

국소적 격자 삽입법의 개발 및 응용

서용권[†]

Development of Zonal-Embedded-Grid Method and its Application

Yong Kweon Suh

Abstract

In this paper the numerical method with a zonal embedded grid system for an incompressible flow within a circular container is presented. The algorithm is validated by its application to some typical flow models including the spin-up flow inside a half-circle geometry

Key Words : Zonal Embedded Grid(국소적 삽입격자), Circular Container(원형 용기)

1. 서론

외부 경계가 원형인 영역 내의 유체유동의 문제는 산업 및 자연환경에서 흔히 접할 수 있는 문제이다. 예로서, 원관 내의 층류 및 난류 문제, 원통 용기 내의 교반 및 혼합문제 등을 들 수 있다. 이 경우, 원주방향으로 유동이 주기적임을 감안하면 이 유체유동의 문제는 스펙트럴 방법(수도-스펙트럴 방법을 포함)을 사용함이 자연스럽게 보일지 모른다. 그러나, 스펙트럴 방법은 높은 레이놀즈 수의 흐름에서 흔히 관측되는 속도 및 기타 흐름 물성치들 자체 혹은 그 미분이 공간적으로 불연속적인 양상을 보이는 경우에는 Gibbs의 현상 때문에 오히려 부적절하다. 또한 단순한 원통좌표계의 격자계에 의한 유한체적법 또는 유한차분법은 중심에서의 격자망이 너무 조밀하여 외재법을 사용하였을 때는 시간간격이 매우 작아지는 폐단이 있다.⁽¹⁻²⁾ 내재법을 사용하면 시간간격의 제약에서 벗어날 수 있으나⁽³⁾ LES 등과 같은 난류모델링의 적용이나 기타 다른 수송 방정식을 풀고자 할 때는 내재법의 적용 자체가 상당한 어려움을 야기할 수 있고 또한 그 안정성도 보장되어 있지 않다. 삼각형 구조에 의한 비정렬 격

자 시스템은 원형 경계를 유연하게 처리하며 중심에서의 격자망도 조밀해지는 것을 피할 수 있으나 차분화 이후의 산술 방정식이 대각화되어 있지 않으므로 추가적인 대각화 작업이 필요하며 또한 완전한 대각화는 매우 어려운 실정이다.

외부 경계가 원형인 영역 내의 유체유동의 문제를 원통 좌표계를 사용하여 외재법에 의한 유한체적법(또는 유한차분법)으로 해석하되 격자망의 크기가 지역적으로 크게 다르지 않도록 하는 zonal embedded grid를 사용함으로써 위의 단점을 모두 해소할 수 있는 수치기법을 개발하고자 한다. zonal embedded grid에 의한 유동의 수치해석법은 이미 발표된 바 있으나⁽⁴⁾ 이는 직각 좌표계에 대한 것이고 원통좌표계의 경우에 대한 연구보고는 찾아볼 수 없다. 본 연구에서 개발된 기법을 사용하여 반 원주 내의 스피업 유동을 해석하고 실험결과와 비교함으로써 수치해석 기법의 타당성을 확보하고자 한다.

2. 지배방정식과 수치해석 방법

Zonal embedded grid의 구체적인 알고리즘을 설명하기 위해 원형 및 반원형 용기 내의 spin-up 유동 문제를 대상으로 수식을 전개한

[†] 동아대학교 기계산업시스템공학부
E-mail : yksuh@mail.donga.ac.kr

다. 원형 용기 내에서 초기의 속도분포에 따른 유동의 감쇠 문제도 다루었으나 이는 앞의 스피널 유동의 특수한 형태로 간주할 수 있으므로 별도의 수식화 작업은 불필요하며, 또한 다른 일반 유동문제에의 연장 적용도 쉽게 이루어진다.

2차원 비압축성 유동의 지배방정식을 각속도 Ω 로 회전하는 원통좌표계로 나타낸다. 단, 시간은 $1/\Delta\Omega$ 로, 공간 좌표는 원통의 반경 R 로, 속도는 $R\Delta\Omega$ 로, 압력은 $\rho(R\Delta\Omega)^2$ 으로 무차원화한다. 여기서, $\Delta\Omega$ 는 스피널을 위한 각속도 증분을 나타낸다. 즉, 용기는 초기에 $\Omega - \Delta\Omega$ 의 각속도로 회전하고 있다가 어느 시점에서부터 속도가 증가하여 최종 속도 Ω 에 도달하는 것이다. 이 과정에서 형성되는 용기 내 비압축성 유체의 스피널 유동을 지배하는 연속방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = rw_E$$

여기서, w_E 는 용기 바닥에서의 점성작용에 따른 Ekman pumping 효과를 나타내는 양으로서 와도(vorticity) $\zeta = (\partial rv/\partial r - \partial u/\partial \theta)/r$ 에 의해 $w_E = \sqrt{\zeta \epsilon / Re} / (2h)$ 으로 구해진다(Suh & Choi⁽⁵⁾ 참조). 그리고, 스피널을 위해 증가되는 용기의 각속도 변화는 무차원 주기 t_s 에 대해 $\omega (= \pi/t_s)$ 로 조정된다. 그리고 레이놀즈 수 Re 와 로스비 수 ϵ 는 각각 $Re = R\Delta\Omega^2/\nu$, $\epsilon = \Delta\Omega/\Omega$ 로 정의된다.

Fig. 1은 원통좌표계에서 제작된 zonal embedded grid를 보여주고 있다. 종래의 격자는 중심에서 조밀하기 때문에 외재법을 사용하였을 때 상당히 작은 시간 간격을 적용하지 않으면 수치해석이 발산하는 문제점이 있다. 또한 중심부에서 불필요하게 많은 격자는 계산시간을 더욱 증가시키는 요인이 된다.

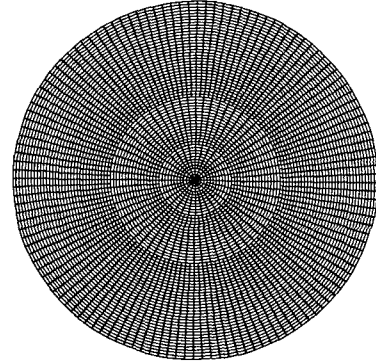


Fig. 1 Zonal embedded grids for the domain within a circle.

지배방정식의 차분화는 유한체적법에 근거하였으며 일반 격자계에서의 차분법과 같은 원리에 입각한다. 먼저 운동량 방정식을 u - 및 v -셀에서 차분화한다. 그리고 이 결과를 p -셀에서 연속 방정식을 차분화한 결과에 대입하여 압력 방정식을 유도한다. 이 과정에서 격자 수가 달라지는 두 영역 사이의 셀에서는 보간법에 의해 압력을 처리하므로 6개 격자점의 압력이 방정식에 참여하게 된다. 그리고 이로 인해 차분화된 압력 방정식의 행렬 형태는 비대칭이 된다. 이것을 대칭으로 만들기 위한 방법이 중요하며 본 연구에서는 수렴에 거의 문제가 없는 방법을 고안하여 대칭행렬을 구성하였다.

그리고 원주 방향 미분은 $O(\Delta\theta^4)$ 의 알고리즘을 적용함으로써 중심부에서 원주 방향의 격자 수가 상대적으로 작아짐에 따른 정밀도의 문제점을 해결하였다. 변수 값이 정의되지 않은 지점에서의 변수값을 구할 때에도 $O(\Delta\theta^4)$ 의 알고리즘을 적용하는 것이 중요하였다.

주어진 압력 방정식은 ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient)법으로 풀었으며 운동량 방정식의 시간 적분은 4계의 Runge-Kutta법으로 처리하였다.

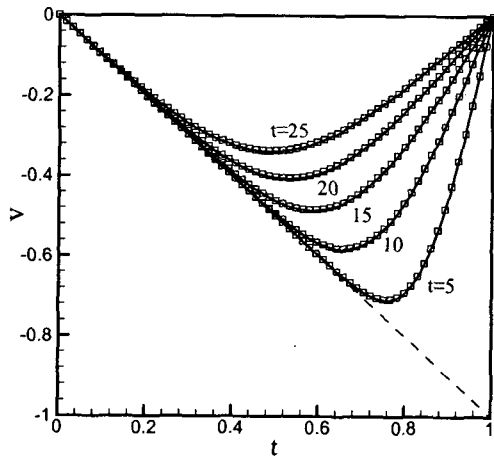


Fig. 2 Azimuthal-velocity profile obtained numerically for the axisymmetric spin-up flows. Symbols are obtained by the two-dimensional computation with the embedded grids and the solid lines by the one-dimensional equation.

3. 수치해석 결과

본 연구에서 개발한 수치기법의 타당성 확보를 위해 원형 용기 내 축대칭 스피업 유동에 대한 수치해석을 수행하였으며, Fig. 2는 1차원 방정식으로 수치해석한 결과와 비교한 것이다. 여기서 1차원 해석 결과는 원통좌표계로 나타낸 지배방정식에서 모든 $\partial/\partial\theta$ 의 항을 0으로 둔 1차원 지배 방정식으로 수치해석한 것이다. 그리고 2차원 수치해석 결과는 원주방향 속도 성분 v 를 각 r -지점에서 원주방향으로 평균화시킨 것이다; 실제로 이 스피업 유동은 주어진 파라미터에서 축대칭을 유지하며 모든 변수들은 θ -방향으로 변함없음을 수치해석 결과에서 확인할 수 있었다. Fig. 2를 보면 본 연구에서 개발한 코드의 결과와 1차원 방정식에 대한 수치해석 결과가 거의 일치하며, 이로부터 본 연구를 통해 개발된 수치해석 기법, 알고리즘, 및 전산코드가 축대칭 유동의 경우 타당함을 확인할 수 있다.

Fig. 3은 반원형 용기 내의 스피업 유동 문제에 대한 수치해석 결과를 실험결과와 비교한 것이다. 반원형 용기 내의 스피업 유동에 대해

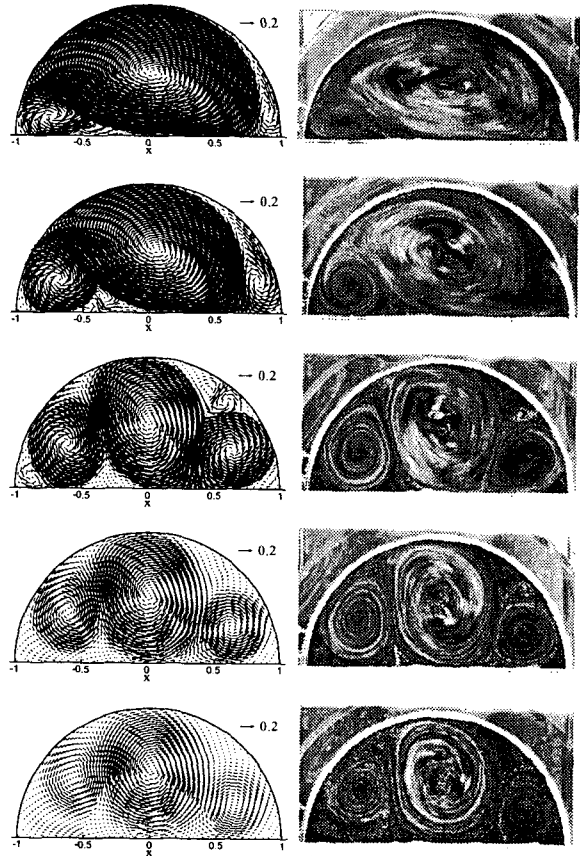


Fig. 3 Comparison between the numerical (left; velocity vectors) and experimental (right; pathlines) results at $Re=5000$, $\epsilon=0.5$, $h=1$ and $\omega=6.35$.

서는 van Heijst 연구그룹⁽⁶⁻⁷⁾이 선행연구를 수행한 바 있으나 수치해석과 실험결과가 잘 맞지 않는 것으로 보고되었다. 수치해석 결과는 속도 벡터이며, 실험은 액체(물)의 표면에 평균 직경 0.23 mm의 아크릴 파우더를 분산시켜 촬영한 궤적선들(pathlines)이다. 수치해석 결과와 실험 결과는 정성적으로 잘 일치하고 있다.

Fig. 4는 Fig. 3과 같은 조건에서 $x=0$ 의 중심 선 상에서의 u -속도 분포를 보여준 것이다. 여기서 실험결과는 MQD-PIV 기법⁽⁸⁾으로 구한 속도장으로부터 얻은 것이다. PIV 실험에 사용된 비디오 카메라의 해상도가 640×480 pixel로서 그렇게 높지 않음을 감안하면, 실험결과와 수치해석 결과는 만족할 만큼 일치하는 것으로 판단할 수 있다.

4. 결 론

zonal embedded grid에 의한 유동의 수치해석 방법을 성공적으로 개발하였으며, 이를 원형 용기 내 감쇠유동에 적용한 결과 단순한 원통좌표계의 격자계에 비해 계산시간을 훨씬 더 크게 잡을 수 있는 이점이 있었다. 중심부에서 원주방향으로의 격자 수가 상대적으로 적어져서 수치해의 정밀도가 떨어질 수 있는 문제점은 $O(\Delta\theta^4)$ 의 알고리즘을 사용함으로써 해결할 수 있다. 축대칭 원형 용기 내 스피업 유동에 본 수치해법을 적용한 결과 1차원 해석 결과와 정확히 일치하였으며 이를 통해 본 수치해석 알고리즘의 타당성을 확인할 수 있었다. 레이놀즈 수 5000, Rossby 수 0.5에서 반원형 용기 내 스피업 유동에 대한 수치해석한 결과를 수행하고 유동 가시화 및 PIV 해석한 실험결과와 비교하였으며, 두 결과는 정량 및 정성적으로 거의 일치하였다.

후 기

이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원(KRF-2002-041-D00080)에 의하여 연구되었음.

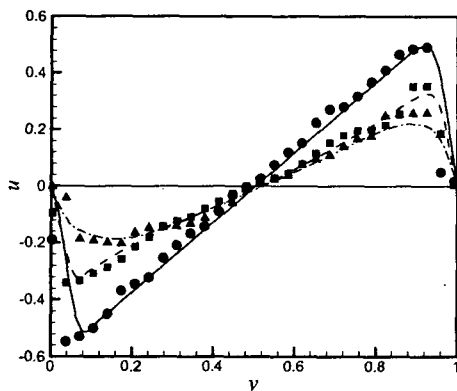


Fig. 4 u -velocity profiles along the y -axis at $t=6$ (solid line and circles), $t=12$ (dashed line and squares) and $t=24$ (dash-dot lines and deltas) obtained numerically (lines) and experimentally (symbols) for the half-circle spin-up flow with the same parameter values as Fig. 3.

참고문헌

- [1] Verzicco, R. and Orlandi, P., 1996, "A Finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates", *J. Comput. Phys.* **123**, 402-414.
- [2] Fukagata, K. and Kasagi, N., 2002, "Highly energy-conservative finite difference method for the cylindrical coordinate system", *J. Comput. Phys.* **181**, 478-498.
- [3] Akselvoll, K. and Moin, P., 1996, "An efficient method for temporal integration of the Navier-Stokes equations in confined axisymmetric geometries", *J. Comput. Phys.* **125**, 454-463.
- [4] Kravchenko, A.G., Moin, P. and Moser, R., 1996, "Zonal embedded grids for numerical simulations of wall-bounded turbulent flows", *J. Comput. Phys.* **127**, 412-423.
- [5] Suh, Y.K. and Choi, Y.H., 2002, "Study on the spin-up of fluids in a rectangular container using Ekman pumping models", *J. Fluid Mech.*, **458**, 103-132.
- [6] van Heijst, G.J.F., 1989, "Spin-up phenomena in non-axisymmetric containers", *J. Fluid Mech.*, **206**, 171-191.
- [7] Andersson, H.I., Billdal, J.T. and van Heijst, G.J.F., 1992, "Spin-up in a semicircular cylinder", *Int. J. Num. Methods Fluids*, **15**, 503-524.
- [8] Suh, Y.K., 2003, "Multi-Frame MQD-PIV", *KSME Int. J.*, **17**, 1463-1473.