

멀티레이트 이산시간 슬라이딩 모드 제어기 설계

최재모, 채수경, 정동실, 정정주
한양대학교 전자통신전파공학과

Design of a Multirate Discrete-time Sliding Mode Controller

Jae-Mo Choi, Su-Kyoung Chae, Dong-Seul Jeong, Chung Choo Chung
Division of Computer and Electrical Engineering, Hanyang University

Abstract - 기존의 이산시간 슬라이딩 모드 제어기에서는 주어진 슬라이딩 평면으로부터 등가 제어기를 설계하고 그로부터 페루프 시스템의 고유값이 결정 되어 페루프 시스템의 극점을 임의로 배치시키는 것이 어려웠다. 최근 슬라이딩 모드제어에 극점 배치기법을 도입하여 페루프 시스템의 고유값을 임의로 배치시킬 수 있는 방법이 소개되었다. 그러나 극점 배치 기법은 루프 전달함수의 이득과 위상에 대한 여유도 관점에서 설계된 제어기가 아니므로 직접적으로 이득과 위상에 대한 여유도를 보장하기가 힘들다. 따라서 본 논문에서는 루프 전달함수의 이득과 위상에 대한 여유도를 확보할 수 있고 측정 잡음에 대한 민감성을 줄이기 위해 LTR과 멀티레이트 출력 제어기법을 적용해 해결하는 방법을 제안한다.

1. 서 론

슬라이딩 모드제어 기법은 가변구조제어(Variable Structure Control)의 기법의 하나로 상태에 따라 제어기의 구조가 바뀌는 제어 기법이다. 이러한 슬라이딩 모드제어기는 연속시간에서 외란에 대한 강인성과 시스템의 차수를 줄이는 등의 특징을 보여 왔다. 그러나 이산시간에 적용하는데 있어서 많은 문제점들이 나타나기 시작했다. 따라서 이러한 문제점을 해결하기 위한 방법들이 나오게 되었다[6][7]. 그러나 이러한 방법들은 페루프 시스템의 고유값을 원하는 곳에 위치시킬 수 없다는 단점을 가지고 있었다. 이와 같은 문제점을 해결하기 위해 연속시간에서 Ackerman의 공식을 이용해 주어진 슬라이딩 모드의 고유값으로 슬라이딩 평면을 설계하는 방법이 제안되었다[2]. 이 방법을 사용함으로써 페루프 시스템의 고유값을 원하는 곳에 위치시킬 수 가 있었다. 그러나 이 방법은 직접적으로 이득과 위상에 대한 여유도를 보장하기 힘들었고 또한 측정 잡음에 대한 민감성을 줄일 수 가 없었다[4].

본 논문에서는 루프전달 함수의 이득 및 위상에 대한 여유도를 확보 할 수 있고 측정 잡음에 대한 민감성을 줄일 수 있도록 하는 추정기의 이득을 설계하는 방법을 소개 한다. 우선 추정기의 이득을 LTR기법을 사용해 전체루프전달함수가 이득 및 위상에 대한 여유도를 확보할 수 있도록 한다.(그러나 이 경우 복원(Recovery)을 함에 따라 추정기의 이득이 커지게 되어 측정 잡음에 민감해 지게 된다.) 다음으로 커진 추정기의 이득을 멀티레이트 출력제어기법을 사용해 그 크기를 줄임으로서 측정 잡음에 덜 민감하게 한다.

본 논문의 구성은 2절에서 극점배치를 이용한 슬라이딩 모드제어기 설계를 하고 3절에서는 LTR/멀티레이트 출력제어기법 기법을 이용한 추정기 이득을 설계한다. 4절에서는 앞에서 제시한 방법을 측정 잡음에 민감한 갈바노미터에 적용하여 시뮬레이션 및 실험결과를 보여준다. 5절에서는 본 논문에서 제안된 제어기의 실험 결과를 정리한다.

2. 슬라이딩 모드제어기 설계

슬라이딩 모드 제어기는 (1)과 같이 상태 방정식과 슬라이딩 함수를 가지고 설계를 한다. 일반적으로 슬라이딩 모드제어기의 설계방법은 먼저 슬라이딩 평면을 결정하고 이에 따른 등가제어기 및 전체 제어기를 설계하게 된다[8].

2.1 슬라이딩 평면의 설계

본 논문에서는 Ackerman의 극배치 방법을 이용하여 슬라이딩 평면을 결정한다[2]. 슬라이딩 평면에서 차수가 줄어든 선형 시스템의 원하는 고유값을 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ 라고 하면 피드백 입력은 (2)와 같다.

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \tag{1}$$

$$s(k+1) = Cx(k+1) \tag{2}$$

$$u_a(k) = -Kx(k)$$

여기서 $K = eP(\Phi)$, $e = [0, \dots, 1]$, $[\Gamma, \Phi \Gamma, \dots, \Phi^{n-1} \Gamma]^{-1}$ 이고 $P(\Phi) = (\Phi - \lambda_1)(\Phi - \lambda_2) \dots (\Phi - \lambda_n)$ 이다. 이때 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ 가 슬라이딩 모드에서 원하는 고유값이라고 가정 한다면 다음과 같이 Theorem1을 얻는다. 여기서 $P_1(\Phi) = (\Phi - \lambda_1)(\Phi - \lambda_2) \dots (\Phi - \lambda_{n-1})$ 이다.

Theorem1 [2] 선형 이산시간 시스템(1)에서 슬라이딩 함수, $s(k) = Cx(k)$,의 C 가 $C = eP_1(\Phi)$ 에 의해서 설계 되어 진다면 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ 은 슬라이딩 모드 동특성(dynamics)의 고유값이 된다.

2.2 등가 제어기 설계

(1)에서 주어진 이산시간 선형 시불변 시스템에 대해서 $s(k+1) = 0$ 이 되도록 하는 등가 제어기를 유도 하 면 다음과 같다.

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma(u(k) + u_a(k) - u_a(k)) \tag{3}$$

$$s(k+1) = Cx(k+1), (u_a(k) = -Kx(k))$$

이때 시스템의 상태가 슬라이딩 평면에 존재 하기위한 제어 입력을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s(k+1) &= C(\Phi x(k) + \Gamma u(k) - \Gamma Kx(k) - u_a(k)) \\ &= C(\Phi - \Gamma K)x(k) + C\Gamma(u(k) - u_a(k)) = 0 \end{aligned}$$

위 식을 $u(k)$ 에 대하여 정리 하면(4)를 얻을 수 있다.

$$\therefore u_{eq}(k) = (C\Gamma)^{-1}C\Gamma u_a(k) - (C\Gamma)^{-1}C(\Phi - \Gamma K)x(k) \tag{4}$$

여기서 $C(\Phi - \Gamma K) = \lambda_n C$, $C\Gamma = 1$ 이므로 (4)는 (5)와 같이 간소화 할 수 있다[2].

$$u_{eq}(k) = u_a(k) - \lambda_n s(k) \quad (5)$$

(5)에서 구한 등가제어 입력을 시스템 방정식에 대입하면 슬라이딩 평면에서의 상태방정식을 (6)과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (\Phi - \Gamma K)x(k) + \Gamma(u(k) - u_a(k)) \\ &= (\Phi - \Gamma K)x(k) - \lambda_n \Gamma s(k) \\ &= (\Phi - \Gamma K)x(k) \end{aligned} \quad (6)$$

위식에서 알 수 있듯이 Ackerman의 극배치 방법을 이용해 슬라이딩 평면을 설계하고 이에 따른 등가 제어기를 구하면 페루프 시스템의 원하는 고유값을 얻을 수 있게 된다.

Corollary 1 이산시간 슬라이딩 모드의 존재와 안정성을 위한 충분조건은 $N_\epsilon = \{ |s(k)| = |Cx(k)| < \epsilon \}$ 영역에서 $|s(k+1)| \leq \alpha |s(k)|, 0 \leq \alpha < 1, k \geq k_0$ 을 만족시키는 양의 정수 k_0 가 존재하여야 한다.

위의 조건은 (7)과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} -\alpha |s(k)| \leq s(k+1) \leq \alpha |s(k)|, 0 \leq \alpha < 1 \\ w(k) = \frac{s(k+1)}{|s(k)|} = \frac{C\Gamma(-u_{eq}(k) + u(k))}{|s(k)|} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 (4),(5),(7)을 이용하여 $w(k)$ 를 (8)과 같이 놓으면 $|w(k)| < 1$ 은 슬라이딩 모드가 일어나기 위한 충분조건이 된다.

2.3 전체 제어기 설계

(8)로부터 전체 제어기를 설계 할 수 있다. 여기서 $w(k) = w_0 \operatorname{sgn}(s(k))$ 로 설정하면 전체 제어기는 (9)와 같다.

$$u(k) = u_{eq}(k) + w_0 s(k) \quad (9)$$

(9)를 슬라이딩 함수에 대입하면 (10)과 같은 결과를 얻을 수 있다[1].

$$s(k+1) = w_0 s(k) \quad (10)$$

위식에서 알 수 있듯이 w_0 를 통해서 슬라이딩 평면에 접근하는 수렴속도를 결정 할 수 있다.

3. 현재상태 추정기 설계

일반적으로 갈바노미터의 상태를 모두 측정 할 수 가 없기 때문에 우리는 현재상태 추정기를 사용하여 플랜트의 상태를 추정 한다. 이 절에서는 루프전달 함수의 이득 및 위상에 대한 여유도를 확보 할 수 있도록 하고 측정 잡음에 덜 민감하도록 하는 추정기 이득에 대한 설계방법을 제안한다. (11)은 일반적인 현재상태 추정기의 방정식을 나타낸다. 여기서 \hat{x} 은 current state estimate이고 \bar{x} 는 prediction state estimate이며 L_c 는 추정기의 이득이다.

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= \bar{x}(k) + L_c(y(k) - H\bar{x}(k)) \\ \bar{x}(k+1) &= \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) \end{aligned} \quad (11)$$

3.1 LTR기법을 사용한 추정기 이득설계

LTR기법이란 미리 결정된 목표루프전달함수에 전체 루프전달함수를 복원시킴으로서 목표전달함수가 가지고 있는 이득 및 위상에 대한 여유도를 확보 할 수 있도록 하는 방법이다. LTR기법을 적용하려면 먼저 목표루프를 결정해야 하는데 본 논문에서 사용한 목표루프는 (12)와 같다.

$$G_{TL}(z) = K(zI - \Phi)^{-1} \quad (12)$$

위 식에서 알 수 있듯이 목표루프를 결정한다는 것은 제어기의 이득을 결정하는 것이다. 목표루프가 결정되면 상태가중치 행렬과 제어기 가중치 행렬을 설정하게 된다. 본 논문에서는 (13)과 같이 각각의 가중치 행렬을 설정 하였다.

$$Q_c = q^2 \Gamma^T \Gamma, R_c = I \quad (13)$$

이렇게 결정된 가중치 행렬을 가지고 Riccati방정식을 이용해 추정기 이득 L_c 를 구하게 된다[4]. 여기서 K 는 앞에서 극배치 방법에 의해 결정되는 값이므로 결과적으로 q 값에 따라서 추정기 이득 L_c 값이 달라진다. 일반적으로 q 값을 키우면 전체 루프전달함수가 목표루프에 다가 가게 된다. 그러나 q 값을 너무 크게 하면 추정기의 이득 값이 커지는 경향이 있다. 이것은 측정 잡음을 증폭시키는 결과를 가져와 시간 응답에 나쁜 영향을 줄 수 있다.

3.2 멀티레이트 출력제어기를 사용한 추정기이득 설계

추정기 설계에 멀티레이트 출력기법을 사용하면 추정기의 고유값은 변화시키지 않으면서 이득 값을 감소시킬 수 있다. 멀티레이트 출력제어기는 시스템의 출력 갱신 주기를 제어입력의 갱신 주기보다 R배 빠르게 하는 기법으로 빠른 샘플링주기(T_f)와 R배 느린 주기(T_s)에 대해서 (14)와 같은 관계가 성립한다[3].

$$\begin{aligned} \det[zI - (\Phi_{T_s} - \Phi_{T_s} L_s H)] \\ = \det[zI - (\Phi_{T_f} - \Phi_{T_f} L_m H)^R] \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 L_s 는 LTR기법을 이용해 얻어진 추정기의 이득 이고 Φ_{T_s}, Φ_{T_f} 는 각각의 샘플링주기로 이산화한 시스템 행렬이다. (14)와 같은 관계식으로부터 추정기 이득(L_m)을 구해 보면 결과적으로 R값이 커짐 따라서 그 값이 감소하게 되어 결과적으로 측정 잡음에 덜 민감하게 된다. 그러나 T_s 를 고정시킨 상태에서 상대적으로 R값을 너무 크게 하려면 T_f 를 아주 작게, 즉 아주 빠른 주기로 샘플링을 해야 하기 때문에 R값을 너무 크게 할 수는 없다.

4. 시뮬레이션 및 실험 결과

본 논문에서는 위에서 제안된 알고리즘의 효과성을 입증하기 위해 잡음에 민감한 보이스코일 모터(Voice coil Motor)인 갈바노미터에 제안된 알고리즘을 적용하였다. 제어기 구성을 위한 모델링에서는 기계적 공진 모드를 제거하고 간단히 2차 강성(rigid)으로 모델링을 하였다. 그림1은 DSA(Dynamic Signal Analyzer)장비를 이용하여 얻어낸 플랜트의 개루프 주파수 응답 및 모델링을 보여준다.싱글레이트 샘플링은 20kHz로하였고 멀티레이트에서는R값을 3.0로해서 T_s 와 T_f 를 각각 20kHz와 60kHz

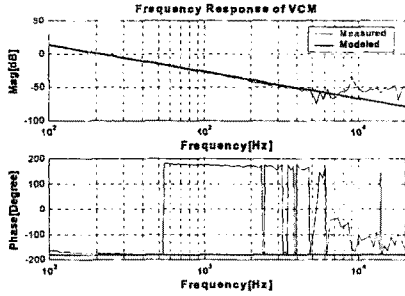


그림 1 갈바노미터의 개루프 주파수 응답
Fig.1 Open-loop frequency response of Galvanometer

에 대한 샘플링 주기로 하였다. (1)을 ZOH(zero order hold)로 이산화한 플랜트 모델은 (15),(16)와 같다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0095 \\ 0 & 1.0000 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0.0032 \\ 0.6765 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$H = [0.9900 \ 0] \quad (20 \text{ kHz})$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0032 \\ 0 & 1.0000 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0.0004 \\ 0.2255 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$H = [0.9900 \ 0] \quad (60 \text{ kHz})$$

그림 2에서 보면 q값에 따라 전체 루프 전달함수가 목표 루프로 복원되는 것을 알 수 있다. q값을 증가 시킬수록 목표루프로 접근하게 되나 상대적으로 추정기의 이득이 커지게 된다. 표1과 그림3은 멀티레이트 출력제어를 적용한 시뮬레이션결과이다. 결과에서 알 수 있듯이 제안된 방법을 사용했을 때 추정기의 이득이 작아져 측정 잡음에 덜 민감하게 됨을 알 수 있다. 그림4는 q=10일때 zero tracking에 대한 실험 결과이다. 멀티레이트 적용시 측정 잡음에 덜 민감해 추종오차가 기존의 싱글레이트보다 개선 되었다.

5. 결 론

본 논문에서는 극점배치 이산시간 슬라이딩 모드제어기 설계에 관한 내용을 다루었다. 특히, 현재상태 추정기의 새로운 설계 기법을 도입하여 기존의 극점배치 이산시간 슬라이딩 모드에서 확보 할 수 없었던 이득과 위상에 대한 여유도를 확보했고 또한 측정 잡음에 덜 민감하도록 하는 방법을 제안하였다. LTR/멀티레이트기법을 추정기 이득 설계에 적용함으로써 루프 전달 함수의 여유도를 확보 할 수 있었고 측정 잡음에 대한 민감도를 줄일 수 있었다. 이렇게 제안된 방법을 갈바노미터에 적용하여 효과를 입증하였다.

표 1 Singlerate vs Multirate 추정기 이득값 비교
Table 1 Single vs Multirate estimator gain

	추정기 이득(q=10)
Singlerate	0.6083, 28.8598
Multirate	0.2773, 13.0870

[참 고 문 헌]

- [1] Lee, S.-H., and Chung, C.C. "Design of A Servomechanism with Sliding Mode for A Disk Drive Actuator," Proc. of CDC, Phoenix, AZ, USA, pp. 5253-5258, Dec. 1999
- [2] Ackerman, J., and Utkin, V., "Sliding Mode control Design Based on Ackerman's Formula," IEEE Trans. on AC, Vol.43, No.2, pp.234-237, Feb. 1998.

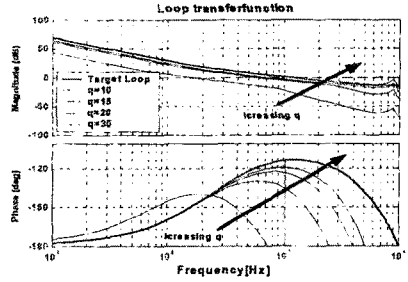


그림 2 q값에 따른 루프전달함수의 시뮬레이션결과
Fig.2 Loop transfer function for q

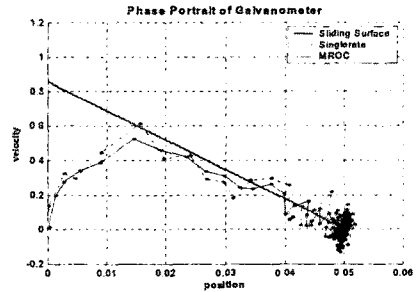


그림 3 제단 입력에 대한 phase portrait
Fig.3 Phase portrait for step input

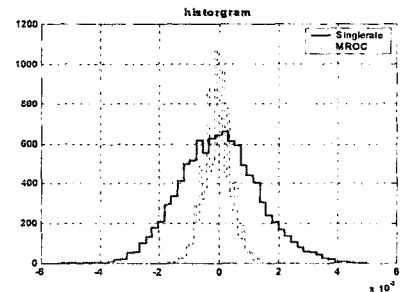


그림 4 멀티레이트 적용시 추종오차에 대한 실험결과
Fig.4 Tracking error when multirate is used

- [3] 황희철, 정정주, 정동실 "현재 상태 추정기를 이용한 멀티레이트 제어에 관한 연구," 제어 자동화 시스템공학 논문지, 제8권 제 12호, pp.1004-1013, 2002.12
- [4] 유효승, 정정주 "PI Estimator를 이용한 LTR에 관한 연구," 석사학위논문, 한양대학교, 2002
- [5] D.Milosavljevic, "General conditions for the existence of a quasi-sliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems," Automat.RemoteContr., Vol.46, pp.307-314, 1985
- [6] Y.Dote and R.G.Hoft, "Microprocessor based sliding mode controller for DC motor driver," presented at the Ind. Application, Soc.Annu.Meeting, Cincinnati, OH, 1980
- [7] J.Y. Hung, W. Gao, J.C. Hung, "Variable Structure Control: A Survey," IEEE Trans., Ind. Electron., Vol. 40, pp.212-222, No.1, Feb. 1993
- [8] 채수경, 최재모, 정정주 "극 배치를 이용한 이산시간 슬라이딩 모드 제어기 설계," 투고준비중, 2003