

고온 초전도체 관에서의 과도 자기 확산 해석

Analysis of Transient Magnetic Diffusion in a High-Temperature Superconductor Tube

설승윤, 정성기
S.Y. Seol and S.K. Jung

Abstract

Transient magnetic diffusion process in a melt-cast BSCCO-2212 tube is analyzed by an analytical method. The transient diffusion equation is transformed into an ordinary differential equation by integral method. The penetration depth of magnetic field into a superconducting tube is obtained by solving the differential equation numerically. The results show that the penetration depth as a function of time which is somewhat different from the results by Bean's critical current model. The reason of the difference between the present results and that of Bean's model is discussed and compared in this paper.

Key Words : Analysis transient, Magnetic diffusion, High-Temperature Superconductor

1. 서론

고온초전도체 기기를 실제 사용할 때는 주기적인 자기장의 영향을 받는 경우가 많다. 초전도체의 정상상태 자기침투를 해석할 때는 일반적으로 빈 임계상태모델(Bean's critical state model)을 사용한다. 그러나 빈(Bean) 모델은 자기 침투시 초전도체 내부의 전류밀도가 임계전류밀도와 같다고 가정하여 초전도체 내부의 자기침투를 해석하는 방법으로 실제상황에서 직면하는 교류전류나 주기적인 자기장의 변화에 의해 발생하는 비정상적인 자기확산을 해석할 때는 사용할 수 없다[1~4].

본 논문에서는 melt-cast 방법으로 제작한 BSCCO-2212 튜브를 대상으로 하여 외부자기장에 의해서 초전도체 내부에 비정상적(transient)으로 전파되는 자기확산 과정을 해석하고자 한다. 시간과 좌표에 대한 편미분 방정식으로 표현되는 자기

확산 방정식을 적분하여 상미분 방정식으로 치환하고 이를 수치해석하였다. 해석결과인 시간에 따른 자기 침투깊이(penetration depth)를 빈(Bean) 모델에 의하여 구한 침투깊이와 비교하고 비정상상태에서의 자기확산은 정상상태에서의 침투깊이와 차이가 있음을 논하였다.

2. 해석

2.1 모델링

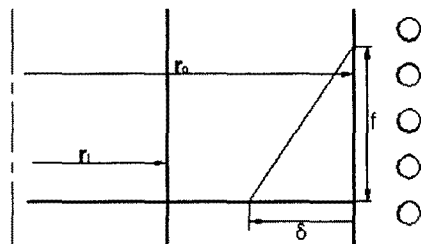


그림. 1 해석 모델의 계략도

Fig. 1 Schematic of analysis model

전남대학교 기계공학과 1B-309호
(광주시 북구 용봉동 500-757)
Fax: 062-530-1689
E-mail : highsung@hanmail.net

Fig. 1은 본 논문에서 해석 대상을 간략하게 도시한 것이다. 본 해석에서는 Y.S. cha의 자기확산 실험을 대상으로 하였다[1]. Y.S. cha가 행한 실험에서는 길이 L_c 는 74.8mm, 안쪽 반지름(r_i) 7.3mm, 외부 반지름(r_o) 12.8mm인 BSCCO-2212 튜브를 사용하였다. 초전도체 튜브 외부에 지름 0.64mm인 22게이지 구리선을 1200턴(turn) 감고, 전류를 통전시켜 초전도체 외부에 자기장을 주고 있다. 구리 코일의 길이(L_c)는 70.5mm이고, 안쪽 지름(r_i)은 26.8mm로 초전도체 튜브 바깥 지름보다 약간 크도록 제작되었다. 구리코일에서 발생하는 열이 초전도체 튜브에 영향을 주지 않도록 하기 위해, 초전도체 튜브와 구리코일 사이에 액체질소가 충분히 공급되도록 설계되었다. 또한 초전도체 튜브와 구리코일은 액체질소에 담겨져 있으므로, 액체 질소의 온도와 동일한 것으로 간주하였다.

원통좌표계에서 축 방향으로 작용하는 자기장(B)는 다음과 같은 편미분방정식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rD \frac{\partial B}{\partial r} \right) = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (1)$$

초전도 튜브 내부에 형성되는 원주방향의 전류밀도(J)는 다음과 같이 식(2)으로 정의한다.

$$J = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial r} \quad (2)$$

여기서 B 는 초전도체 내부에 발생되어지는 자기장이고, μ_0 는 자유공간의 투자율이다. D 는 자기확산계수를 의미하고 다음 식으로 정의된다.

$$D = \frac{\rho}{\mu_0} \quad (3)$$

ρ 는 전기 비저항이다.

초기에는 구리코일에 전류가 흐르지 않기 때문에 초전도 튜브 내부의 자기장은 제로이다.

$$B=0, \quad t=0 \quad r_i < r < r_o \quad (4)$$

구리코일에 전류가 흐르면 튜브 외부에는 코일에 의해 발생된 자기장이 인가되고 튜브 내부는 자기장의 구배가 제로인 조건이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial r} &= 0, & r &= r_i \\ B &= f(t), & r &= r_o \end{aligned} \quad (5)$$

$f(t)$ 는 구리 코일에 의해 형성된 단위 길이당의 자기장을 의미한다.

$$f(t) = a\mu_0 \frac{NI(t)}{L_c} \quad \text{at } r=r_o \quad (6)$$

여기서 L_c 는 코일의 길이이고, a 는 유한 길이 코일에 대한 보정 값이다. NI 은 구리선의 감긴수(N)에 통전된 전류(I)를 곱해준 값이다.

본 연구에서는 외부자기장이 시간에 따라 변화하는 경우, 즉 (6)식의 NI 값이 시간에 따라 변화하는 경우의 시간에 따른 튜브내의 자기장 침투 양상을 해석하였다.

2.2 전기 비저항

초전도체에서의 전기 비저항(이하 비저항) 값은 초전도체가 과도한 외부 자기하에 놓여 플럭스-크리프(flux creep)와 자속유동(flux flow)이 발생할 때 생기는 차폐 전류밀도(J)에 의해서 좌우된다. 실험을 통해서 구해진 BSCCO-2212의 E - J 특성 곡선에서 전기장(E)은 다음과 같은 식(7)의 값을 갖는다[2].

$$E = 3.2 \times 10^{-22} |J|^{7.356} \quad (7)$$

여기서 전류밀도(J)의 단위는 [A/cm²]이고 E 의 단위는 [μ V-cm]이다.

초전도체의 비저항은 $\rho = dE/dJ$ 의 관계를 가지므로 식(7)의 E - J 곡선을 미분하여 구할 수 있다.

$$\rho = 2.354 \times 10^{-21} |J|^{6.356} \quad (8)$$

식(8)의 비저항 ρ 의 단위는 [$\mu\Omega$ -cm]이다. 전기장(E)이나 비저항(ρ)은 전류밀도(J)에 따라 그 값이 변한다.

2.3 지배 방정식

원통좌표계에서의 자기확산 방정식 (1)을 r 에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \int_{r_i-\delta}^{r_o} rBdr = \left(rD \frac{dB}{dr} \right)_{r=r_o} - \left(rD \frac{dB}{dr} \right)_{r=r_i-\delta} \quad (9)$$

침투깊이 δ 는 튜브 바깥 면으로부터 측정된 것이다. 따라서 식(9)는 $r_0 - \delta < r < r_0$ 사이에 외부 자기장에 의한 자기침투가 일어나고 있고, $r_1 < r < r_0 - \delta$ 사이에는 아직 자기장이 침투하고 있지 않은 상황임을 의미한다.

자기장이 침투하지 못한 곳의 차폐전류는 제로이기 때문에 식(2)에 의하면 자기장의 구배 dB/dr 이 제로가 됨을 알 수 있다. 따라서 $r=r_0 - \delta$ 에서의 $dB/dr=0$ 가 된다.

식(9)를 이용하여 자기 침투깊이를 구하기 위해서는 초전도 튜브 내부에 형성되는 자기장을 가정해야 한다. 이 방법은 점성유체 유동의 경계층 해석 방법과 유사하다. 초전도체 내부의 자기장 분포가 선형적으로 변화한다는 가정에 의하여 자기장의 분포를 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$B = f(t) \left(\frac{r - (r_0 - \delta)}{\delta} \right) \quad (10)$$

선형 가정을 사용하면 B 의 구배 dB/dr 는 $f(t)/\delta$ 가 된다. 전류밀도 J 는 자기가 침투된 $r_0 - \delta < r < r_0$ 에서는 $J = -(1/\mu_0)(f(t)/\delta)$ 과 같은 일정한 상수값이 되고, 자기침투가 안된 $r_1 < r < r_0 - \delta$ 에서는 제로가 된다.

식(10)을 식(9)에 대입하여 정리하면 시간에 따른 침투깊이를 구할 수 있는 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\frac{D}{r_0} \frac{f}{\delta} - \left(\frac{1}{2} \frac{\delta}{r_0} - \frac{1}{6} \frac{\delta^2}{r_0^2} \right) \frac{df}{dt}}{\left(\frac{1}{2} \frac{1}{r_0} - \frac{1}{3} \frac{\delta}{r_0^2} \right) f} \quad (11)$$

확산계수 D 는 식(3)에 의하여, 그리고 비저항 ρ 는 식(8)에 의하여, 그리고 전류밀도 J 는 식(2)에 의하여 구한다. 따라서 확산계수 D 는 자기장의 구배 dB/dr 에 의하여 결정된다. $t=0$ 에서 $\delta=0$ 인 초기조건에서 식(11)의 미분방정식을 풀면 시간에 따른 침투깊이를 구할 수 있다.

초전도체 튜브 내부의 원주방향의 차폐전류 I_s 는 가로 단면적 $L\delta$ 에 전류밀도 J 를 곱하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$I_s = L \int_{r_0 - \delta}^{r_0} J dr = -aNI \quad (12)$$

즉 외부 자기장을 차폐하기 위하여 초전도체 내부에는 외부 코일에 흐르는 전류에相当하는 전류가 반대방향으로 형성됨을 알 수 있다.

2.4 자화(Magnetization)

Bean의 임계상태 모델은 초전도체에 자기장이 침투되는 해당 부분에는 초전도체의 임계전류밀도가 흐른다고 가정하고 있다. 하지만 본 논문에서는 자기장의 확산을 맥스웰 방정식으로 구하고 자기 확산 계수가 자기장 구배의 함수로 구해진다는 가정을 사용하고 있다.

자화(magnetization) M 은 $-M = H - B_s/\mu_0$ 로 정의된다. H 는 외부 솔레노이드에 의하여 가해지는 자장의 세기(magnetic intensity)로서 f/μ_0 의 값을 가진다. B_s 는 초전도체 내부의 자기장의 평균값이다.

$$B_s = \frac{1}{\pi(r_0^2 - r_1^2)} = \int_{r_1}^{r_0} B \cdot 2\pi r dr \quad (13)$$

식(10)과 같이 자기장이 분포되어 있다면 평균 자기장은 다음과 같다.

$$B_s = \frac{f}{3} \frac{\delta(3r_0 - \delta)}{r_0^2 - r_1^2} \quad (14)$$

따라서 자화(M)량은 다음과 같다.

$$-M = \frac{f}{\mu_0} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\delta(3r_0 - \delta)}{r_0^2 - r_1^2} \right) \quad (15)$$

위 식은 자기장의 침투가 튜브 안쪽 면까지 진행되기 전에만 적용할 수 있다.

본 논문에서는 식(11)의 상미분방정식을 풀이하여 침투깊이(δ)를 구한 후 초전도체 튜브내의 자화(M) 상태를 결정하였다. 하지만 빈(bean) 모델은 침투깊이를 $\delta = f/(\mu_0 J_c)$ 으로 가정하므로 단지 외부자기장(f)에 의해서만 자화(M)를 결정할 수 있었다.

3. 결과 및 고찰

Y.S. cha의 실험에서 코일 전류(I)는 pulse current source 의해 공급되어진다[1]. 이러한 코일 전류의 시간에 따른 변화율에 따라 침투시간도 달라진다. 전류가 시간에 따라 일정하게 증가하는 동

안의 침투깊이 변화를 보기 위하여 NI 을 식(16)과 같이 근사하였다.

$$NI = st \quad (16)$$

t 는 시간이고 s 는 시간에 따라 변해지는 NI 의 기울기이다. 실험에 나타난 s 값은 400~6000(A/ms) 정도이다.

표. 1 s 에 따른 계산 결과

Table. 1 Results of calculation depending on s

case	s (A/ms)	t_p (ms)	NI_{max} (A)	f_{max} (T)	J_{max} (A/cm ²)	$-M_{max}$ (A/m)
1	450	12.1	5445	0.097	1402.7	3.505e4
2	600	9.4	5640	0.101	1458.6	3.645e4
3	2500	2.7	6750	0.1203	1770.9	4.425e4
4	4000	1.8	7200	0.1283	1887.8	4.717e4

Table. 1은 각 s 값에 따라 계산된 결과들을 나타내었다. 침투시간 t_p 는 침투깊이가 튜브 안쪽면에 이르는 시간을 말한다. NI_{max} , f_{max} , J_{max} , $-M_{max}$ 들은 시간 t_p 에서의 값들이다.

Y.S. cha에 의하면 실험에 사용된 BSCCO-2212의 임계전류밀도는 1785A/cm²이다[1]. 따라서 빈(bean) 모델에 의하면 초전도체 내부의 자기장 구배는 22.4 T/m가 된다. 두께 5.5mm의 초전도체 튜브를 자기장이 완전 침투하는 경우의 외부 자기장의 세기는 0.123 T로써 NI 값 6900A에 해당한

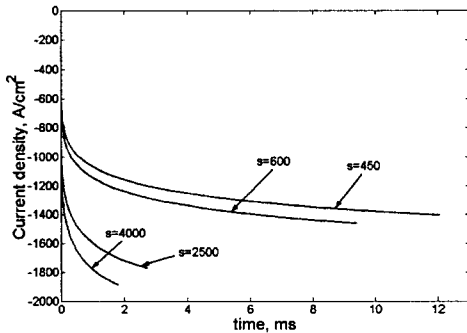


그림 2. NI 증가율에 의한 시간에 따른 전류밀도 변화

Fig 2. Current density vs. time for different increasing rates of NI .

다. 즉, 빈 모델에 의하면 외부 코일에 흐르는 NI 값이 6900A에 이르면 시간에 관계없이 자기장이 튜브 전체에 침투되는 것으로 간주된다.

Table. 1에서 보여지는 case 1, 2, 그리고 3은 $NI=6900A$ 의 값을 초과하지 못하고 있으나 일정 시간 뒤에 자기침투가 완결됨을 볼 수 있다. 즉 정상상태만을 고려한 빈 모델에 의하면 자기침투가 완결되지 않으나, 외부 자기장이 시간에 따라 변화하는 경우는 자기침투가 튜브의 안쪽면까지 이를 수 있다.

Fig. 2는 본 해석을 통해서 구해진 s 의 값에 따른 초전도체의 전류밀도 값의 변화이다. s 의 증가율에 따라 변하는 자기확산 모델의 전류밀도 값은 Table. 1에서 보이는 것처럼 빈 모델의 임계전류밀도 1785A/cm²값과는 차이가 있다.

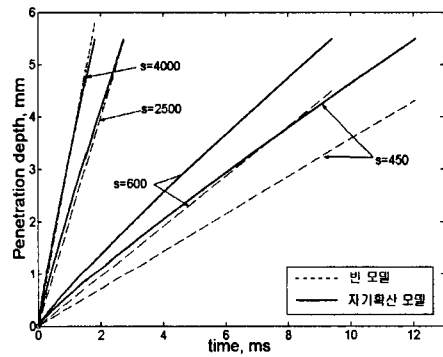


그림. 3 NI 증가율에 의한 침투깊이의 시간에 따른 변화

Fig. 3 Penetration depth vs. time for different increasing rates of NI .

Fig. 3은 외부 솔레노이드에 흐르는 전류의 변화율 s 에 따른 침투깊이 δ 의 시간에 따른 증가 양상을 나타낸 것이다. 점선으로 표시된 것은 빈 모델에 의한 침투깊이를 나타낸다. 빈 모델에서의 침투 깊이는 외부 자기장의 세기에 의해서만 결정되므로, 식(16)과 같이 선형으로 코일 전류가 변화하는 경우 침투깊이도 선형으로 증가한다.

자기확산 방정식에 의한 침투깊이는 시간에 따라 선형으로 변화하지 않고, 또한 빈 모델에 의한 침투깊이와도 차이를 보이고 있다. 이러한 차이는 s 값이 적을 경우 더 큰 차이를 보이는 반면, s 가 증가함에 따라 빈 모델과의 차이가 줄어들어서, $s=2500A/ms$ 에서는 빈 모델의 침투깊이가 자기확

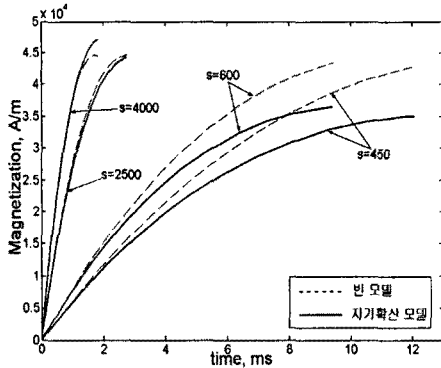


그림. 4 NI 증가율에 의해 변하는 시간에 따른 자화

Fig. 4 Magnetization vs. time for different rates of increasing NI .

산모델의 침투깊이에 근접하였다.

Fig. 4는 여러 가지 s 값에 대하여 초전도체의 자화량의 시간에 따른 변화를 보이고 있다. 실선은 본 논문의 자기 확산 모델에 따른 계산 결과이고 점선은 빈 모델에 따른 결과이다. $s=450$ A/ms 에 대한 결과를 보면 본 모델에서의 자화량이 빈 모델에 의한 자화량보다 적음을 볼 수 있다. 이는 빈 모델에서는 자기 침투 영역의 전류밀도가 임계전류밀도라고 가정하는데 비해 본 모델에서는 Table. 1에서 보여지는 것처럼 s 값에 의해 변하는 전류 밀도가 임계전류밀도 이하의 값으로 존재하여 빈 모델 보다 적은 자화량을 가지게 된다. 그러나 $s=2500$ A/ms 에 대한 결과에서는 자기확산 모델과 빈(bean) 모델의 자화량이 거의 비슷하게 나온다. 이것은 빈 모델의 임계전류밀도에 근접한다는 의미를 뜻한다. 또한 자기확산 모델을 통해서 구해진 자화량은 s 값이 커질수록 침투시간의 단축과 함께 자화량도 같이 상승하는 반면에 빈(bean) 모델의 경우 s 값이 증가하지만 침투시간에 따른 자화량은 동일한 값을 유지한다.

4. 결 론

초전도체(BSCCO-2212)를 이용하여 침투시간에 따른 침투깊이와 자화(M)를 분석하였다. 비정상적인 자기확산 해석결과에 의해서 구해진 자기 침투 깊이를 빈(Bean) 모델에 의해서 구한 침투깊이와 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 비정상적인 자기확산 모델을 통해서 구해진 침

투깊이와 자화량의 변화량이 빈 모델에서 구한 침투깊이와 자화량에 차이가 있음을 확인하였다.

(2) 외부 자기장에 의해 전달되어지는 s 의 값이 적을 때는 빈 모델과 상당한 차이를 보이고 있지만, s 의 값이 커질수록 빈 모델과의 차이가 감소함을 확인할 수 있었다.

(3) 초전도체의 자화(M)을 해석하는데 있어서 빈 모델을 통해서 구해진 자화량은 침투시간에 관계 없이 침투된 범위 내에서 동일한 자화량을 갖는 반면에 자기확산 모델은 침투시간에 따라 상승하였다.

이상의 결론에 의해 비정상적인 자기확산을 해석할 때 본 논문에서 사용한 자기확산 모델을 이용하면 정확한 과도 해석을 할 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

- [1] Y.S. cha and T.R. Askew, "Transient Response of a Superconductor Tube to Pulsed Magnetic Field", *Physica C*, 302, 57-66, 1998.
- [2] Y.S. cha, D.J. Evans, and J.R. Hull, "Measurement of Critical Current and Transient Characteristics of a Hi-Temperature Superconductor Tube with a Pulsed Current Supply", paper presented at the 1998 Applied Superconductivity Conference and to be published in *IEEE Trans. on Applied Superconductivity*", June 1999.
- [3] T.P. Orlando and K.A. Delin, "Foundations of Applied Superconductivity", Chapter 2, Addison-Wesley, 1991.
- [4] E.H. Brandt, "Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves", *Physical Review B*, Vol. 58, No. 10, 6506-652, September 1998-II.