동적인 B-spline 곡선과 곡면의 효율적인 평가방법
Fast Evaluation of a dynamic B-spline Curve and Surface

류중현[1], 김덕수[2]
Joonghyun Ryu and Deok-Soo Kim

ABSTRACT

In many applications of computer aided geometric design and computer graphics, B spline is one of the most popular representation for curves and surfaces, and the evaluation of B-spline curves and surfaces is the most frequently used operation. For the evaluation and others, the power form representation of the curves and surfaces is preferred because it is possible to speed-up the operation using Horner's rule. In this paper, we present a new algorithm for the above-mentioned conversion focusing on a dynamic case. Experiment shows that the proposed algorithm significantly outperforms the conventional approach when one or more control points of a B-spline curve and surface are dynamically moving.

1. 서론

컴퓨터 그래픽이나 기하 모델링분야에서, B-spline 곡선이나 곡면을 power기저형태로 기저변환해서 사용할 필요성이 종종 생긴다. 곡선이나 곡면을 power기저형태의 다항식으로 표현할 경우 곡선이나 곡면위의 점들의 계산은 Honor's rule을 이용해서 효율적으로 행해질 수 있으며, power기저형태의 다항식의 미분식 또한 power기저형태로 간단히 구할 수 있기 때문에 미분값의 계산도 편리하게 할 수 있는 장점이 있다.

일반적으로 컴퓨터지원설계(CAD)분야에서는 매개변수 형태로 표현된 곡선과 곡면을 자주 이용하지만, 곡선이나 곡면상에 임의의 점이 놓여 있는지 여부를 판단하는 문제(Point inclusion문제)의 경우, 음함수형태의 곡선이나 곡면이 매개변수형태보다 계산상으로 유리하다. 이러한 이유 때문에 매개변수형태의 곡선이나 곡면을 resultant를 이용한 음함수화(implicitization)를 통해 음함수 형태로 바꾸어야 할 필요성이 생긴다[2].

이 경우 변환의 대상이 되는 곡선이나 곡면은 power기저형태로 표현이 되어야 하며[8], 곡선이나 곡면의 차수가 커질 경우 power기저형태로의 변환을 위한 계산시간은 무시할 수 없게 된다. 이 논문에서는 B-spline 곡선과 곡면을 매개변수 구간(knot span)/구역(knot cell)별 power기저형태의 다항식 곡선과 곡면으로 변환하는 알고리듬에 대해서 논한다. 특히, 곡선과 곡면의 조정점이 시간에 따라 변화함으로써 곡선과 곡면의 모양이 동적으로 변화하는 경우에 대해서 초점을 맞추어 전개한다.(참고 그림 1)

---

1) 한양대학교 시스템응용공학부 산업공학과 박사과정
2) 한양대학교 시스템응용공학부 산업공학과 부교수

조정점의 변화가 없는 *정적*인 B-spline 곡선과 곡면을 power기저형태로 변환하는 기존의 방법은 두 가지가 있다. 임의의 다항식은 테일러 전개 방법(Taylor expansion)을 통하여 특정 매개변수 값에서의 다항식의 차수만큼의 미분값을 이용하여 power기저형태의 다항식으로 변환이 가능하므로, 이 방법을 매개변수 형태의 B-spline 곡선과 곡면에 적용하면 정적인 B-spline 곡선과 곡면을 power기저형태로 변환할 수 있다(이후 TE라 명명)[6]. Knot refinement라는 기하학적인 작업을 통하여 B-spline 형태의 곡선과 곡면은 Bezier 형태의 곡선과 곡면으로 변환이 가능하며[3][4][5][6][7], 이를 다시 power기저형태로 변환하는 방법이 문헌에 소개되어 있다(이후 KR이라 명명)[6][7].

이 논문에서 제시하는 알고리듬은 먼저, 각 매개변수 구간의 B-spline 기저함수를 구성하는 모든 1차식들을 찾아낸 후 이 1차식들을 직접 곱해서 전개함으로써 B-spline 기저함수들의 power기저형태를 구한 후, 다음단계에서 각 구간의 power형태의 기저함수들과 해당 조정점들을 곱해줌으로써, power기저형태의 B-spline 곡선을 구하게 되며[1], 비슷한 과정에 의해서 B-spline 곡면으로의 확장도 가능하다.

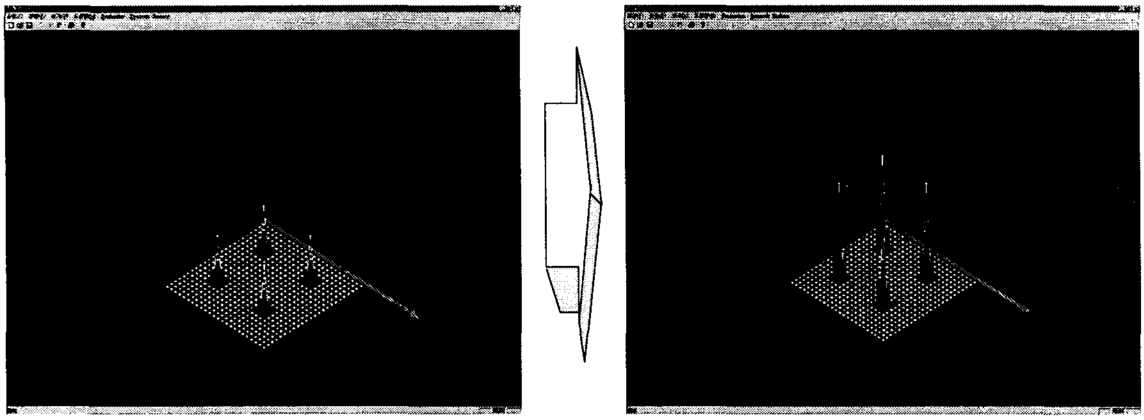


그림 1. 동적인 B-spline 곡면의 예

2. 정적인 B-spline 곡선의 power기저형태로의 변환

차수 p의 정적인 B-spline 곡선에 대한 정의는 식 1과 같으며,

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(t)\ \mathrm{P_i} \quad a \le t \le b \tag{1}$$

여기서 일반적으로 B-spline 기저함수 $N_{i,p}(t)$는 식 2와 같은 재귀함수의 형태를 취하게 된다[7].

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t) \tag{2}$$

B-spline 기저함수는 그림 2에서와 같이 매개변수의 각 구간별로 다항식의 형태를 취하며, B-spline 곡선 또한 구간별 다항식의 형태를 갖는다[5][6][7]. 본 논문에서 제시하는 알고리즘은 이러한 B-spline 곡선과 곡면을 구간/구역별로 power기저형태를 갖는 다항식의 집합으로 변환하는 것에 관한 것이다. B-spline 곡선을 power기저형태로 변환하기 위해서 먼저 각 구간별로 필요한 B-spline 기저함수의 부분들을 power 기저형태로 변환한다. 예를 들어, 그림 2의 각 구간에는 4개의 기저함수의 부분들이 존재하며 일반적으로 이 숫자는 곡선의 차수보다 하나 더 많은 수이다.

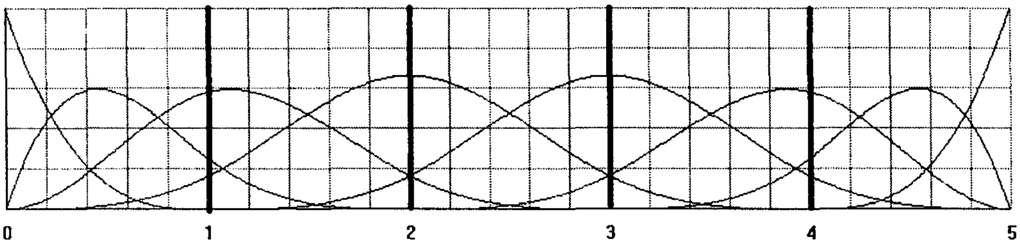


그림 2. 3차 B-spline 기저다항식

B-spline 기저함수의 계산에 식 2의 2개의 1차 다항식이 참여하는 일정한 규칙을 찾아낼 수 있으며, 이를 이용하여 곡선의 차수에 따라서 필요한 1차 다항식들의 곱과 합을 이용해 매개변수의 각 구간별로 B-spline 기저함수의 부분들을 power기저형태로 계산해 낸다. 일단 이 계산을 하고 나면, 식 3과 같이 각 구간별로 power기저형태의 기저함수들과 해당 조정점들과의 선형결합에 의해서 구간별 power기저형태의 다항식 곡선을 구할 수 있다[1].

$$\mathrm{C_i}(t) = \sum_{j=i-p}^{i} \tau_{j,i}(t)\ \mathrm{P_j} \tag{3}$$

3. 동적인 B-spline 곡선의 power기저형태로의 변환

동적인 B-spline곡선이란 식 4과 같이 시간에 따라서 조정점의 일부 혹은 전체가 움직임으로써 곡선의 모양이 변화하는 곡선이라 정의된다[1].

$$\mathrm{C}^{d}(t) = \sum_i N_{i,p}(t)\ \mathrm{P_i} + \sum_j N_{j,p}(t)\ \overline{\mathrm{P_j}} \quad a \le t \le b \tag{4}$$

여기서 $\overline{\mathrm{P_j}}$는 위치가 변화된 조정점을 의미한다. 만약 2절에서의 방법으로 정적인 B-spline 곡선이 power기저형태로 변환이 되었다면, 조정점의 변화에 의한 동적인 곡선의 power 기저형태로의 변환과정은 다음과 같다.

변화된 조정점이 영향을 주는 B-spline 곡선의 매개변수 구간을 찾은 뒤 그 구간에서 변화가 생긴 조정점들의 차이값(변화하기 전후의 차이)과 B-spline 기저다항식을 곱한 후 이미 power기저형태로 만들어 놓은 그 구간의 다항식 곡선과 더하기를 해

준다[1]. 식 5는 매개변수의 각 구간에 대한 이와 같은 연산과정을 나타내고 있다.

$$\overline{C_i}(t) = C_i(t) + \sum_{k \in K} \tau_{k,i}(t) D_k \tag{5}$$

여기서 첨자 i는 변화된 조정점들이 영향을 주는 곡선의 매개변수 구간을 의미하고, 첨자 k는 그 구간에서 변화된 조정점들의 첨자들이며(i 구간안에도 변화된 조정점과 그렇지 않은 조정점들이 같이 존재함), $\overline{C_i}(t)$와 $C_i(t)$는 각각 조정점 변화전과 변화후의 다항식 형태의 곡선식을 의미하며 모두 power 기저형태로 변환된 상태이다.

4. 동적인 B-spline 곡면의 power기저형태로의 변환

차수 $p \times q$의 B-spline 곡면의 정의는 다음 식 6와 같으며[7],

$$S(s,t) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} N_{i,p}(s) N_{j,q}(t)\ P_{ij} \quad a \le s \le b,\ c \le t \le d \tag{6}$$

곡선의 경우와 비슷하게 두 매개변수에 의해 정해지는 각 구역별로 B-spline 기저함수의 tensor곱 형태로 이루어진 이변수 다항식의 부분들을 power기저 형태로 구한 후 각각의 해당 조정점들과의 선형결합에 의해서 그 구역에서의 power 기저형태의 곡면의 다항식을 구할 수 있다. 동적인 B-spline 곡면은 다음의 식 7과 같이 정의되며,

$$S^d(s,t) = \sum_{(i,j) \in I} N_{i,p}(s) N_{j,q}(t)\ P_{ij} + \sum_{(k,l) \in J} N_{k,p}(s) N_{l,q}(t)\ \overline{P_{ij}} \quad a \le s \le b,\ c \le t \le d \tag{7}$$

곡선의 경우와 마찬가지로 변화된 조정점의 영향을 받는 매개변수 구역에 대해서 식 8과 같은 연산을 해 주면 동적인 B-spline 곡면을 구역별 power기저형태의 다항식으로 변환이 가능하다.

$$\overline{S}_{k,l}(s,t) = \sum_{(i,j) \in I} \tau_{i,j(s)}\ \tau_{k,l(t)}\ P_{ij} + \sum_{(m,n) \in J} \tau_{m,n(s)}\ \tau_{k,l(t)}\ D_{mn} \tag{8}$$

5. 실험결과

동적인 B-spline 곡선과 곡면을 구간/구역별 power기저형태의 다항식으로 변환하는 것에 대해서 제안하는 알고리듬(DE라 명명)과 기존의 두 가지 방법 TE와 KR의 계산시간을 비교하였다. 3, 4, 5차의 곡선과 곡면에 대해서 움직이는 조정점의 개수를 1개에서 10까지 증가시키면서 실험한 결과가 그림 3에 있으며 결과는 곡선의 차수나 움직이는 조정점의 개수에 무관하게 제안하는 알고리듬이 더 우수함을 알 수 있었다.

곡면에 대해서도 비슷한 결과를 얻을 수 있었으며, 곡면의 경우 특히, 곡면 위의 점들을 계산하는 추가적인 실험을 해 보았다. 각 차수의 B-spline 곡면에 대해서 움

직이는 조정점들의 개수는 1개에서 5까지, 각 매개변수 구역별로 계산해야 될 점들의 개수는 1개에서 25까지 증가시키면서 제안하는 알고리듬에 의한 방법과 식 6을 직접 이용하는 방법(CON이라 명명)으로 곡면 위의 점들을 계산하는 시간을 비교하였다.

제안하는 방법을 이용할 경우 조정점이 변할 때마다 영향을 받는 구역별로 power 기저형태의 다항식을 수정하는 추가적인 비용이 필요하지만 Honor's rule을 이용하여 계산시간을 단축시킬 수 있으므로, 계산해야 될 곡면 위의 점들의 개수가 증가하면 이러한 시간은 보상될 것이다. 실험결과에 의하면 각 매개변수 구역에서 계산해야 될 곡면 위의 점의 개수가 9개 이상만 되어도 제안하는 알고리듬이 기존에 방법과 비교해서 효율적임을 알 수 있었으며, 그림 4는 25개의 점을 각 구역에서 계산하는 경우 3x3, 4x4, 5x5의 차수의 곡면에 대해서 실험한 결과를 보여 주고 있다.

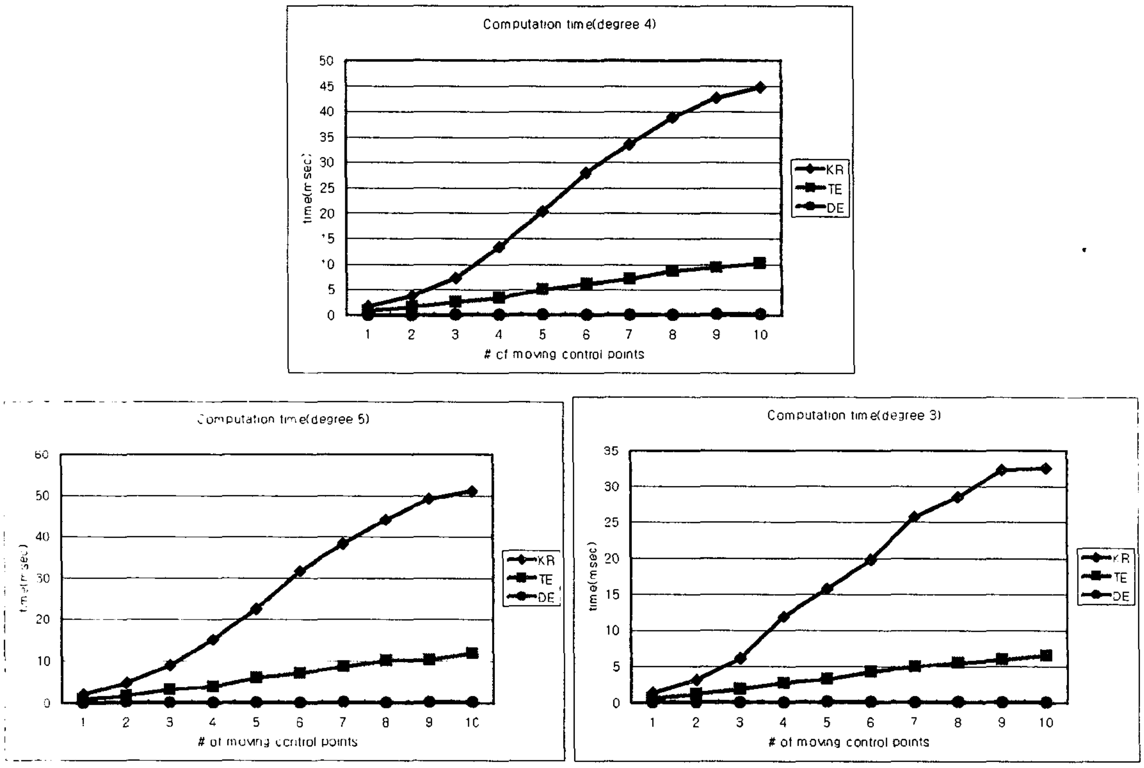
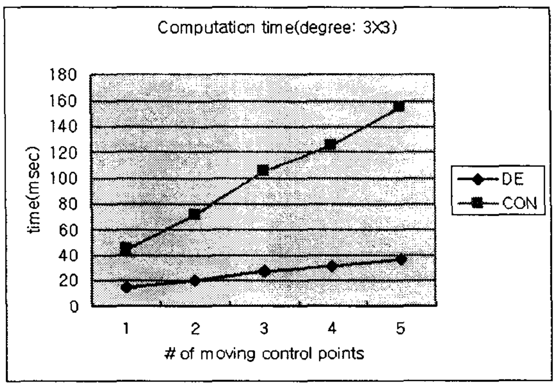


그림 3. 동적인 B-spline 곡선을 power기저형태로 변환하는 계산시간비교



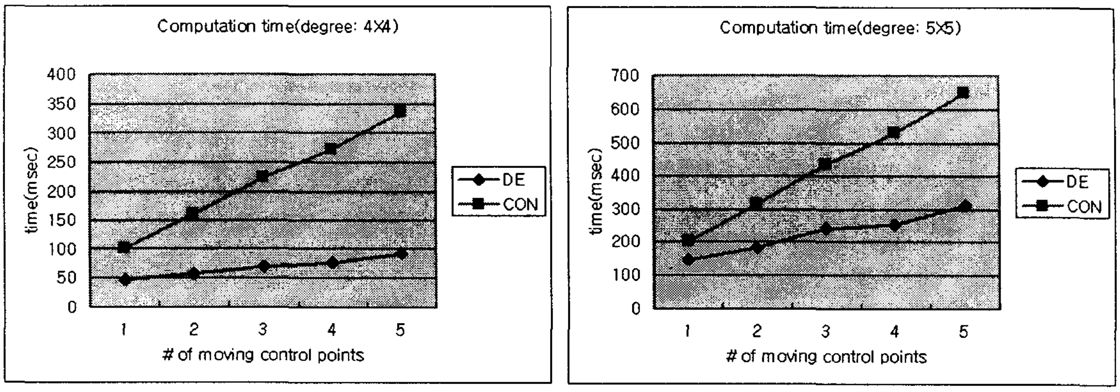


그림 4. 동적인 B-spline 곡면위의 점 계산시간비교(하나의 매개변수 구역 당 25개의 점계산)

6. 결론

본 논문에서는 B-spline 곡선과 곡면을 power기저형태의 매개변수 구간/구역별 다항식으로 변환하는 알고리즘을 바탕으로 효율적인 B-splnie 곡선과 곡면의 평가방법에 대해서 논의하였다. 제안하는 알고리즘은 특히, 곡선이나 곡면의 조정점이 동적으로 변화하는 경우에 기존의 방법에 비해서 효율적임을 실험을 통해서 알 수 있었다.

참고문헌

[1] 김덕수, 류중현, 이현찬, 신하용, 장태범; "B-spline 곡선을 power 기저형태의 다항식 곡선으로 바꾸는 Direct Expansion 알고리듬", 한국 CAD/CAM 학회 논문집, 5(3): 276-284, 2000.

[2] Bloomenthal, J.; Introduction to implicit surfaces, Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1997.

[3] Boehm, W. and Prautzsch, H., "The insertion algirthm," Computer-Aided Design, 12(4): 58-59, 1985.

[4] Boehm, W., "On the efficiency of knot insertion algorithms," Computer Aided Geometric Design, 2(1-3): 141-143, 1985.

[5] Farin, G.; Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design, 3rd Ed., Academic Press, 1997.

[6] Lasser, D. and Hoschek, J.; Fundamentals of Computer Aided Geometric Design, A. K. Peters, 1993.

[7] Piegl, L. and Tiller, W.; The NURBS Book, Springer, 1995.

[8] Sederberg, T. W.; "Implicit and parametric curves and surfaces for computer aided geometric design," Ph. D. Thesis, Purdue University, 1983.