상의 한 픽셀로 향하는 광선은 r_o이 광선의 시점이고 r_d가 광선의 방향 벡터일 때 $R(t) = r_o + tr_d$ 로 표기된다. 초기 interval을 구하기 위해선 공간상에 정의되어 있는 모든 음함수 곡면을 포함하는 최소의 bounding box를 구한 후 그 bounding box와 광선이 교차하는 t의 범위를 구하여 그 범위를 t의 초기 interval 로 정의한다. 그 초기 interval 로부터 interval method를 적용하여 가장 작은 양의 근 t 를 구하게 되면, 광선 $p = R(t) = r_o + tr_d$ 에 대입하여 공간상의 광선과 교차하는 지점 $p(x,y,z)$를 구할 수 있게 된다.

5.2 법선벡터 계산

광선과의 교점을 구하게 되면 shading을 위하여 그 교점에서의 법선벡터(normal vector)를 구해야한다. 보통 등가면의 한 지점에서의 함수 gradient를 법선벡터 **N**으로 사용하게 되는데 음함수 곡면이 다음과 같을 때

$$f(p(x,y,z)) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x,y,z) - T = 0$$

법선벡터는 다음과 같이 함수 $f(x,y,z)$ 의 gradient로 나타내진다.

$$\mathbf{N}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

5.3 음함수 곡면의 색상 혼합(color blending)

공간상에 n개의 골격 요소가 존재할 때 각각의 골격 요소 i의 색상을 C_i로 하면, 등가면과 광선이 교차하는 공간상의 한점 $p(x,y,z)$에서의 색상 C는 다음과 같이 정의된다.

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i \frac{F_i(x,y,z)}{T}$$

즉, 점 $p(x,y,z)$에의 각각의 음함수 곡면의 필드함수 값의 기여도가 자신만의 색의 기여도를 결정한다고 볼 수 있다.

6. Blinn의 지수함수 음함수 곡면 렌더링 구현

본 논문에서는 Blinn의 지수함수 $F(r) = e^{-r^2}$ 를 음함수로 사용하였고, 골격형 구조요소로서 점, 선분, 원을 사용하였다.
또한 bounding box를 이용하여 초기 interval 을 구하였으며 아래의 방정식에 interval method를 적용하여 근 t를 구하였다.

$$f(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} e^{-r^2} - T$$

법선벡터의 계산은 앞서 언급한 편미분(gradient)을 사용하는 대신 교차점 $p(x,y,z)$에서 x, y, z축 각각 좌우로 미세한 값 d만큼 떨어진 거리에서의 필드함수 값을 구하여 필드함수 값의 차이로부터 벡터 성분을 근사하여 다음과 같이 법선벡터를 구하였다.

$$N_x = f(x-d,y,z) - f(x+d,y,z)$$
$$N_y = f(x,y-d,z) - f(x,y+d,z)$$
$$N_z = f(x,y,z-d) - f(x,y,z+d)$$

아래의 샘플 이미지들은 OpenGL API로 구현한 결과이며 그림 1은 점 골격 요소 4개에서 임계값 0.55에 의한 이미지이며 그림 2 는 원 골격 요소 1개와 선분 골격 요소 2개에서 임계값 0.65에 의한 이미지다. 또한 서로 다른 색의 골격요소로부터 color blending의 효과도 잘 이루어짐을 볼 수 있다.


그림 1


그림 2

7. 결론

음함수 곡면은 모델링과 시뮬레이션, 애니메이션 등의 영역에서 널리 쓰이고 있다. 본 논문에서는 음함수 곡면의 광선 추적법에 의한 렌더링에서 광선과 등가곡면이 교차하는 점을 계산하는 과정에 interval method를 이용하는 법을 소개하였다. interval method는 광선과의 교차점 계산에서 근을 구하는데 다른 방법과는 다르게 방정식을 풀기 위한 어렵고 복잡한 계산을 직접적으로 행해야 할 필요가 없다는 장점을 지닌다.
앞으로 더욱 다양한 모양의 골격 요소 기본도형을 추가하는 연구와 가상현실에서도 사용할 수 있도록 실시간 렌더링 하는 기법의 연구가 진행되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] Blinn, J. F., "A Generalization of Algebraic Surface Drawing," ACM Transactions on Graphics, Vol.1, No.3, pp235-256, July 1982.
[2] Nilo Stolte and Arie Kaufman., "Discrete Implicit Surface Models Using Interval Arithmetics", In Second CGC Workshop on Computational Geometry, October 1997.
[3] A. de Cusatis J., L.H. de Figueiredo, M. Gattass, "Interval methods for raycasting implicit surfaces with affine arithmetic", *Proceedings of SIGGRAPH'99, pp65-71, October 1999.*