

## 평균곡률 확산을 이용한 잡음감소 기법

예철수, 정헌석, 김성종, 현득창  
극동대학교 정보통신학부

Tel: 043-879-3695, Fax: 043-879-3694

### Noise reduction method using mean curvature diffusion

Chul-Soo Ye, Hun-Suk Chung, Seong-Jong Kim, Deuk-Chang Hyun  
Dept. of information & Telecommunication, Far East University  
csye@kdu.ac.kr

#### Abstract

Anisotropic diffusion is a selective smoothing technique that promotes smoothing within a region instead of smoothing across boundaries. In anisotropic diffusion, the rate of smoothing is controlled by the local value of the diffusion coefficient chosen to be a function of the local image gradient magnitude. El-Fallah and Gary E. Ford represented the image as a surface and proved that setting the inhomogeneous diffusion coefficient equal to the inverse of the magnitude of the surface normal results in surface evolving speed that is proportional to the mean curvature of the image surface. This model has

the advantage of having the mean curvature diffusion (MCD) render invariant magnitude, thereby preserving structure and locality. In this paper, the proposed MCD model efficiently reduces diffusion coefficient at the thin edges using the smoothness of the surface.

#### 1. 서론

Anisotropic diffusion은 잡음 제거, 영상 분할, 에지 검출, 그리고 영상 개선을 위한 매우 유용한 방법으로 알려졌으며 많은 관련 연구가 이루어져 왔다.

Anisotropic diffusion을 통해 영상  $I_0(x, y)$ 는 식 (1)로 주어지는 편미분방정식을 통해 확산된다.

$$\frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} = \nabla \cdot [c(|\nabla I(x, y, t)|)\nabla I(x, y, t)]$$

$$I(x, y, 0) = I_0(x, y). \quad (1)$$

확산계수  $c(|\nabla I|)$ 는 그레디언트의 크기에 관한 함수이며 영상에서 밝기값의 변화가 적은 부분에서는 큰 값을 갖도록, 에지 등과 같이 밝기값의 변화가 많은 부분에서는 작은 값을 갖도록 한다.

대표적인 확산 모델인 Perona-Malik 방법 [1]은 확산의 정도를 그레디언트의 크기를 이용하여 조절한다. 그레디언트 크기가 임계값보다 크면 확산을 멈추고 임계값보다 작으면 확산이 진행되어 영상을 smoothing 시킨다. Alvarez [2]와 Weickert [3]는 그레디언트의 크기와 방향을 함께 고려하여 확산시키는 모델을 제안하여 그레디언트 방향으로는 확산을 제한시키고 에지에 평행한 방향으로는 확산을 진행시키는 방법을 제안하였다. El-Fallah와 Ford의 방법 [4]은 곡면의 평균곡률에 비례하는 속도로 곡면을 확산시켜서 에지 주변의 잡음은 제거하고 에지는 확산의 영향을 받지 않도록 한다. 이 방법은 잡음을 효과적으로 제거하지만 에지 두께가 얇은 경우에는 성능이 저하되는 단점이 있다.

본 논문에서는 기존의 평균곡률 확산을 개선하여 얇은 에지에 대해서도 우수한 성능을 보이는 2차원 마스크의 구현 방법과 실험 결과를 소개한다.

## 2. 평균곡률 확산

평균곡률 확산은 anisotropic diffusion

모델을 영상의 밝기값에 대한 미분 방정식으로 보는 대신에 영상의 밝기값을 공간에 놓인 곡면으로 보고 이 곡면을 확산시킨다. 영상을 공간에 놓인 곡면으로 나타내기 위해서 식 (2)의 함수  $g$ 를 정의하면 곡면  $S$ 는

$$g(x, y, z) = z - I(x, y) \quad (2)$$

$$S: g(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

와 같이 정의된다. Perona-Malik 모델과 비교했을 때 이 모델의 장점은 식 (4)와 같이 곡면의 그레디언트의 크기가 영이 되지 않는다는 점이다.

$$|\nabla g| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 1} = \sqrt{|\nabla I|^2 + 1} \quad (4)$$

식 (5)와 같이 정의되는 함수  $g$ 의 확산 모델은 식 (6)과 같이 확산계수가 곡면의 그레디언트 크기의 역수가 되며 그 값은  $[0, 1]$  사이에 존재한다.

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \nabla \cdot (C\nabla g) \quad (5)$$

$$C = \frac{1}{|\nabla g|} = \frac{1}{\sqrt{|\nabla I|^2 + 1}} \quad (6)$$

Surface normal의 크기에 반비례하는 확산계수를 취할 때 확산 속도는

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 2H \quad (7)$$

와 같이 평균곡률  $H$ (mean curvature)의 2배가 된다. 평균곡률 확산을 잡음이 첨가된 에지에 적용하면 평균곡률이 영인 에지는 변하지 않고 에지 이외의 잡음은 효과적으로 제거되는 결과를 얻는다.

## 3. 평균곡률 확산의 구현 방법

### 3.1 2차원 마스크 구현

2차원 영상에 대한 평균곡률 확산 모델 (15)

은

$$\frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ c(x, y, t) \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ c(x, y, t) \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial y} \right] \quad (8)$$

로 주어지며  $t=t_0$  주변에서 Taylor series  
전개를 하면

$$I(x, y, t_0 + \Delta t) = I(x, y, t_0) + \Delta t \frac{\partial I(x, y, t_0)}{\partial t} + \Lambda \quad (9)$$

이 되고 고차 항을 무시하고 식 (9)에 식  
(8)을 대입하면

$$I(x, y, t_0 + \Delta t) \approx I(x, y, t_0) + \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ c(x, y, t) \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ c(x, y, t) \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial y} \right] \right\} \quad (10)$$

이 된다. 식 (10)의 도함수는 다음과 같이  
1차 도함수 사용하여 근사화 할 수 있다.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \approx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y - \Delta y)}{2\Delta y} \quad (12)$$

$\Delta x = \Delta y = 1$ 라 놓고 중심 화소를  $(x_i, y_i)$ 라 하고  
4방향 이웃 화소들을 각각  $(x_{i+1}, y_i)$ ,  $(x_{i-1}, y_i)$ ,  
 $(x_i, y_{i+1})$ 와  $(x_i, y_{i-1})$ 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ c(x_i, y_i, t_0) \frac{\partial I(x_i, y_i, t_0)}{\partial x} \right] &\approx \frac{1}{2} c(x_{i+1}, y_i, t_0) \frac{\partial I(x_{i+1}, y_i, t_0)}{\partial x} \\ &\quad - \frac{1}{2} c(x_{i-1}, y_i, t_0) \frac{\partial I(x_{i-1}, y_i, t_0)}{\partial x} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[ c(x_i, y_i, t_0) \frac{\partial I(x_i, y_i, t_0)}{\partial y} \right] &\approx \frac{1}{2} c(x_i, y_{i+1}, t_0) \frac{\partial I(x_i, y_{i+1}, t_0)}{\partial y} \\ &\quad - \frac{1}{2} c(x_i, y_{i-1}, t_0) \frac{\partial I(x_i, y_{i-1}, t_0)}{\partial y} \end{aligned} \quad (14)$$

을 얻을 수 있다. 여기서

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x_{i+1}, y_i, t_0) = I(x_{i+1}, y_i, t_0) - I(x_i, y_i, t_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x_{i-1}, y_i, t_0) = I(x_i, y_i, t_0) - I(x_{i-1}, y_i, t_0) \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x_i, y_{i+1}, t_0) = I(x_i, y_{i+1}, t_0) - I(x_i, y_i, t_0) \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x_i, y_{i-1}, t_0) = I(x_i, y_i, t_0) - I(x_i, y_{i-1}, t_0) \quad (18)$$

이다. 따라서 최종적으로

$$\begin{aligned} I(x_i, y_i, t_0 + \Delta t) &\approx I(x_i, y_i, t_0) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \Delta t [c(x_{i+1}, y_i, t_0) + c(x_{i-1}, y_i, t_0) + c(x_i, y_{i+1}, t_0) + c(x_i, y_{i-1}, t_0)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Delta t [c(x_{i-1}, y_i, t_0) I(x_{i-1}, y_i, t_0) + c(x_{i+1}, y_i, t_0) I(x_{i+1}, y_i, t_0) \right. \\ &\quad \left. + c(x_i, y_{i-1}, t_0) I(x_i, y_{i-1}, t_0) + c(x_i, y_{i+1}, t_0) I(x_i, y_{i+1}, t_0)] \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

이 된다. 식 (19)는 시간과 위치에 따라 변  
하는 마스크  $M_{x_i, y_i}^0$ 와 영상과의  
convolution으로

$$M_{x_i, y_i}^0 = \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} 0 & c_2(t_0) & 0 \\ c_3(t_0) & \left( \frac{2}{\Delta t} - \sum_{i=1}^4 c_i(t_0) \right) & c_1(t_0) \\ 0 & c_4(t_0) & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

으로 표시할 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned} c_1 &= c(x_i, y_{i+1}, t_0) \\ c_2 &= c(x_{i-1}, y_i, t_0) \\ c_3 &= c(x_i, y_{i-1}, t_0) \\ c_4 &= c(x_{i+1}, y_i, t_0) \end{aligned} \quad (21)$$

이다. 앞의 과정과 유사하게 중심 화소  
 $(x_i, y_i)$ 와 8방향 이웃 화소 모두를 포함하는  
마스크  $M_{x_i, y_i}^0$ 를

$$M_{x,y}^{t_0} = \frac{\Delta t}{4} \begin{bmatrix} c_4(t_0) & c_3(t_0) & c_2(t_0) \\ c_5(t_0) & \left(\frac{4}{\Delta t} - \sum_{i=1}^8 c_i(t_0)\right) & c_1(t_0) \\ c_6(t_0) & c_7(t_0) & c_8(t_0) \end{bmatrix} \quad (22)$$

과 같이 구할 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned} c_1 &= c(x_i, y_{i+1}, t_0) \\ c_2 &= c(x_{i-1}, y_{i+1}, t_0) \\ c_3 &= c(x_{i-1}, y_i, t_0) \\ c_4 &= c(x_{i-1}, y_{i-1}, t_0) \\ c_5 &= c(x_i, y_{i-1}, t_0) \\ c_6 &= c(x_{i+1}, y_{i-1}, t_0) \\ c_7 &= c(x_{i+1}, y_i, t_0) \\ c_8 &= c(x_{i+1}, y_{i+1}, t_0) \end{aligned} \quad (23)$$

이다.

### 3.2 안정성

평균곡률 확산 모델에서 다음 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} & I(x_i, y_i, t_0 + \Delta t) \\ & \leq I_{\max}(t_0) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \Delta t [c(x_{i-1}, y_i, t_0) + c(x_{i-1}, y_i, t_0) + c(x_i, y_{i+1}, t_0) + c(x_i, y_{i-1}, t_0)] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \Delta t [c(x_{i-1}, y_i, t_0) + c(x_{i+1}, y_i, t_0) + c(x_i, y_{i-1}, t_0) + c(x_i, y_{i+1}, t_0)] \right\} = I_{\max}(t_0) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서

$$I_{\max}(t_0) = \max\{I(x_i, y_i, t_0), I(x_{i-1}, y_i, t_0), I(x_{i-1}, y_i, t_0), I(x_i, y_{i+1}, t_0), I(x_i, y_{i-1}, t_0)\} \quad (25)$$

이다.

유사하게  $I(x_i, y_i, t_0 + \Delta t) \geq I_{\min}(t_0)$ 의 관계도 쉽게 보일 수 있다. 따라서 확산이 진행되어도 영상의 밝기값은 안정된 상태로 유지된다.

### 4. 확산 계수

Perona-Malik 방법과 Catte 방법의 경

우 얇은 에지에서의 그레디언트 크기는 영이 되기 때문에 확산계수가 최대값인 1에 도달하게 되어서 얇은 에지를 빠르게 확산시키는 결과를 얻게 된다. 기존의 평균 곡률 확산 모델의 경우에도 확산 시간이 지날수록 얇은 에지에 대한 smoothing 효과가 증가된다.

따라서 확산이 진행되는 중에 얇은 에지를 보존하기 위해서는 얇은 에지에서의 확산계수가 작은 값을 갖도록 하여야 한다. 얇은 에지를 검출하는 함수로서 식 (26)으로 주어지는 영상의 2차 도함수  $Q$ 를 사용한다.  $Q$ 는 밝기 변화가 일정한 화소들이 분포할 때에는 영에 가까운 값이 되고 얇은 에지에서는 큰 값이 된다.

$$Q = I_{xx}^2 + 2I_{xy}^2 + I_{yy}^2 \quad (26)$$

평균곡률 확산의 확산계수는 앞에서 소개한 2차 도함수  $Q$ 를 적용하면

$$C = \frac{1}{|\nabla g|} = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2(|\nabla I|^2 + Q)}} \quad (27)$$

이 된다.

얇은 에지에서는 그레디언트  $|\nabla I|$ 가  $Q$ 는 작은 값을 가지더라도 큰 값을 가지므로 확산계수는 작은 값을 유지하게 된다. 함수  $Q$ 가 분모에 첨가되어도 확산계수는 항상  $0 \leq C(x_i, y_i) \leq 1$  (for all  $i$ )를 만족하며 안정화 된다.

### 5. 실험 결과

앞에서 설명한 평균 곡률 확산을 잡음이 첨가된 에지 영상에 대해 적용하였을 때의 결과를 그림 1에서 볼 수 있다. 제안한 평균곡률 확산을 적용한 후의 결과를 보면 에지의 전체적인 형태는 유지되면서

잡음에 의한 세부적인 밝기 변화는 효과적으로 제거됨을 볼 수 있다. 평균 곡률 확산의 확산 횟수에 따른 잡음 제거 효과는 그림 2에서 볼 수 있다. 충분한 반복 횟수에 이르면 에지 이외의 잡음 성분은 제거가 됨을 볼 수 있다. 그림 3과 그림 4는 lena 영상의 얇은 에지 부분에 대해 기존의 방법과 제안한 방법을 비교한 결과를 보여준다. 각 방법들의 얇은 에지 영역에서의 SNR 값은 그림 4와 같다. 그림 4에서 알 수 있듯이 반복 횟수에 따라 얇은 에지 부분에서 제안한 방법이 다른 방법에 비해 비교적 높은 SNR 값을 보임을 알 수 있다.

## 6. 결론

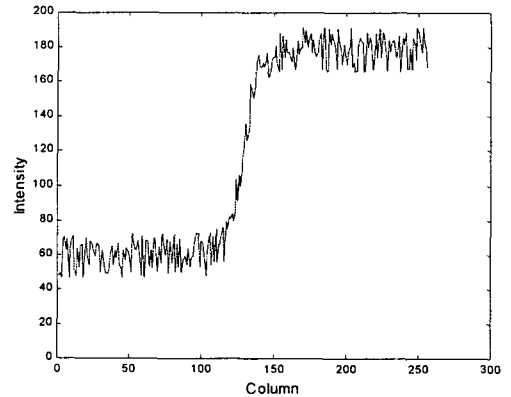
본 논문에서는 잡음 제거, 영상 분할, 에지 검출, 그리고 영상 개선에 매우 유용한 도구로 사용되는 anisotropic diffusion 방법 가운데 하나인 평균곡률 확산 방법을 개선하여서 얇은 에지에 대해서도 우수한 성능을 보이는 잡음제거 방법을 제안하였다. 제안한 방법은 확산 계수에 영상의 그레디언트와 2차 미분을 동시에 포함시켜서 얇은 에지에서의 확산을 감소시켰다. 기존의 확산 방법들보다 잡음 제거와 얇은 에지 보존 성능에서 우수한 결과를 실험을 통해 얻을 수 있었다.

### 참고문헌

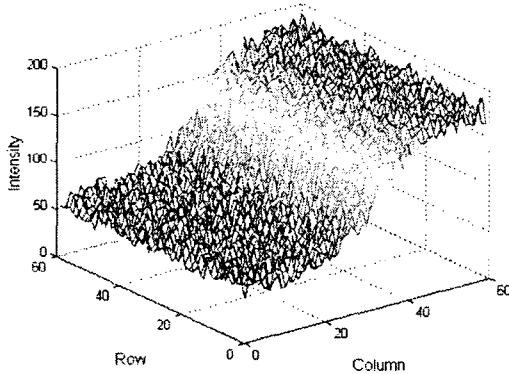
- [1] P. Perona and J. Malik, Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 12, no. 7, pp. 629-639, July 1990.
- [2] L. Alvarez, P.-L. Lions, and J.-M. Morel, Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II, *SIAM Numer. Anal.*, vol. 29, no. 3, pp. 845-866, June 1992.
- [3] J. Weickert, Theoretical foundations of anisotropic diffusion in image processing, W. Kropatsch, R. Klette, F. Solina (Eds.), *Theoretical Foundations of Computer Vision, Computing Suppl. 11*, Springer, Wien, 221-236, 1996.
- [4] A. El-Fallah and G. Ford, Mean curvature evolution and surface area scaling in image filtering, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 6, no. 5, pp. 750-753, May 1997.

### 3차원 표현

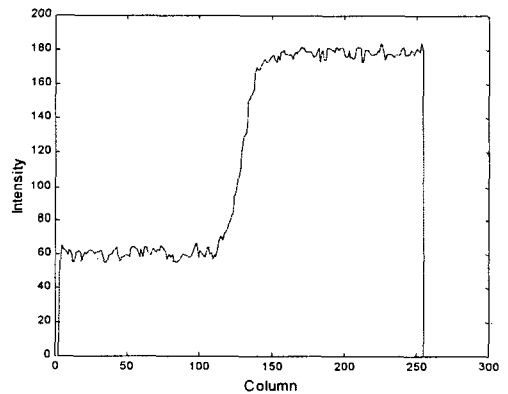
그림 1. 잡음이 첨가된 에지 영상에 평균 곡률 확산을 적용한 결과.



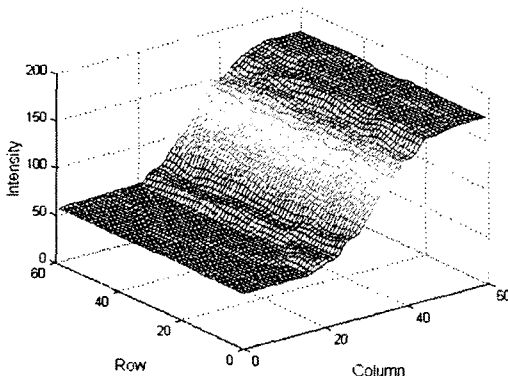
(a) 잡음이 첨가된 에지



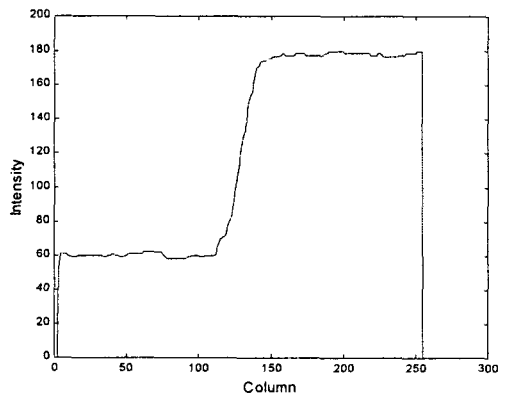
(a) 잡음이 첨가된 에지의 3차원 표현



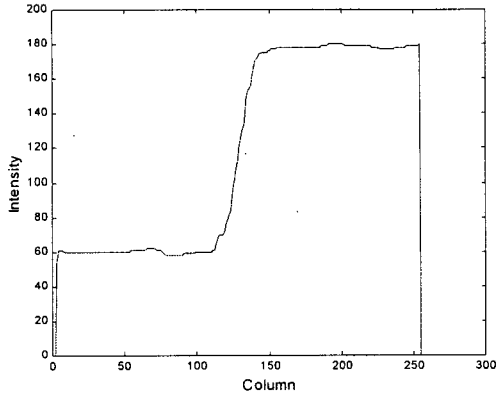
(b) 5 iterations



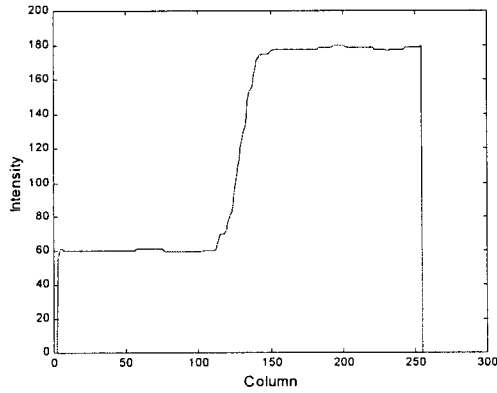
(b) 제안한 평균 곡률 확산을 적용한 후의



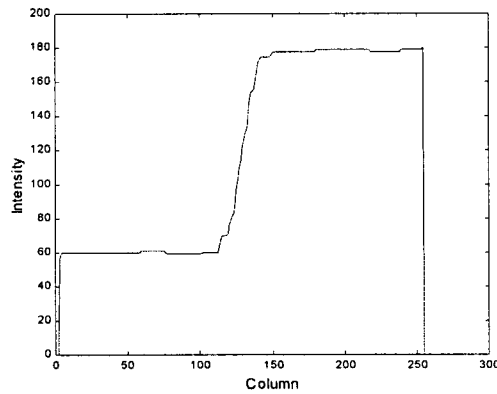
(c) 20 iterations



(d) 50 iterations



(e) 100 iterations

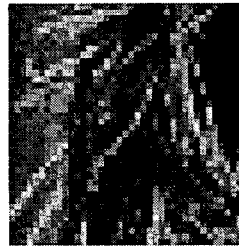


(f) 200 iterations

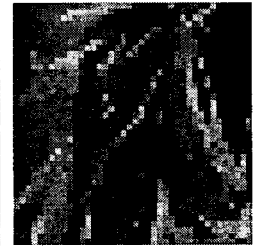
그림 2. 제안한 평균 곡률 확산의 확산 횟수에 따른 잡음 제거 효과.



(a)



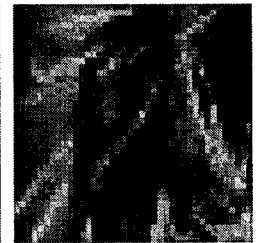
(b)



(c)



(d)



(e)

그림 3. Lena 영상의 얇은 에지 부분의 잡음 제거 결과 (a) 잡음이 첨가된 lena 영상 (b) 원영상의 확대된 일부분(원영상의 사각형부분) (c) Perona-Malik 방법 (30 iterations) (d) 평균곡률 확산 방법 (30 iterations) (e) 제안한 방법 (35 iterations).

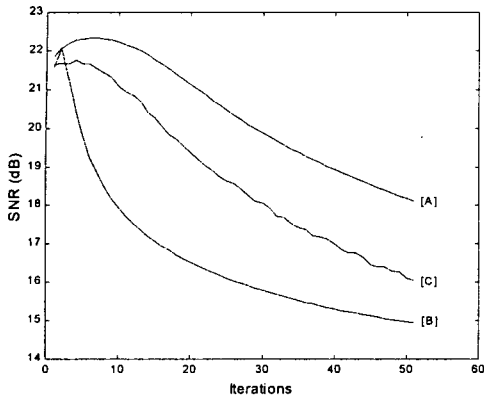


그림 4. Lena 영상의 얇은 에지 영역에서의 SNR ([A] 제안한 방법 [B] 기존의 평균곡률 확산 방법 [C] Perona-Malik 방법). x축은 반복횟수, y축은 SNR.