

자동차형 로봇의 전방향 최단거리 이동경로 생성을 위한 알고리즘

조 규 상  
 동양대학교 컴퓨터학부

Shortest Dubins Path Generation Algorithm for a Car-like Robot

GyuSang Cho  
 School of Computer Science & Eng., DongYang Univ.

**Abstract** - This paper proposes a decision criteria for selecting the shortest path from Dubins set between the initial and final configurations of a car-like robot. The suggested scheme is a very simple and computational savings without explicitly calculating the candidate paths and having a complicated decision table. Equations for calculating the shortest path are derived in simple form with coordinate transform and defining standard forms.

1. 서 론

장애물이 없는 자유공간에서 자동차 바퀴 구조를 갖는 이동로봇이 전방향으로만 이동하여 최단 거리를 구하기 위한 최초의 연구는 Dubins로부터 시작하였다. 그는 전방향으로만 이동 가능한 로봇의 경로의 최단거리는 CCC형과 CSC형으로 표현되는 경로의 조합으로 구성 된다는 것을 증명하였다[1]. 이후의 여러 연구 중에서 Melzak[2], Robertson[3], Cockayne과 Hall[4]등은 Dubins가 제안한 방식으로 생성한 최단 경로의 접근 가능영역의 집합에 대한 결과를 제시하였다. Bui[5] 등은 Dubins 방식으로  $R^2 \times S$ 공간에서의 합성의 계산에 적용하였다. 이 후에 Boissonnat[6]등은 이런 경우에 대해서  $R^2$ 공간의 어떤 점에 고정된 구조로부터 최단 경로의 합성 문제에 대한 연구를 하였다.

한편, Reeds[7]등은 전후진이 가능한 이동 로봇에 Dubins의 결과를 확장 적용하여 48종의 층분집합을 구했으며, 최적한 경로는 직선이나 최소반경의 원호로 구성된 5개 이하의 조합으로 구성된다고 입증하였다. Sussmann[8]등과 Boissonat등은[9] 제어 이론의 관점에서 Dubins방식과 Reeds등의 방식에 접근하였다. 또, Soueres[10]등과 Laumond[11]등은 최단 경로의 합성문제와 최단 경로의 거리를 정확한 형태를 계산하는 방법을 연구하였다.

Shkel[12]등은 Dubins방식으로 최소 경로를 구할 때 논리적인 구분 방법에 의해 최소 경로를 직접 구하는 방법을 제안했는데, 이 방법에서는 모든 가능한 경로의 길이를 구하고 그 중에 최적한 것을 고르는 방법 대신에 논리적인 구분방법을 사용하여 최단 경로를 구성하는 패턴을 빠르게 구할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 이 방법에서 제안하고 있는 최단 경로를 찾는 사분면에 의한 구분 방법은 사분면의 경우에 따른 구분을 16종으로 나누고 그 안에서 또 다시 여러 경우로 분류하기 때문에 매우 복잡한 판별 표를 사용한다는 단점이 있다.

본 논문에서는 임의의 위치의 시작점과 목표점까지의 최단 경로를 구하기 위해 Dubins set으로 표현되는 가능한 여러 경로 중에서 최단의 경로를 시작점과 목표점

의 자세로 간단하게 판별할 수 있는 방법을 제안한다. 기존의 방법[12]보다 매우 간단한 판별기준을 갖기 때문에 계산 시간상 매우 유리하다. 또한, 경로를 계산하는 수식은 좌표의 변환과 변환된 좌표에서 표준형 자세를 정의하고 그것을 이용하여 구한 간단한 수식을 사용하였다[13].

2. 본 론

2.1 Dubins 로봇

로봇의 자세는 평면의 좌표  $(x, y)$  와 방향의 각도  $\theta$  로 표현된다. Dubins[1]는 시작 자세에서 목표 자세로의 최소 경로를 6가지 형으로 나타내었다. 4가지 종류를 갖는 CSC형과 2가지 형을 갖는 CCC로 구분된다. C는 R 또는 L(회전에 의한 원호)로 표현되며, S는 직선성분으로 표현된다. 이것의 조합은 RSR, RSL, LSR, LSL, LRL, RLR등의 6가지 이다.

2.2 좌표변환

Dubins형의 최단 경로를 구하기 위하여 임의의 위치와 자세에서 목표지점의 위치와 자세로 이동하기 위한 로봇의 좌표를 원점으로  $T(a, b)$ 만큼 이동 시키고 원점을 기준으로  $R(\theta)$ 만큼 회전변환하여 시작점의 로봇의 좌표는  $(x, y) = (0, 0)$  이고 각도는  $\theta = 0$ 으로 변환한다.  $C_i (C, SC_i$ 의 초기지점에서 형성되는 원)과  $C_j (C, SC_j$ 의 목표지점에서 형성되는 원)의 호의 각도와 교점을 구한 후에 다시 반대로 회전변환과 이동 변환을 수행한다.

표준형 자세는 LSL형과 LSR형으로 나뉜다. RSL형과 RSR형은 각각 이것의 x축 기준의 대칭형이다. LSL(RSR)형은 목표자세의 각도를  $\pi$ 로 정하고, LSR(RSL)의 경우는 0으로 정해 놓고 실제의 목표지점과의 차이만큼 추가적인 회전 변환을 수행한다.

2.3 표준형 자세 변환

2.3.1 LSL

임의의 방향으로 놓여있는 로봇에 대해 좌표변환을 통하여 그림 1과 같은 자세로 변환한다. LSL 형은 반경  $\rho$ 인 원의 중심  $C_A$ 를 기준으로  $\theta_1$ 만큼 반시계방향으로 회전할 때, 직선  $l$ 과  $P_A$ 점에서 만나고, 이 직선 $l$ 과 중심  $C_B$ 의 목표지점의 원과  $P_B$ 점에서 만난다. 이 점에서 표준형 자세  $s(x, y)$ 까지 각도는  $\theta_2$ 이다. 목표자세  $t(x_f, y_f)$ 에서  $\theta_d$ 만큼 회전된 표준형 자세  $s(x, y)$ 를 먼저 구한 후에 이것으로부터  $\theta_1$ 와  $\theta_2$ 를 구하여  $P_A$ 와  $P_B$ 점의 좌표를 구한다.

선분  $l$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$l = \sqrt{x^2 + (y - 2\rho)^2} \quad (1)$$

$C_A$ 점과  $C_B$ 점이 이루는 각도  $\delta$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{|x|}{|y - 2\rho|}\right) \quad (2)$$

$C_A$ 를 중심으로 반시계방향으로 회전하는  $\theta_i$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\theta_i = \pi - \left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3)$$

$\overline{C_A C_B}$ 와 선분  $l$ 은 평행이고  $\overline{C_A C_B} \perp \overline{P_B C_B}$  이므로  $\triangle C_A P_C C_B$ 에서  $\angle C_B$ 는  $(\pi - \delta)$ 이므로  $\theta_a$ 와  $\theta_f$ 는

$$\theta_a = \pi - (\pi - \delta) - \frac{\pi}{2} = \delta - \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$\theta_f = \theta_a + \frac{\pi}{2} = \delta - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \delta \quad (5)$$

이다.

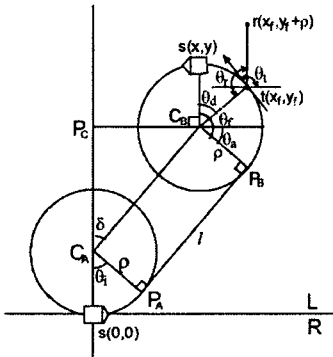


그림 1. LSL의 표준형

표준형의 자세는  $s(x, y)$ 의 위치에서  $\theta_s = \pi$ 이므로 목표지점  $t(x_f, y_f)$ 에서의 방향이  $\theta_i$ 인 로봇을  $\theta_d$ 만큼 회전하여야 한다.  $t(x_f, y_f)$ 을 기준으로  $r(x_f, y_f + \rho)$ 를  $C_B$ 점으로 회전시킨다. 이 때의 각도  $\theta_r$ 는 다음과 같다.

$$\theta_r = \theta_i \quad (6)$$

그럼으로, 원의 중점  $C_B$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x_{C_B} = x_f - \rho \sin(\theta_i) \quad (7)$$

$$y_{C_B} = y_f + \rho \cos(\theta_i) \quad (7)$$

$s(x, y)$ 점의 좌표는  $C_B$ 점으로부터  $y$ 방향으로  $+\rho$ 만큼 떨어진 위치에 있으므로 다음과 같은 값이 된다.

$$x = x_f - \rho \sin(\theta_i) \quad (8)$$

$$y = \rho + y_f + \rho \cos(\theta_i)$$

### 2.3.2 LSR

LSR형의 초기지점의 표준형 방향과 목표지점  $s(x, y)$ 의 표준형 방향은 각각 0도이다.  $P_A$ 점은 초기점을  $\theta_i$ 만큼 반시계방향으로 회전한 것이고,  $P_B$  점  $s(x, y)$ 를  $\theta_f$ 만큼 반시계방향으로 회전한 것이다.  $\overline{P_A P_B} = 2l$ ,  $\overline{P_A P_C} = l$ ,  $\overline{C_A P_C} = d$ 이다. 거리  $d$ 와  $l$ 은 다음과 같다.

$$d = \sqrt{x^2 + (y - 2\rho)^2} / 2 \quad (9)$$

$$l = \sqrt{d^2 - \rho^2} \quad (10)$$

각도  $\beta$ 와  $\delta$ 는 각각 다음과 같이 된다.

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{l}\right) \quad (11)$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y - 2\rho}\right) \quad (12)$$

각도  $\alpha$ 는  $\alpha = \pi/2 - \beta$ 이기 때문에  $\theta_i$ 는 다음처럼 된다.

$$\begin{aligned} \theta_i &= \pi - \alpha - \delta \\ &= \pi/2 + \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{l}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y - 2\rho}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

점  $P_C$ 를 기준으로 원  $C_i$ 와 원  $C_f$ 는 대칭이므로  $\theta_f = \theta_i$ 이다.

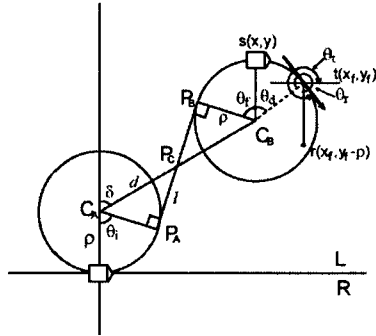


그림 2. LSR의 표준형

LSR형에서는 목표지점의 표준형의 자세는  $s(x, y)$ 의 위치에서  $\theta_s = 0$ 로 정하므로 목표지점  $t(x_f, y_f)$ 점에서  $y$ 방향으로  $-\rho$ 만큼 떨어진 위치의 점  $r(x_f, y_f - \rho)$ 를  $C_B$ 점으로  $\theta_r$ 만큼 회전시킨다. 각도  $\theta_r = \theta_i$ 이므로 좌표  $C_B$ 는 다음과 같다.

$$x_{C_B} = x_f - \rho \sin(\theta_i) \quad (15)$$

$$y_{C_B} = y_f - \rho \cos(\theta_i) \quad (15)$$

$s(x, y)$ 점의 좌표는  $C_B$ 점으로부터  $y$ 방향으로  $+\rho$ 만큼 떨어진 위치에 있으므로 다음과 같은 값이 된다.

$$x = x_f - \rho \sin(\theta_i) \quad (16)$$

$$y = \rho + y_f - \rho \cos(\theta_i) \quad (16)$$

### 2.4 경로패턴을 위한 편별식

시작점에서 목표점까지의 경로를 정하기 위해서는 형성되는 경로가 LSL형인지 LSR형인지를 구분하는 것이 필수적이고, 최적한 경로를 구하기 위한 필요조건이다.

원점에서 시작하여  $\theta$ 만큼 회전한 위치에서 직선의 방향을 비교하여  $t(x_f, y_f)$ 에서의 로봇의 각도와 비교하여 결정할 수 있다. 각도  $\theta$ 를 기준으로  $\theta$ 의 우측으로 향하는 자세는 LSR형이고, 좌측으로 향하는 자세는 LSL형이다. RSL과 RSR은 각기 LSL과 LSR의  $x$ 축의 대칭형이다. 그러므로 LSL과 LSR형에 대해서만 수식을 유도하여 대칭성을 이용하기로 한다. 그림 3에서  $d$ 와  $l$ 은 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d = \sqrt{x_f^2 + (y_f - \rho)^2} \quad (17)$$

$$l = \sqrt{d^2 - \rho^2} \quad (18)$$

각도  $\alpha$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y_f - \rho}{x}\right) \quad (19)$$

$\triangle C_A P_A t$ 에서 각도  $\beta$ 는 다음과 같다.

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{l}{\rho}\right) \quad (20)$$

그러므로, 각도  $\theta$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta \quad (21)$$

원점을 기준으로 로봇이 놓인 곳의 각도가  $\delta$ 인 경우 위의 수식을 이용한 판별은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{if}(0 \leq \delta < \pi) & C_i = L \\ \text{else} & C_i = R \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{if}(|\phi - \theta| > 0) & C_j = R \\ \text{else if}(|\phi - \theta| < 0) & C_j = L \\ \text{else} & C_j = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

판별식(22),(23)은 x축 기준으로 대칭성을 나타내고 있기 때문에  $C_i = L$ 인 경우에는 반시계방향으로 각도를 계산하고,  $C_i = R$ 인 경우는 시계방향으로 각도를 계산하면 동일 식으로 적용할 수 있다.

그림 3. 패턴의 판별을 위한 방향의 계산

### 2.5 시뮬레이션

그림 4는 LSL형의 시뮬레이션 예이다. 로봇의 시작점 좌표는 (400,100), 목표점의 좌표는 (100,200)이다. 시작점에서의 각도는 45도이고, 목표점에서의 각도는 315도이다. 로봇의 회전반경은 50이다. 여기서 모든 좌표는 픽셀 단위이다. 제안한 판별식에 의하여 LSL형으로 판별되었다. 원  $C_i$ 의 중점은  $C_A=(365,135)$ 이고 원  $C_j$ 의 중점은  $C_B=(137,235)$ 이다. 회전각  $\theta_i=111$ 이고,  $\theta_j=159$ 이다.  $C_i$ 와 직선의 교점은  $P_A=(385,180)$ 이고  $C_j$ 와 직선의 교점은  $P_B=(156,282)$ 이다.

그림 5는 LSR형의 시뮬레이션 예이다. 로봇의 시작점의 좌표는 (100,150), 목표점의 좌표는 (400,250)이다. 시작점의 각도는 225도이고, 목표점의 각도는 315도이다. 이것에 의해서 LSR형으로 판별되었다. 원  $C_i$ 의 중점은  $C_A=(135,115)$ 이고 원  $C_j$ 의 중점은  $C_B=(365,215)$ 이다. 회전각  $\theta_i=-178$ ,  $\theta_j=92$ 이다. 이 회전각을  $C_i$ 와 직선의 교점은  $P_A=(170,81)$ 이고  $C_j$ 와 직선의 교점은  $P_B=(382,249)$ 이다.

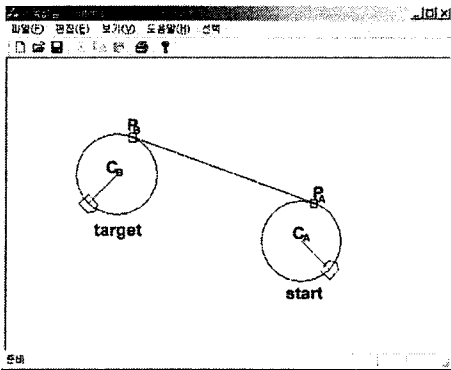


그림 4. LSL 형의 시뮬레이션

### 3. 결 론

본 논문에서는 Dubins 자동차형 로봇의 최단경로를 형성하는 원과 직선의 조합을 시작점의 자세와 목표점의 자세의 정보만으로 Dubins set 중에서 최단 경로를 한번에 구할 수 있는 판별식을 제안하였다. 기존의 방법

[12]에서는 4분면마다 놓이는 초기점과 목표점의 경우에 따라 16종으로 구분하고 그것을 다시 각도에 따른 세부로 나누는 매우 복잡한 식으로 표현하였다. 본 논문의 경우는 식(22),(23)에 의한 매우 간단한 판별식을 제안하였다. 또한, 경로를 나타내는 수식의 표현을 간단하게 나타내기 위해서 좌표의 변환과 변환된 좌표에서 표준형 자세를 정의하고 그것을 이용하여 구한 간단한 수식을 사용하였다.

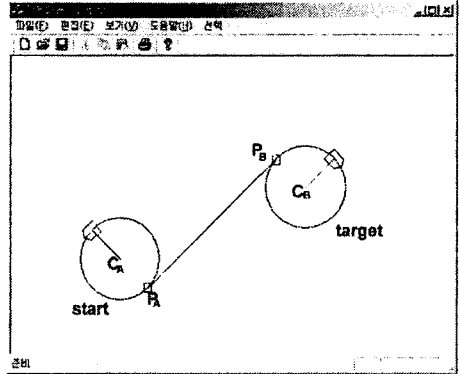


그림 5. LSR 형의 시뮬레이션

### [참 고 문 헌]

- [1] L. E. Dubins, "On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents," *Amer. J. Math.*, vol. 79, pp. 497-516, 1957.
- [2] Z. A. Melzak, "Plane motion with curvature limitations," *J. of Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 9, no. 3, Sep., 1961.
- [3] H. G. Robertson, "Curvature and arclength", *SIAM Journal Applied Math.*, vol. 19, no. 4, Dec. 1970.
- [4] E. J. Cockane and G. W. C. Hall, "Plane motion of a particle subject to curvature constraints", *SIAM J. Control*, vol. 13, no. 1, 1975.
- [5] X.-N. Bui, P. Sou'eres, J.-D. Boissonnat, and J.-P. Laumond, "Shortest path synthesis for Dubins nonholonomic robots," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, 1994.
- [6] J. D. Boissonnat and X. N. Bui, "Accessibility region for a car that only move forward along optimal paths," in *Res. Rep. INRIA 2181*, Sophia-Antipolis, France, 1994.
- [7] J. A. Reeds and R. A. Shepp, "Optimal paths for a car that goes both forward and backward," *Pacific Journal of Math.*, vol. 2, pp. 367-393, 1990.
- [8] H. J. Sussmann and W. Tang, "Shortest paths for the Reeds-Shepp car: A worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control," *Tech. Rep. SYCON-91-10*, Rutgers Univ., New Brunswick, NJ, 1991.
- [9] J.-D. Boissonnat, A. Cerezo, and J. Leblond, "Shortest paths of bounded curvature in the plane," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, 1992.
- [10] P. Sou'eres and J.-P. Laumond, "Shortest path synthesis for a car-like robot," in *Proc. Eur. Contr. Conf.*, 1993.
- [11] J.-P. Laumond and P. Sou'eres, "Metric induced by the shortest paths for a car-like mobile robot," in *Proc. IEEE Int. Conf. Intell. Robots Syst.*, 1993.
- [12] A. M. Shkel and Vladimir Lumelsky, "Classification of the Dubins set", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 34, pp. 179-202, 2001.
- [13] 조규상, "자동차형 로봇의 최단경로 계산을 위한 새로운 방법", 시뮬레이션 학회 논문지, 2003. (예정)