

# 상관관계의 존재하에서 붓스트랩 기법을 이용한 $\bar{x}$ 와 EWMA 관리도의 수행도 평가

## Performance Evaluation of $\bar{x}$ and EWMA Control Charts using Bootstrap Technique in the Presence of Correlation

손한덕\*

Han-Deak Shon

송서일\*\*

Suh-Il Song

### Abstract

In this study, according to *MARMA*(1,0) model which was suggested by Seppälä, in case of existing autocorrelation in  $\bar{X}$  control chart and EWMA control chart, the standard method and the non-parametric bootstrap method were compared and analysed using the bootstrap method which use the resampling prediction residual.

### 1. 서론

오늘날 많은 제조현장에서 제품의 품질수준을 파악하고 변동을 줄이는데 널리 사용되는 통계적 공정관리도의 기법은 1924년에 W. A. Shewhart가 개발한  $3\sigma$ 관리도 이후로 CUSUM 관리도, EWMA 관리도, 시계열 관리도 등 여러 가지 관리도로 개발되고 발전되어 왔으나, 이러한 기법들은 대개가 모수적 방법으로서 모집단이 정규분포를 따른다는 것과 관측치들이 서로 독립이라는 가정을 전제로 하고 있다.

그러나 오늘날 측정기술의 발달과 샘플링 빈도의 증가로 많은 관측치들은 시간과 밀접한 관계를 갖게 되어 관측치들 사이에 고유의 자기상관이 나타나게 되므로 더 이상 전통적인 관리도의 기본 가정인 모집단의 분포가 정규분포를 따른다는 가정을 유지할 수 없게 되었다.<sup>1),2),3),4),5),6)</sup>

---

\* 부산정보대학 산업경영시스템과 교수

\*\* 동아대학교 산업시스템공학과 교수

따라서 모집단 분포의 가정으로부터 벗어날 수 있는 비모수적 방법으로서의 전환을 모색하게 되었으며, 최근 컴퓨터를 이용한 재샘플링 절차인 붓스트랩 방법이 많이 연구되고 있다.

본 연구에서는 Seppälä가 제시한 수정된 *MARMA*(1,0) 모형을 이용하여 표준  $\bar{X}$  관리도와 EWMA 관리도에서 자기상관관계가 존재할 경우에 비모수적 기법인 붓스트랩 방법으로 예측 잔차를 재샘플링하는 방법을 이용하여 각 관리도의 관리한계를 설정하고 다양한 조건하에서 그 수행도를 비교·분석하였다.

## 2. *MARMA*(1,0) 모형에서 Seppälä의 $\bar{X}$ 관리도

본 연구에서는 Seppälä<sup>5)</sup>의 붓스트랩 알고리즘을 사용하기 위하여 실제의 발생시킨  $X_{ij}$ 의 평균값  $\bar{X}_t$ 를 사용한다. 그러나 이 방법은 평균값  $\bar{X}_t$ 를 사용하는데 있어서 평균값에 대한 해법을 제시하지 못하므로 식 (1)의 특별한 방법으로 *MARMA*(1,0) 모형에 하위집단 추정치들을 적합시킨다.

$$X_{ij} = \xi + \phi_1 \bar{X}_{t-1} + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

여기서  $X_{ij}$ 는 이전의  $\bar{X}_{t-1}$ 값에 의존하고, 오차항  $\varepsilon_{ij}$ 는 독립이다. 이 모형에서 전 단계 예측모델은 식 (2)와 같고,

$$F_{ij} = \xi + \phi_1 \bar{X}_{t-1} \quad (2)$$

예측치는 평균값에 기초로 하여  $F_{ij} = \bar{F}_t$ 이다. 따라서 독립상수  $\xi$ 는 0으로 두며, Seppälä가 제시하는 붓스트랩 관리도에서  $\varepsilon_{ij}$ 가 백색확률오차일 때 자기회귀관계가 있을 경우 어떠한 영향이 있는가를 Table 1과 같이 나타내었다.

Table 1은 샘플크기  $n$ 가 4이고 하위그룹의 크기  $k$ 가 25일 때 관리한계를 벗어날 확률  $\alpha$ 가 0.0026일때의 시뮬레이션에 의한 관리한계와 붓스트랩 방법에 의한 관리한계를 나타낸 것이다.

그리고 표준 Shewhart 관리도의 관리한계(*SUCL*과 *SLCL*)는 공정이 표준정규분포  $N(0,1)$ 를 따를 때, 표준방법에 의한  $\pm Z_{\alpha/2}/\sqrt{n}$ 에 의해 관리한계를 벗어날 확률  $\alpha$ 에 따라  $\pm 1.50573$ 과  $\pm 0.97998$ 이다.

Table 1에 나타나듯이 자기회귀 모수가 음의 상관관계를 가질 경우와 양의 상관관계를 가질 경우에 시뮬레이션에 의해 설정된 관리한계보다 붓스트랩 관리한계가 약간 넓게 설정되고 있으며, 상관관계에 따른 관리한계가 변화함을 알 수 있다.

Table 1. Comparison of  $\bar{X}$  and bootstrap control chart for control limit :  
 $n=4, k=25, \alpha=0.0026$ (  $SUCL=1.50573, SLCL=-1.50573$ )

$\phi_1$	Simulation		Bootstrap	
	TUCL	TLCL	BUCL	BLCL
-0.95	1.33033	-1.33605	6.99370	-7.15220
-0.90	1.32840	-1.33304	4.43916	-4.54717
-0.85	1.32645	-1.33061	3.39822	-3.47632
-0.80	1.32455	-1.32849	2.82823	-2.89408
-0.75	1.32275	-1.32656	2.46856	-2.52806
-0.70	1.32103	-1.32477	2.22012	-2.27412
-0.65	1.31940	-1.32308	2.03926	-2.08773
-0.60	1.31783	-1.32148	1.90172	-1.94638
-0.55	1.31633	-1.31995	1.79389	-1.83481
-0.50	1.31487	-1.31849	1.70782	-1.74608
-0.45	1.31345	-1.31709	1.63749	-1.67371
-0.40	1.31207	-1.31573	1.57959	-1.61425
-0.35	1.31070	-1.31440	1.53212	-1.56619
-0.30	1.30935	-1.31310	1.49309	-1.52670
-0.25	1.30801	-1.31181	1.46210	-1.49484
-0.20	1.30666	-1.31054	1.43758	-1.46963
-0.15	1.30532	-1.30927	1.41887	-1.45022
-0.10	1.30397	-1.30800	1.40554	-1.43632
-0.05	1.30261	-1.30674	1.39744	-1.42813
0.00	1.30127	-1.30548	1.39469	-1.42535
0.05	1.29993	-1.30423	1.39720	-1.42718
0.10	1.29862	-1.30300	1.40398	-1.43450
0.15	1.29736	-1.30182	1.41561	-1.44698
0.20	1.29617	-1.30069	1.43262	-1.46511
0.25	1.29509	-1.29966	1.45494	-1.48923
0.30	1.29417	-1.29876	1.48381	-1.51901
0.35	1.29345	-1.29804	1.51972	-1.55542
0.40	1.29300	-1.29756	1.56382	-1.60072
0.45	1.29290	-1.29739	1.61800	-1.65656
0.50	1.29322	-1.29763	1.68469	-1.72496
0.55	1.29407	-1.29836	1.76729	-1.80938
0.60	1.29555	-1.29970	1.87159	-1.91545
0.65	1.29777	-1.30180	2.00365	-2.05093
0.70	1.30085	-1.30481	2.17621	-2.22855
0.75	1.30490	-1.30891	2.40895	-2.46781
0.80	1.31002	-1.31430	2.73765	-2.80483
0.85	1.31629	-1.32122	3.23046	-3.30976
0.90	1.32374	-1.32995	4.03344	-4.13015
0.95	1.33233	-1.34082	5.65788	-5.77893

관리한계를 벗어날 확률  $\alpha$ 가 0.0026일때는 -0.30 ~ 0.30 사이에서 붓스트랩에 의해 설정된 관리한계가 표준방법에 의해 계산된 관리한계보다 시뮬레이션에 의해 설정된

관리한계에 근사함을 알 수 있다.

또한 자기상관 관계가 없을 경우에는 시뮬레이션에 의해 설정된 관리한계와 붓스트랩 방법에 의해 설정된 관리한계는 Shewhart의 표준방법에 의한 관리한계에 근사함을 알 수 있다.

따라서 공정이 약한 자기상관 관계를 가질 경우 Seppälä가 제시한 *MARMA* (1,0) 모형을 이용하여 붓스트랩 방법에 의해 관리한계를 설정하는 것이 자기상관관계의 영향에 따른 관리한계를 수정할 수 있으므로 붓스트랩 공정평균관리도를 추천할 수 있겠으나, 강한 자기상관 관계를 가질 경우에는 자기상관관계에 둔감한 표준방법에 의한 Shewhart 관리도를 추천할 수 있겠다.

### 3. 붓스트랩 EWMA 관리도

Roberts<sup>7)</sup>에 의해서 소개된 EWMA 관리도의 모집단에서 모형 EWMA 통계량은 식 (3)이다.

$$Z_t = \lambda \bar{X}_t + (1-\lambda)Z_{t-1} \quad t=1,2,\dots \quad (3)$$

여기서  $0 < \lambda \leq 1$ 은 평활상수이다. 그리고 초기치는 식 (4)로 두고,

$$Z_0 = \bar{\bar{X}} \quad (4)$$

이때 EWMA 관리도의 점근적인 관리한계는 식 (5)과 식 (6)과 같고,

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)n}} \quad (5)$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - 3\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)n}} \quad (6)$$

이것은 표본 수  $t$ 가 적당하게 클 경우에 계산된다.

이때 EWMA 관리도의 붓스트랩 절차는 관측치들은 수정된 *ARMA*(1,0)모형인 *MARMA*(1,0) 모형을 따를 때 식 (7)과 같이 설계할 수 있다.

$$X_{tj} = \xi + \phi_1 \bar{X}_{t-1} + \varepsilon_{tj} \quad (7)$$

*MARMA*(1,0)모형에서 하위그룹 샘플크기  $n=4$ 와  $5$ , 하위그룹의 크기  $k=25$ 와  $20$ 일 경우에 표준 EWMA 관리도와 붓스트랩 EWMA 관리도에서의 민감도를 조사하기 위하여 식 (7)에 의해서  $X_{tj}$ 를 발생시켜  $Z_t$ 를 계산한다. 이때 관리한계를 벗어날 확률

$\alpha$ 는 0.05로 두고, 평균이 변화할 때와 자기회귀모수가 변화할 때를 조사한다. 이때 변화는 앞 절에서와 같이 변화시킨다.

여기서,  $TUCL$ 과  $TLCL$ 은 표준방법에 의해 시뮬레이션 한 관리한계이며,  $BUCL$ 과  $BLCL$ 은 붓스트랩 방법에 의한 관리한계이며, 표준 EWMA 관리도의 관리한계 ( $EUCL$ 과  $ELCL$ )는 공정이 표준정규분포  $N(0,1)$ 를 따를 때, 관리한계는  $\pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)n}}$ 에 의해 계산된다.

Fig. 1은 자기회귀 모수  $\phi_1$ 이 -0.25일 경우이고, EWMA 통계량 모수  $\lambda$ 가 0.25일 경우의 공정평균의 변화가  $\delta$ 만큼 발생하였을 때 세 가지 관리도의 민감도를 조사한 것이다.

공정평균의 변화가 발생하지 않았을 경우에는 붓스트랩 EWMA 관리도가 시뮬레이션에 의한 관리도와 표준방법에 의한 EWMA 관리도보다 더 좋은 ARL을 나타내며, 공정평균이 1이상 변화하였을 경우에는 세 가지 관리도 모두 유사한 결과를 제시하고 있다.

따라서 붓스트랩 EWMA 관리도는 공정의 분포가 정규분포를 따르지 않고, 관측치들 사이에 자기상관 관계가 존재할 경우에 사전분포의 가정이 필요하지 않는 재샘플링 절차인 붓스트랩 방법을 사용하는 것이 통계적 공정관리도의 관리한계와 ARL 측면에서 더 좋은 결과를 나타내고 있다.

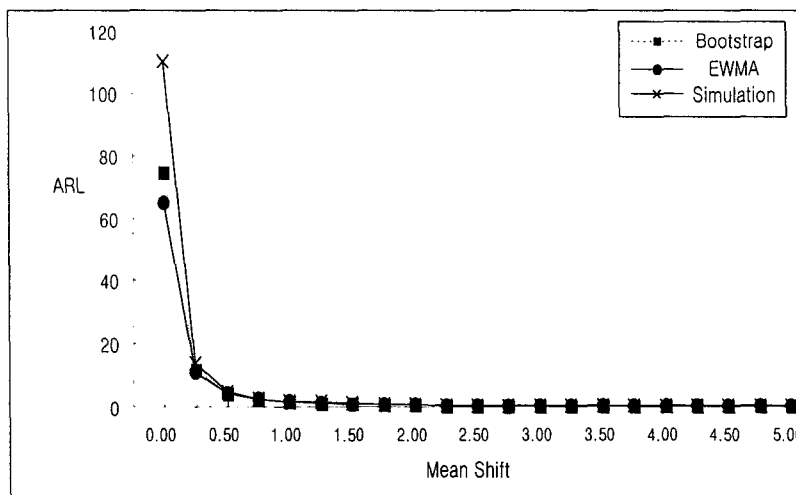


Fig. 10. ARL for process mean shift : Bootstrap, Simulation and EWMA control chart ( $\alpha=0.05$ ,  $\phi_1=-0.25$ ,  $\lambda=0.25$ )

#### 4. 결론

본 연구에서는 Seppälä가 제시한 수정된  $MARMA(1,0)$  모형을 기초로 예측잔차를 재샘플링하는 붓스트랩 방법으로 공정평균관리도와 EWMA 관리도의 관리한계를 설정

하여 그들의 수행도를 비교·분석하였다.

관측치들 사이에 자기상관관계가 존재할 경우에는 공정평균 관리도에 심각한 영향을 미친다. 기존의  $\bar{X}$  관리도는 공정의 분포를 정규분포로 가정함으로써 관측치들 사이에 발생된 자기상관관계를 관리한계에 반영하지 못하고 있으나, 사전분포의 가정이 필요 없는 붓스트랩 방법에 의한 공정평균 관리도는 자기상관관계의 영향을 수용함으로써 시뮬레이션을 통한 관리한계가 표준방법보다 더 좋은 결과를 보여준다.

또한 관리도의 검출력 측면에서도 공정이 안정상태일 경우, 붓스트랩 방법에 의한 공정평균 관리도의 검출력이 표준방법보다 더 좋은 결과를 나타내며, 공정평균의 변화가  $1\sigma$  이상일 경우에는 붓스트랩 방법과 표준방법에 의한 관리도 모두 유사한 결과를 나타낸다.

따라서 사전분포의 가정이 필요 없는 비모수적 방법인 붓스트랩 방법에 의해 공정평균 관리도를 설정하는 것이 일반적인 통계적 관리기법으로 공정을 관리하는 것보다 관리한계의 설정과 검출력면에서 더 좋은 결과를 나타낼 수 있다.

## 참 고 문 헌

- 1) Johnson, R. A., and Bagshaw, M.; "The Effect of Serial Correlation on the Performance of CUSUM Tests," Technometrics, Vol. 16, No. 1, pp. 103-122, 1974.
- 2) Johnson, R. A., and Bagshaw, M.; "The Effect of Serial Correlation on the Performance of CUSUM Test II," Technometrics, Vol. 17, No. 1, pp. 73-95, 1975.
- 3) Montgomery, D. C., and Mastrangelo, C. M.; "Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data," Journal of Quality Technology, Vol. 23, No. 3, pp. 179-193, 1991.
- 4) Box, G. E. P., and Kramer, T.; "Statistical Process Monitoring and Feedback Adjustment-A Discussion," Technometrics, Vol. 34, No. 3, pp. 251-285, 1992.
- 5) Seppälä, T., Moskowitz, H., Plante, R., and Tang, J.; "Statistical Process Control via the Subgroup Bootstrap." Journal of Quality Technology, Vol. 27, No. 2, pp. 139-153, 1995.
- 6) Maragah, H. D., and Woodall, W. H.; "The Effect of Autocorrelation on the Retrospective  $\bar{X}$ -Chart," Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 40, pp. 29-42, 1992.
- 7) Roberts, S. W.; "Control Chart Tests Based on Geometric Moving Average," Technometrics, Vol. 1, No. 2, pp. 85-93, 1959.