선형방정식의 재구성을 이용한 충돌반응 속도 개선

*정대현⁰ **김은주 *유관우
*경북대학교 컴퓨터공학과
**동명정보대학교 정보통신공학과
ktshadow@hosanna.net⁰, dmswnakdmf@hanmail.net , kwryu@hosanna.net

Faster collision response through reformulating linear equations

*Dae-Hyun Jeong⁰ **Eun-Ju Kim *Kwan-Woo Ryu
*Dept. of Computer Engineering, Kyungbook National University
**Dept. of Information & Communication Engrineering, Tongmyong University of Information Technology

요 약

컴퓨터 그래픽스에서 물리기반 모델링을 사용한 다관절체의 움직임을 구하는 것은 중요한 문제이다. 다관절체가 움직이는 동안 충돌이 발생했을 때 충돌반응 시간이 많이 걸린다면 그만큼 시뮬레이션이 자연스럽지 못하다. 본 논문에서는 충돌반응에서 중요한 선형방정식의 해를 구하는 시간을 단축시킴으로써 짧은 시간안에 다관절체의 충돌을 처리할 수 있는 방법을 제시한다. 이러한 결과는 게임이나 그래픽 툴등에서 적용이 가능하다.

I. 서론

컴퓨터 그래픽스에서 사용되는 동작 제어 기술들 중의 하나인 물리 기반 모델링 기법은 일련의 물리 법칙으로 물체들의 움직임을 나타내는 방법이다. 움직임이 자연스럽고, 사용자의 입력에 따라 다양한 동작을 생성할 수 있다[1].

여러 물체가 움직이면, 물체들이 서로 인접하는 경우가 생기는데 이 경우를 충돌이라 한다. 이 때 그냥 두면 물체들이 서로 겹쳐지게 되므로, 충돌에 대한 적절한 반응이 필요하다[2,7,8]. 그래서 이러한 충돌을 감지하는 충돌감지(collision detection)기능과 충돌하는 물체들의 움직임을 나타내는 충돌반응(collision response)기능이 필요하다. 본 논문에서는 충돌반응에 대해서 다루고 물체들은 강체(rigid body)라고 가정한다.

실제 세계에서는 여러 개의 물체들이 조인트(joint)로 연결된 형태인 다관절체(articulated body)들이 대부분이다. 이러한 다관절체들끼리의 충돌 시에는 서로 직접적으로 충돌하지 않은 물체들에 대해서도 제어가 필요하다. 왜냐하면 dynamics에서 조인트들은 물체들의 가속도에 의해 유지되는데, 충돌시에는 속도를 급격하게 변화시키므로 조인트가 깨지게 되기 때문이다[4,6].

다관절체에 대한 충돌반응모델중 대표적인 것이 Moore의 모델이다[3,5]. 이 방법에서는 충돌시의 주어진 모든 물체들에 대한 물리 조건들, 충격력과 조인트에 대한 조건들을 하나의 선형방정식(linear equation)으로 표현한다. 충돌이 일어난 후의 각 물체들의 움직임은 이 선형방정식의 해를 이용하여 제어한다.

본 논문에서는 효과적인 충돌반응방법을 제시한다. 충돌반응에서는 선형방정식의 해를 구하는 것이 가장 시간이 많이 걸리는 부분이다. 이 선형방정식의 구성에 따라 해를 구하는 시간이 달라진다. 본 논문에서는 여러 구성방법 중 가장 빠른 구성방법을 통해서 실시간으로 선형방정식을 풀 수 있도록 한다. 이러한 결과들은 다관절체들의 충돌을 효과적으로 처리할 수 있게 한다.

II. 충돌 모델

1.표기(notation)

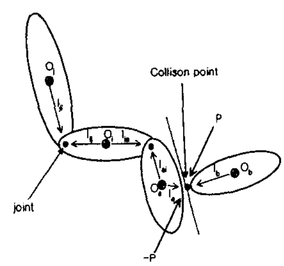

그림 1. 다관절체들의 충돌 모델

충돌하는 다관절체가 총 n개의 물체로 이루어져 있고, 각 물체는 강체라고 가정한다. 또한 물체들의 연결상태는 싸이클이 없다고 가정한다. 각 물체 i의 무게, 모멘트는 각각 m_i, I_i로 표시한다. 충돌 전의 물체 i가 가지고 있는 선속도(linear velocity)와 각속도(angular velocity)는 각각 v_i, ω_i 라고 하고, 충돌후의 속도를 각각 $\overline{v_i}$와 $\overline{\omega_i}$로 둔다. 충돌 지점에서 물체에 가해지는 충격력은 P, 조인트 c_{ij}에서의 조인트 충격력을 P_{ij} 라고 둔다.

2. 다관절체에 대한 충돌반응조건

충돌을 처리하기 위해서는 우선 각 물체에 대한 운동량 보존 법칙을 적용하여야 한다. 즉, 충돌 전후의 각 물체의 운동량 변화는 충돌시 가해지는 충격력들의 합과 같다. 직접적으로 충돌하는 2개의 물체 a에 대해서는 아래와 같은 식이 구해진다[4]. 여기서 Γ_{ij}는 3×3 행렬로서, l_{ij}와 임의의 벡터가 외적한 결과는 Γ_{ij}를 곱한 것과 같다[3,9].

$$m_a(\overline{v_a} - v_a) = P + \sum_{i=1}^{n} P_{ai} \qquad (1)$$

$$I_a(\overline{\omega_a} - \omega_a) = l_a \times P + \sum_{i=1}^{n} l_{ai} \times P_{ai} \qquad (2)$$

물체 a를 제외한 나머지 물체들은 충돌에 의한 충격력 P의 영향을 직접 받지 않으므로, 그 운동량의 변화량을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$m_i(\overline{v_i} - v_i) = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \qquad (3)$$

$$I_i(\overline{\omega_i} - \omega_i) = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} \times P_{ij} \qquad (4)$$

다음으로는 물체 a가 물체 b의 표면에 충돌하는 순간의 탄성을 고려하여야 한다. 충돌 평면에 수직인 단위 벡터를 N, 충돌 평면에 접하면서 서로 수직인 단위 벡터를 각각 T, R이라 하면, 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$[(\overline{v_a} + \overline{\omega_a} \times l_a) - (\overline{v_b} + \overline{\omega_b} \times l_b)] \cdot N$$
$$= -\varepsilon[(v_a + \omega_a \times l_a) - (v_b + \omega_b \times l_b)] \cdot N \qquad (5)$$

마지막으로 충돌 시의 마찰을 고려하여야 한다. sticking case, sliding case의 2가지 경우가 생긴다. 각각의 경우에 수식이 다르다. 여기서는 sticking case만을 가정하기로 한다.

$$[(\overline{v_a} + \overline{\omega_a} \times l_a) - (\overline{v_b} + \overline{\omega_b} \times l_b)] \cdot T = 0 \qquad (6)$$

$$[(\overline{v_a} + \overline{\omega_a} \times l_a) - (\overline{v_b} + \overline{\omega_b} \times l_b)] \cdot R = 0 \qquad (7)$$

끝으로, 조인트의 성질에 의해서 조인트에 대한 조건식을 유도한다. 다양한 조인트들에 대해 그 조인트 조건식들은 다 다르다. 지면관계상 본 논문에서는 점대점 조인트만을 가정하기로 한다. 점대점(point to point) 조인트 조건식은 다음과 같다.

$$\overline{v_i} + \overline{\omega_i} \times l_{ij} = \overline{v_j} + \overline{\omega_j} \times l_{ji} \qquad (8)$$

3. 선형방정식의 구성과 풀기

충돌하는 다관절체들이 모두 m개의 조인트, n개의 물체로 구성된다고 가정한다. 그러면 우리가 구해야 하는 모든 미지수는 충격력 성분인 P, m개의 조인트 c_{ij} 에서의 P_{ij} , n개의 물체 각각에 대한 속도성분인 $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}$ 과 각속도 성분인 $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, \ldots, \overline{\omega_n}$ 이다. 수식 (1)에서 (6)까지는 각 물체들에 대한 운동량 보존의 법칙을 나타내는 수식, 각 조인트에서 조인트 조건식들, 마찰식을 조합하면 일차연립방정식들이 나온다. 이 일차연립방정식들에서 계수와 상수항만을 나타낸 확대행렬(augmented matrix)을 만들어내고, 거기서 계수만으로 된 계수행렬(coefficient matrix) A를 구할 수 있다. 우리가 구하기 원하는 충돌후의 각 물체의 선속도, 각속도, 충격력등을 미지수들의 벡터 x로 두고, 상수항을 벡터 b로 두면 Ax = b형태의 선형방정식이 나온다.

III. 선형방정식의 해구하기

1. 블록 행렬(block matirx)를 이용

구해진 선형방정식 Ax=b에서, A행렬은 희소한(sparse) 형태이므로 각 원소들을 3×3 크기로 묶어서 처리할 수 있다. 이러한 블록 행렬방법은 원래의 가우스 소거법에 비해 불필요한 연산을 최소화하고, 각 원소를 linked list로 구성하면 메모리의 크기도 줄인다.

구현한 결과 단순한 모델일 경우에도 각 원소들을 3×3 크기로 묶어서 처리하지 않은 경우에는 충돌반응에 있어서 끊김 현상이 일어나게 되는데 그만큼 시간이 많이 걸린다는 것을 말한다. 각 원소들을 3×3 크기로 묶어서 선형방정식을 푸는 것은 매우 효과적인 방법이다. 이 후로는 선형방정식을 풀 때 각 원소들을 3×3 크기로 묶어서 푼다고 전제를 한다.

2. 행렬 A의 구성모델

선형방정식을 풀 경우에 그 선형방정식을 어떻게 구성하느냐에 따라서도 속도가 많이 좌우할 수 있다. Moore는 이러한 선형방정식을 구성하는 방법을 제시하면서 이론적으로는 약 선형시간에 풀 수 있다고 하였다[3]. Moore의 구성방법에서는 물체의 위상에 따라 각 물체를 숫자매김한 뒤, 오름차순으로 물체들의 운동량보존식, 조인트보존식을 배치한다. 본 논문에서는 예상할 수 있는 선형방정식 구성 모델을 나눠본 뒤 각 모델에 따라서 시간을 측정하였다.

선형방정식이 주어졌을 때 행렬 A를 구성하는 모델은 3가지정도 생각할 수 있다. 하나는 Moore가 제시한 모델로서 주어진 물체의 위상을 사용하는 모델이다. 이론적으로는 대략 선형시간이 걸린다. 이 방법을 A라고 한다. 또 하나는 물체에 대한 운동량보존식들을 먼저 배치한 다음, 조인트조건식을 배치하는 모델이다. 이 모델을 B라고 둔다. 마지막으로 B와 반대로 조인트에 대한 보존식을 먼저 두고, 물체의 운동량보존식들을 배치하는 모델이다. 이것을 C라고 한다.

테스트할 데이터는 3가지가 있다. 이후에는 위 세가지 A, B, C 모델을 사용하여 각각 주어진 물체들에 대한 충돌반응시간을 측정한 결과이다.

(1) 간단한 물체간의 충돌

(a) 충돌전 (a) 충돌후

그림 2. 간단한 다관절체들의 충돌

그림 2는 간단한 두 개의 다관절체의 충돌반응속도이다.

선형방정식 모델	충돌반응시간(초)
A	0.03
B	0.01이하
C	0.01이하

(2) 복잡한 트리 위상의 물체간의 충돌

(a) 충돌전 (b) 충돌후

그림 3. 복잡한 다관절체들의 충돌

그림 3과 같이 20개 이상의 강체를 트리위상으로 가지는 2개의 다관절체가 충돌할 때 걸리는 시간을 측정하였다.

선형방정식 모델	충돌반응시간(초)
A	0.6
B	0.01
C	0.05

위 모델에서 강체의 수가 더 많아질수록 더욱더 충돌반응의 시간차가 많아졌다. 위 결과로 볼 때 방법 B가 가장 효율적인 방법이라고 할 수 있다.

(3) 트리 위상이 아닌 물체간의 충돌

(a) 충돌전 (b) 충돌후

그림 4. 트리위상이 아닌 다관절체들의 충돌

다관절체의 위상이 트리가 아니면 충돌반응에 있어서 선형방정식을 푸는 과정에서 많은 원소들이 새롭게 생김으로써 시간이 추가로 많이 걸린다. 이러한 문제가 있기 때문에 트리 위상인 모델과는 차이가 있다. 그래서 이러한 모델들에 대해서도 충돌반응시간을 측정하였다.

선형방정식 모델	충돌반응시간(초)
A	0.15
B	0.01이하
C	0.02

충돌반응시간을 측정한 결과 여전히 방법 B가 효과적으로 선형방정식을 푸는 모델이라는 것을 알 수 있다. 마찬가지로 강체의 수를 늘릴수록 충돌반응시간의 차이는 더 심해진다.

실험들을 종합해 본 결과 충돌반응에 있어서는 모델 B가 가장 효과적인 방법이라고 할 수 있다. 대부분의 경우에 있어 각 원소들을 3X3행렬로 묶은 다음 모델 B로 선형방정식을 구성할 경우, 충돌반응시간은 0.05초 이하로 걸린다. 따라서 거의 충돌반응이 거의 영향을 주지 않으면서 다관절체의 다이나믹스를 구현할 수 있다는 것을 알 수 있다.

IV. 결론

본 논문에서는 다관절체에 대한 충돌반응시간을 효과적으로 줄일 수 있는 방법을 제시하였다. 본 논문에서 제시한 충돌반응방법을 이용하면, 실세계의 물체들에 대한 효과적인 충돌반응을 기존의 dynamics system에서 사용할 수 있다.

변형가능모델에 있어서도 충돌반응과 마찬가지로 선형방정식을 풀게 된다. 가장 간단한 방법을 사용하더라도 일반 PC에서는 실시간에 선형방정식을 푼다는 것은 쉽지 않은 일이다. 그래서 선형방정식이 주어졌을 때, 그 행렬의 성질을 잘 이용하여 실시간으로 풀 수 있음으로써 변형을 실시간에 가능하도록 하는 것이 앞으로의 개선과제이다.

[참고문헌]

[1] D. Hearn and M. P. Baker, "*Computer Graphics*", Prentice-Hall, pp 393-395, 1997.

[2] J. Hahn, "Realistic Animation of Rigid Bodies", *SIGGRAPH '88*, pp.1-5, 1988.

[3] M. Moore and J. Wilhelms, "Collision Detection and Response for Computer Animation", *Computer Graphics*, vol.22, pp.289-298, 1988.

[4] D. Baraff and A. Witkin, "Physically Based Modeling", *SIGGRAPH Course Notes*, pp D32-D34, 1997.

[5] D. Baraff "Linear-Time Dynamics using Lagrange Multipliers" , *SIGGRAPH '96*, pp.137-146, 1996.

[6] R. Featherstone, "Robotic Dynamics Algorithms", Kluwer, 1987.

[7] B. Mirtich and John Canny, "impulse-based Simulation of Rigid Bodies", *Proc. of 1995 Symposium on Interactive 3D Graphics*, pp. 181-188, April 1995.

[8] D. Baraff, "Analytical Methods for Dynamic Simulation of Non-penetrating Rigid Bodies", *SIGGRAPH '89*, July 1989.

[9] 정대현, 백낙훈, 이종원, 유관우, "다양한 조인트에 대한 충돌 반응", 99가을학술발표논문집, 26,2, 613-615, 99.10.22, 한국정보과학회