

경사면 궤도에서 도립진자의 위치제어

이준범, 최호준, 홍석교  
아주대학교 전자공학부

Position Control of an Inverted Pendulum on an Inclined Railway

Jun-Beom Lee, Ho-Joon Choi, Suk-Kyo Hong  
School of Electronics Engineering, Ajou University

**Abstract** - This paper presents the position tracking control of an inverted pendulum on an inclined railway. In general, inclining the railway leads to errors in the pendulum angle even though the pendulum is stabilized, which results in errors in the cart position. To solve this problem, a linear quadratic regulation (LQR) controller with an integrator is used for compensating the resulting error in the cart position. The proposed method is evaluated by comparing LQR controllers with and without an integrator. Experimental results show that the LQR controller with an integrator is better in performance than one without an integrator.

위치,  $u$ 는 제어입력(토크)이다.

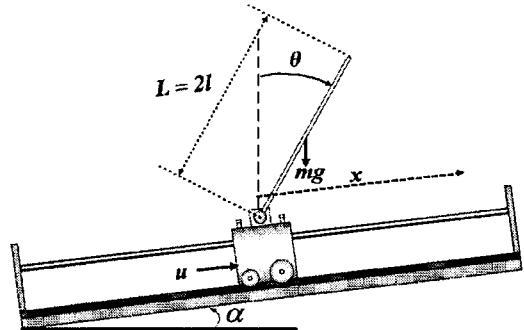


그림 1. 경사면 위에서 도립진자의 좌표계

1. 서 론

도립진자는 제어기의 성능 시험으로 가장 많이 쓰이는 시스템이며 다른 응용 분야로 로켓의 발사 후 자세제어 나 전차의 이동 중 포신 제어 등 많은 분야에 응용된다. 일반적인 제어에는 tracking control과 regulation문제가 있다. tracking문제는 변하는 목표값을 추종하는 것이며, regulation문제는 일정한 목표값을 유지하는 것이다.

도립진자 시스템을 기울일 경우 동역학식이 바뀌게 되는데, 바뀐 항을 외란으로 볼 수 있다. 또한 제어기를 설계하는데 있어서 시스템을 선형화 하는 과정에서 무시되는 성분 또한 외란으로 볼 수 있다. 이런 외란은 불확실성을 가지고 있기 때문에 정확하게 수학적 표현할 수 없다. 시스템에 적용되는 이런 외란 때문에 regulation을 위한 제어기를 tracking control에 적용할 때 목표값을 정확하게 추종할 수 없게 된다. 이를 해결하기 위한 방법으로  $H_\infty$ 제어[1]나 슬라이딩모드 제어[2], 최적제어 이론[3] 등이 연구되어 왔다.

이 논문은 외란에 의한 시스템의 성능저하를 극복하기 위해 기존 LQR 제어기에 적분기를 추가한 시스템을 구현하여 보았다. 이 제어기를 이용하여 경사면에 의한 외란과 모델링의 부정확성으로 인해 생기는 외란을 극복한 도립진자의 위치제어를 실험을 통해 확인한다.

2. 본 론

2.1 도립진자 시스템 모델링

경사면에서 도립진자의 좌표계는 그림 1과 같다[4]. 평지에서 선형화를 통해 얻은 동역학 방정식은 다음과 같다.

$$(M+m)\ddot{x} + m\dot{\theta} = u \tag{1}$$

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\theta} + m l \ddot{x} - m g l \theta = 0 \tag{2}$$

여기서  $M$ 은 카트의 질량,  $m$ 은 진자의 질량,  $l$ 은 진자의 길이,  $g$ 는 중력가속도,  $\theta$ 는 진자의 각도,  $x$ 는 카트의

표1. 도립진자 시스템의 상수

$g$	$\tau$	$l$	$K_v$
9.8	0.046	0.3	0.1661

실험에 사용할 모터 드라이브를 포함한 시스템의 동역학 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{x} = \frac{1}{\tau} (K_v u_r - \dot{x}) \tag{3}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l} \theta + \frac{3}{4\tau l} \dot{x} - \frac{3K_v}{4\tau l} u_r \tag{4}$$

여기서  $u_r$ 은 제어입력(전압),  $\tau$ 는 모터의 시상수,  $K_v$ 는 모터상수이다.

이 시스템의 상수는 다음과 같이 표1에 나타내었다. 여기서,  $\tau$ 와  $K_v$ 는 도립진자를 포함한 모터를 1차로 모델링 했을 때 계수이고, Curve Fitting 방법을 이용하여 그 값을 얻었다.

$x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$ 로 놓고 이 시스템을 이산화주기 0.01초로 ZOH를 통해 이산화 모델을 구하면 다음과 같다.

$$\underline{x}(k+1) = \Phi \underline{x}(k) + \Gamma u_r(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0.0090 & 0 \\ 0 & 1.0012 & 0.0025 & 0.0100 \\ 0 & 0 & 0.8046 & 0 \\ 0 & 0.2451 & 0.4887 & 1.0012 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0002 \\ -0.0004 \\ 0.0325 \\ -0.0812 \end{bmatrix} u_r \tag{5}$$

경사면에서의 도립진자 동역학 방정식은 다음과 같이 얻어진다[5].

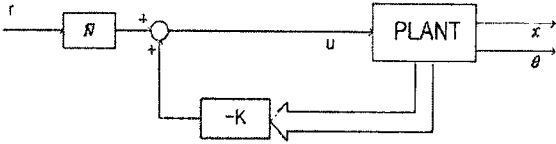


그림 2. 도립진자 제어 시스템의 블록도

$$(M+m)\ddot{x} + ml\cos(\theta+\alpha)\ddot{\theta} - ml\sin(\theta+\alpha)\dot{\theta}^2 + (M+m)g\sin\alpha + b\dot{x} + f_c \text{sign}(\dot{x}) = u \quad (6)$$

$$(J+ml^2)\ddot{\theta} + ml\cos(\theta+\alpha)\ddot{x} - mg\sin\theta - c\dot{\theta} = \tau \quad (7)$$

위의 (6),(7)식에서  $\alpha$ 와  $\theta$ 가 충분히 작고 각속도  $\dot{\theta}$ 가 무시될 수 있다고 가정하면 다음과 같이 비선형 항을 선형 항으로 바꿀 수 있다.

$$\cos(\theta+\alpha) \cong 1, \sin(\theta+\alpha) \cong \theta+\alpha, \dot{\theta}^2 \cong 0, \sin\theta \cong 0, \cos\theta \cong 1 \quad (8)$$

또한 수레의 점성 마찰력 계수  $b$ 와 막대의 점성 마찰력 계수  $c$ , 외란토크  $\tau$ 를 0으로 보고 (1)식과 비교하면 제어입력이  $(M+m)\alpha$ 만큼을 고려하여 보상되어야 함을 알 수 있다.

## 2.2 LQR을 이용한 상태 궤환 제어기의 설계

LQR기법은 성능지수(Performance Index)를 최소화시키는 조건을 찾는 것이다. 위의 (5)와 같은 선형 시스템이 주어지면 성능지수는 다음과 같이 정의된다.

$$J(x, u) = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)] \quad (9)$$

(9)식에서 가중치 행렬  $Q$ 와  $R$  값에 따라 페루프의 극점 위치가 결정된다. 시행착오의 방법으로 다음과 같이 가중치 행렬을 선정하여 상태 궤환 이득을 구할 수 있다.

$$Q = \text{diag}(1000, 10, 0, 0) \quad (10)$$

$$R = 25$$

위의 가중치 행렬을 통해 얻은 상태 궤환 이득은 다음과 같다.

$$K = [-5.9883 \quad -34.4285 \quad -14.4406 \quad -6.9546] \quad (11)$$

위치제어를 위한 feedforward gain  $\bar{N}$ 은 시스템이 다음과 같이 정상상태에 조건에서 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ Nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - I & \Gamma \\ H_n & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\bar{N} = KN_x + N_u \quad (13)$$

여기서,  $I$ 는  $4 \times 4$  단위행렬이며, 도립진자의 위치( $x_1$ )를 제어해야 하므로  $H_n$ 은  $[1 \ 0 \ 0 \ 0]$ 이 된다. (12), (13)식을 이용하여 구한 feedforward gain은 다음과 같다.

$$\bar{N} = -5.9983 \quad (14)$$

전체적인 제어시스템의 블록도는 그림 2와 같다.

## 2.3 실험 결과(평지)

6초 간격으로 카트의 목표값을 0.2, -0.2, 0으로 바꿨을 때 진자와 카트의 위치와 진자의 각도를 모의실험을 통해 구해 본 결과 오차 없이 목표값으로 추종함을 확인할 수 있었다.

그림 4,5는 평지에서 모의실험과 같은 목표값을 주었을 때 실험결과를 나타낸다. 실험결과, 모델링 부정확으로 인해 약간의 위치오차가 발생함을 확인할 수 있다. 이는 동역학 방정식의 정상상태 조건을 이용하여 얻은 feedforward gain만으로 해결할 수 없는 문제이다. 즉, 외란을 고려하지 않은 선형 동역학 방정식을 통해 얻은 LQR제어기와 feedforward gain만으로는 위치제어를 구현할 수 없다.

## 2.4 실험 결과(경사)

경사면에서는 평지와 다르게 (6)식과 같은 sin항이 추가되므로 그로 인한 위치오차가 더 커지게 된다.

그림 6은 도립진자 시스템을 약 1도 정도로 기울였을 때 카트의 위치를 나타낸다. 목표위치 0.2, -0.2, 0에 도달하지 못한 상태로 평행에 도달하는 것을 볼 수 있다. 이 때 그림 7에서 보듯이 처음 기준각에서 1도 기울어진 상태에서 도립진자가 평행을 이룬다. 이는 경사면에서 도립진자가 평행상태로 가기 위해 도립진자의 각이 처음에 0도가 아닌 경사면으로 기울어진 각으로 세워지기 때문에 그 오차를 보상하기 위해 위치오차가 발생하는 것이다.

$$u = -(K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4) + r\bar{N} \quad (15)$$

즉 위의 제어입력에서 도립진자의 각  $x_3$ 가 (+)의 오차를 갖고 평행을 이룰 때 제어입력이 0으로 평행상태를 이루기 위해  $x_1$ 이 (-)의 위치오차가 발생한다. 이를 극복하기 위해 적분기를 추가한 제어기를 설계하였다.

## 2.6 적분기를 추가한 상태 궤환 제어기의 설계

적분기를 추가한 전체적인 시스템은 그림 3과 같다[6]. 이산화영역에서 적분기를 수식으로 표현하면 (16)과 같다.

$$x_i(k+1) = x_i(k) + e(k) \quad (16)$$

$$= x_1(k) + x_3(k) - r(k)$$

이 식의 적분 상태  $x_1$ 은 도립진자 시스템의 변수가 아닌 컴퓨터(디지털 제어기) 내부의 값이다.

식(4)에서 위의 적분 상태가 추가되어 전체 시스템의 차수는 5가 되고, 상태궤환 이득 1개가 더 필요하다.

적분기를 추가하지 않았을 때와 실험 결과의 비교를 위해 4개의 상태궤환 이득으로 형성되는 극점의 위치를 찾고, 이 극점에 나머지 극점 하나를 더 추가 후 극배치기법을 이용하여 나머지 5개의 상태궤환 이득을 구하였다. 이 때 추가되는 극점을 2영역에서 0.98로 잡아 기존 4개의 극점의 변화가 거의 없게 하였다.

$$[K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4 \ K_I] = -[0.1198, 22.8284, 47.99621, 20.7696, 9.6961] \quad (17)$$

## 2.7 적분기를 포함 했을 때 실험결과(경사)

그림 8,9는 약 7도 경사면에서 적분기를 추가한 제어기를 사용했을 때 실험 결과를 나타낸다. 그림7과 달리 경사면에서 위치오차 없이 목표값을 추종하는 것을 확인할 수 있다.

이는 도립진자각의 오차를 카트의 위치가 아닌 적분 상태가 보상하기 때문에 위치오차를 극복할 수 있는 것이다.

$$u = -(K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4 + K_I x_5) + r\bar{N} \quad (18)$$

즉, (+)의 도립진자 각( $x_3$ )의 오차를 카트의 위치( $x_2$ )가 아닌 새로 추가한 적분 상태( $x_5$ )가 보상하기 때문에 위치오차 없이 목표값을 추종할 수 있는 것이다. 또한 적분기 추가로 모델링의 부정확으로 인해 생기는 위치오차 역시 함께 보상된다

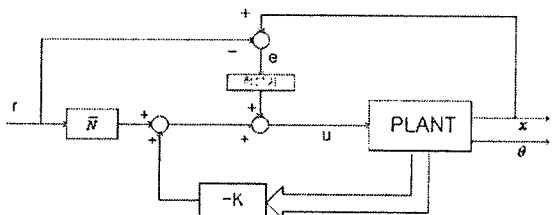


그림 3. 적분기를 추가한 도립진자 시스템의 블록도

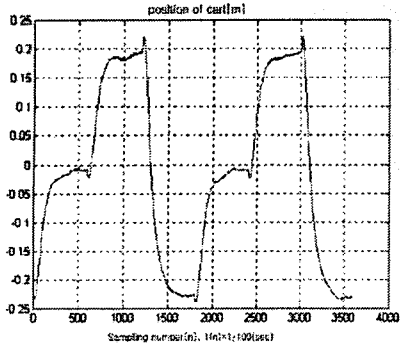


그림 4. 평지에서 카트의 위치

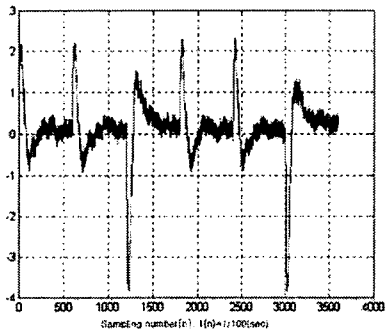


그림 5. 평지에서 막대의 각도

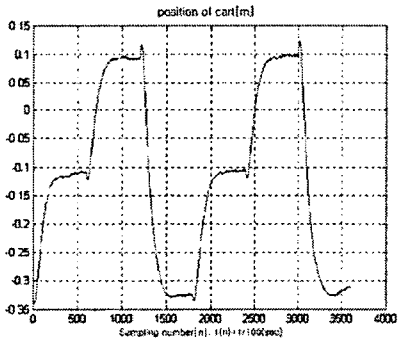


그림 6. 경사면에서 카트의 위치

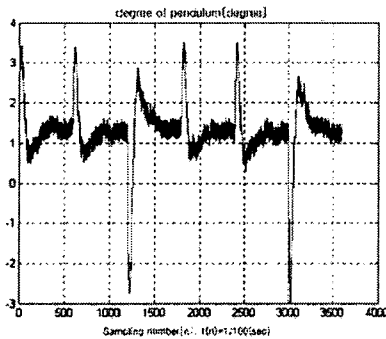


그림 7. 경사면에서 막대의 각도

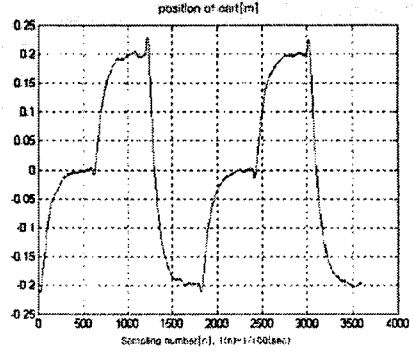


그림 8. 적분기를 추가했을 때 카트의 위치

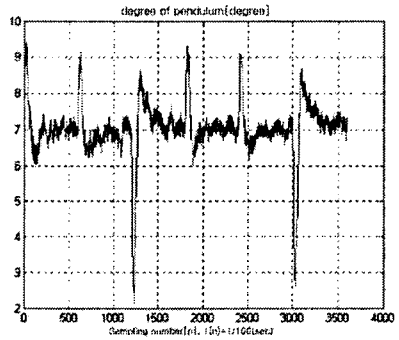


그림 9. 적분기를 추가했을 때 막대의 각도

### 3. 결 론

이 논문에서는 경사면에서 도립진자 시스템의 위치오차가 생기는 이유를 고찰하고, 이를 극복하기 위해 LQR 기법으로 설계한 제어기에 적분기를 추가한 형태의 제어를 설계하였다. 이를 통해 경사면에서 위치오차의 극복이 가능함을 실험을 통해 확인 하였다.

하지만 위와 같은 제어기는 목표 값이 어느 정도 일정한 시간동안 일정할 때만 제어가 가능하다. 즉 목표 값이 정현파일 경우 주파수가 높아지면 제어가 불가능해진다.

또한 이 시스템은 목표값의 지연응답에 대한 것도 고려하지 않았다. 목표값을 정현파로 할 경우 도립진자의 위치는 목표값에 비해 지연된 정현파로 나타낸다.

이런 문제들을 극복해야 실시간으로 응답을 나타내는 위치제어를 구현할 수 있다.

### [참 고 문 헌]

- [1] K. Zhou, and J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, 1998.
- [2] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electro Mechanical Systems*, Taylor & Francis, pp. 90-91, 1999.
- [3] K. J. Åström, and B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison Wesley, 1995.
- [4] 김승진, 외란 극복을 위한 역진자의 Fuzzy Supervisory 제어, 아주대학교 공학 석사학위 논문, pp. 3-6, 2002.
- [5] G. A. Medrano Cerda, "Robust computer control of an inverted pendulum," *IEEE Control Systems Magazine*, pp. 58-67, June 1999.
- [6] G. F. Franklin, J. D. Powell, M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, 3rd ed., pp. 322-325, 1998.