

剪斷變形을 고려한 水平 曲線보의 自由振動

Free Vibrations of Horizontally Curved Beams with Shear Deformation

李炳求† · ○辛聖澈* · 崔圭文** · 李種國***

Byoung Koo Lee, Seong Cheol Shin, Kou Moon Choi and Jong Kook Lee

Key Words: horizontally curved beam(水平 曲線보), shear deformation(剪斷變形), free vibration(自由振動), natural frequency(固有振動數)

ABSTRACT

The ordinary differential equations governing free vibrations of elastic horizontally curved beams are derived, in which the effect of shear deformation as well as the effects of vertical, rotatory and torsional inertias are included. Frequencies and mode shapes are computed numerically for parabolic curved beams with the hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped ends. Comparisons of natural frequencies between this study and ADINA are made to validate the theories and numerical methods developed herein. The lowest three natural frequency parameters are reported, with and without the effect of shear deformation, as functions of the three non-dimensional system parameters: the horizontal rise to span length ratio, the slenderness ratio and the stiffness parameter.

1. 序 論

水平 曲線보는 보, 기둥, 평판 등과 더불어 구조물을 형성하는 구조요소로서 機能的, 美的 측면이 함께 고려되어야 하는 土木, 建築, 機械, 航空, 船舶 등 각종 구조공학 관련분야에서 單位構造로 이용되고 있다. 특히 경제발전으로 토목, 건축구조물 설계시에 周邊 景觀과 조화를 이루는 美觀 設計가 대두되고 있는 현대사회에서는 많은 構造物에서 수평 곡선보의 이용이 증가하고 있다. 지난 수십 년간 수평 곡선보에 대한 靜的, 動的 舉動에 관한 많은 연구가 이루어졌다.

수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구는 回轉慣性, 비틀림慣性 및 剪斷變形의 고려여부에 따른 解析模型의 정식화 과정을 다룬 研究⁽¹⁾ 동일한 數學的 模型을 效率的으로 해석하기 위한 解析方法을 제시한 研究⁽²⁾ 수평 곡선보의 線形變化에 따른 해석모형의 定式化를 다룬 研究⁽³⁾로 구분할 수 있다.

이 연구는 수평 곡선보의 해석모형의 정식화를 다룬 연구이다. 구조물이 자유진동하는 근본적인 요인은 慣性力이다. 수평 곡선보의 자유진동 해석에서 가장 기본이 되는 관성력은 보의 면의 방향으로 발생하는 垂直變位 慣性力, 단면 회전전에 의하여 발생하는 回轉 慣性力 및 軸의 비틀림에 의하여 발생하는 비틀림 관성이다. 자유진동 해석에서 또다른 중요한 요소 중의 하나는 剪斷變形 효과로 이는 정확한 應力-變位 關係를 자유진동 해석에 적용하려는 노력이다. 전단 변형은 변위의 증가를 초래하여 固有振動數를 감소시키는 요인으로 알려져 있으므로, 전단변형을 고려하여 자유진동을 해석하는 것이 바람직하다.

이러한 관점에서 이 연구는 剪斷變形이 수평 곡선보의 자유진동에 미치는 영향을 분석하는 데 研究目的이 있다.

보의 미소요소에 발생하는 合應力과 慣性力들 사이의 動的 平衡方程式을 이용하여 자유진동을 지배하는 微分方程式을 유도한다. 미분방정식의 유도에서 垂直變位慣性, 回轉慣性 및 비틀림관성은 기본적으로 고려하고 여기에 전단변형의 효과를 추가로 도입한다. 유도된 상미분방정식을 수치해석하여 無次元 固有振動數를 산출한다. 본 연구의 결과를 검증하기 위하여 構造解析用 汎用 프로그램인 ADINA와 無次元 固有振動數를 비교한다. 수치해석 결과를 이용하여 剪斷變形이 자유진동에 미치는 영향을 분석한다. 변수연구를 통하여 보의 變數와 無次元 固有振動數사이의 관계를 토의한다.

† 正會員, 圓光大學校 工科學 土木環境工學科 教授
E-mail: bkleest@wonkwang.ac.kr
Tel: (063) 850-6718, Fax: (063) 857-7204

* 圓光大學校 環境建設研究所 研究員

** 正會員, (株)白頭 Plant, 專務理事

*** COMES, 代表技術士

이 연구에서 사용한 基本假定은 다음과 같다. 보 재료는 線型 彈性體이고, 변위는 작은 처짐 이론에 따른다. 보 축에 발생하는 軸方向力의 영향은 무시하고, 보의 자유진동은 調和振動으로 가정한다.

2. 數學的 模型

그림 1은 直交座標系 (x, y, v) 에 놓여있는 水平 曲線보의 형상과 諸 變數를 나타낸다. 수평 곡선보는 (x, y) 평면 위에 있고 兩端部는 回轉 또는 固定支點으로 지지되어 있다. 다음의 記號는 자유진동을 지배하는 微分方程式을 유도하는데 필요한 變數들이다.

- l : 支間 길이
- h : 水平 높이
- v : 垂直變位
- Ψ : 純粹 휨에 의한 斷面 回轉角
- β : 剪斷力에 의한 斷面 回轉角(剪斷變形)
- ϕ : 비틀림 角
- ρ : 曲率半徑
- θ : 曲率半徑과 水平 軸이 이루는 角度

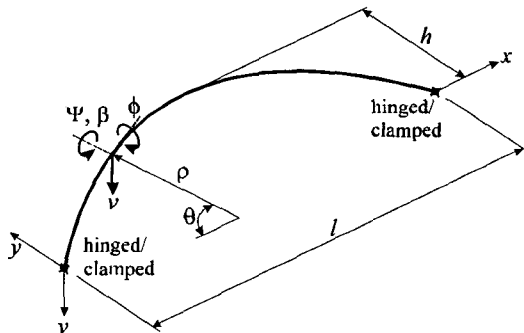


그림 1. 곡선보의 기하학적 형상 및 변수

그림 2는 자유진동하는 微小要素에 작용하는 合應력과 慣性力을 나타낸다. M 은 휨 모멘트, T 는 비틀림 모멘트, Q 는 剪斷力의 合應력을 나타내고, F_v 는 垂直變位慣性, C_Ψ 는 回轉慣性, C_ϕ 는 비틀림慣性을 나타낸다. 미소요소에서 合應력과 관성력사이의 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$Q' - \rho F_v = 0 \quad (1)$$

$$M' - \rho Q + T + \rho C_\Psi = 0 \quad (2)$$

$$M - T' + \rho C_\phi = 0 \quad (3)$$

위의 式에서 (')는 微分演算子 $d/d\theta$ 이다.

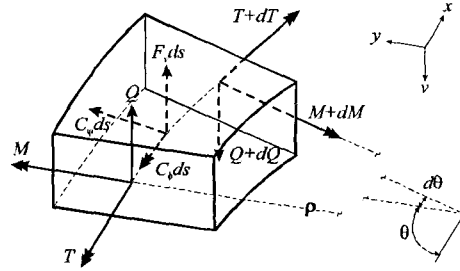


그림 2. 曲線보 要素의 合應力 및 慣性力

보의 微小要素는 질량을 갖고 있기 때문에 자유진동을 하면 관성력이 발생한다. 자유진동을 調和振動으로 假定하였으므로, 보의 動的 項들은 $\sin(\omega_i t)$ 에 비례한다. 여기서 ω_i 는 固有角振動數(rad/s)이고 i 는 모드 番號이다. 자유진동에 의한 調和振動으로 인하여 質量을 갖고 있는 미소요소에 발생하는 보 軸의 單位길이당 관성력 F_v , C_Ψ , C_ϕ 는 다음과 같다.

$$F_v = -\gamma A \omega_i^2 v \quad (4)$$

$$C_\phi = -\gamma I_p \omega_i^2 \phi \quad (5)$$

$$C_\Psi = -\gamma I \omega_i^2 \Psi \quad (6)$$

여기서 γ 는 보 재료의 質量密度, A 는 斷面積, I_p 는 斷面 極慣性모멘트, I 는 斷面 2次모멘트이다.

변위에 의하여 단면에 발생하는 M 과 T 를 Ψ 와 ϕ 를 이용하여 應力-變位 關係를 나타내면 다음과 같다.

$$M = EI \rho^{-1} (\phi - \Psi') \quad (7)$$

$$T = GJ \rho^{-1} (\phi' + \Psi) \quad (8)$$

여기서 E , G 는 彈性係數, 剪斷彈性係數이고, J 는 비틀림常數이다. 따라서 EI 와 GJ 는 각각 휨 剛性和 비틀림 剛性이다.

전단변형을 미분방정식에 고려하기 위하여 β 를 이용하여 Q 의 應力-變位 關係式을 유도한다. 全 斷面 回轉角 dv/ds 는 純粹 휨에 의한 斷面 回轉角 Ψ 와 剪斷變形 β 로 이루어지므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{\rho d\theta} = \Psi + \beta \quad (9)$$

式 (9)를 β 에 대하여 다시 整理하면 다음과 같다.

$$\beta = \rho^{-1} v' - \Psi \quad (10)$$

剪斷力 Q 는 式 (10)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q = kAG\beta = SkAG(\rho^{-1}v' - \Psi) \quad (11.1)$$

$$\begin{aligned} S=1 &: \text{전단변형을 고려하는 경우} \\ S=0 &: \text{전단변형을 무시하는 경우} \end{aligned} \quad (11.2)$$

위에서 k 는 斷面形狀係數이고, kAG 는 剪斷剛度이다. 剪斷變形的 考慮與否를 나타내는 指標를 S 로 표시하고, 式 (11.2)와 같다.

式 (7), (8), (11.1)을 θ 에 대하여 微分하면 다음과 같다.

$$M' = EI\rho^{-1}[(\phi' - \Psi'') - \rho^{-1}\rho'(\phi - \Psi')] \quad (12)$$

$$T' = GJ\rho^{-1}[(\Psi' + \phi'') - \rho^{-1}\rho'(\Psi + \phi')] \quad (13)$$

$$Q' = SkAG(\rho^{-1}v'' - \rho^{-2}\rho'v' - \Psi'') \quad (14)$$

微分方程式을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \delta = v/l \quad (15-17)$$

$$f = h/l, \quad \zeta = \rho/l \quad (18,19)$$

$$\lambda = l/\sqrt{I/A}, \quad \lambda_p = l/\sqrt{I_p/A} \quad (20,21)$$

$$\epsilon = GJ/(EI), \quad \mu = kG/E \quad (22,23)$$

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{\gamma A / (EI)} \quad (24)$$

여기서, 直角座標系 (x, y, v) , 水平 높이 h , 曲率半徑 ρ 는 支間 길이 l 로 定規化하였고, λ, λ_p 는 細長比 關聯變數들, ϵ 은 剛性變數, μ 는 剪斷變數, c_i 는 無次元 固有振動數이다.

이상의 式들을 이용하여 回轉慣性和 剪斷變形을 고려한 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 常微分方程式을 유도한다. 式 (1)에 式 (4), (14)를 대입한 후에 무차원 변수식 (15)-(24)를 이용하고 高次項 δ'' 에 대하여 정리하면 다음의 無次元 常微分方程式을 얻는다.

$$\delta'' = a_1 \delta' + Sa_2 c_i^2 \delta + a_3 \Psi' \quad (25)$$

式 (2)에 式 (6.1), (8), (11.1), (12)를 대입한 후에 무차원 변수식 (15)-(24)를 이용하고 高次項 Ψ'' 에 대하여 정리하면 다음의 무차원 상미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Psi'' = & Sa_4 \delta' + a_1 \Psi' + (\epsilon + Sa_5 \\ & + a_6 c_i^2) \Psi + (1 + \epsilon) \phi' + a_7 \phi \end{aligned} \quad (26)$$

式 (3)에 式 (5), (7), (13)을 대입한 후에 무차원 변수

식 (15)-(24)를 이용하고 高次項 ϕ'' 에 대하여 정리하면 다음의 무차원 상미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \phi'' = & -(1 + \epsilon^{-1}) \Psi' + a_1 \Psi + a_1 \phi' \\ & + \epsilon^{-1} (1 + a_8 c_i^2) \phi \end{aligned} \quad (27)$$

위의 無次元 常微分方程式 (25), (26)에서 S 는 전단변형의 고려여부를 나타내는 指標이며 式 (11.2)에 이미 정의하였다. 式 (25)-(27)에서 상미분방정식의 係數 $a_1 - a_8$ 은 다음과 같다.

$$a_1 = \zeta' / \zeta \quad (28.1)$$

$$a_2 = -\zeta^2 / (\mu \lambda^2) \quad (28.2)$$

$$a_3 = \zeta \quad (28.3)$$

$$a_4 = -\mu \lambda^2 \zeta \quad (28.4)$$

$$a_5 = \mu \lambda^2 \zeta^2 \quad (28.5)$$

$$a_6 = -\zeta^2 / \lambda^2 \quad (28.6)$$

$$a_7 = -\zeta' / \zeta \quad (28.7)$$

$$a_8 = -\zeta^2 / \lambda_p^2 \quad (28.8)$$

수평 곡선보가 圓弧型이면 $\zeta' = 0$ 이므로 이를 $a_1 - a_8$ 에 대입하면 Laskey⁽⁴⁾가 유도한 회전관성과 전단변형을 고려한 원호형 수평 곡선보의 상미분방정식으로 환원되어, 이 연구에서 전개한 이론적 방법이 모두 타당한 것을 알 수 있다.

이제 수평 곡선보의 境界條件을 고려한다. 보의 兩端部는 回轉 또는 固定支點으로 지지되어 있으므로 이를 이용하여 境界條件을 유도한다. 먼저, 회전지점 ($x=0$ 또는 l)에서 $v = \phi = M = 0$ 이므로 무차원 변수를 이용하면 다음 식들과 같은 무차원 경계조건들을 얻을 수 있다.

$$\delta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (29)$$

$$\phi = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (30)$$

$$\Psi' = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (31)$$

위의 式 (31)은 式 (7)로 표시된 휨 모멘트 $M=0$ 을 나타낸다.

다음으로, 固定支點 ($x=0$ 또는 l)에서 $v = \Psi = \phi = 0$ 이므로 무차원 변수를 이용하면 다음 식들과 같은 無次元 境界條件式을 얻을 수 있다.

$$\delta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (32)$$

$$\Psi = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (33)$$

$$\phi = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (34)$$

3. 形狀函數

그림 1에 보인 直交座標系 (x, y) 위에 놓인 수평 곡선보의 선형은 一般 函數式 $y=y(x)$ 로 주어진다. 線型式이 주어지면 변수 θ 및 계수 a_1-a_8 에 포함되어 있는 形狀函數 ζ 와 ζ' 를 ξ 의 변수로 나타내어야 상미분방정식을 數值解析할 수 있다.

주어진 $y=y(x)$ 의 선형식은 式 (15), (16)의 무차원 변수를 이용하면 다음과 같은 無次元 線型式을 얻을 수 있다.

$$\eta = \eta(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (35)$$

위의 선형식에서 曲率半徑과 ξ 축이 이루는 각도 θ 와 곡률반경 ζ 및 미분 ζ' 은 수학적 정의에 의하여 다음 式들과 같이 산출할 수 있다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) \quad (36)$$

$$\zeta = \left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right]^{3/2} \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)^{-1} \quad (37)$$

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{d\theta} \quad (38)$$

수평 곡선보의 선형식으로는 매우 다양한 식들이 가능하며, 자유진동 해석의 數值解析 例題를 위하여 拋物線 보를 택하였다. 수평높이 h , 지간길이 l 을 갖는 式 (35)와 같은 포물선의 무차원 선형식은 다음과 같다.

$$\eta = -4f\xi(\xi-1), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (39)$$

式 (39)를 式 (36)-(38)에 적용하면 포물선 보에 대한 形狀函數들을 다음과 같이 ξ 의 변수로 나타낼 수 있다.

$$\theta = \pi/2 - \tan^{-1} [-4f(2\xi-1)] \quad (40)$$

$$\zeta = 0.125f^{-1} [1 + 16f^2(2\xi-1)^2]^{3/2} \quad (41)$$

$$\zeta' = 1.5(2\xi-1) [1 + 16f^2(2\xi-1)^2]^{3/2} \quad (42)$$

이상의 형상함수들을 이용하면, 임의 ξ 좌표에서 계수 a_1-a_8 을 계산할 수 있다.

4. 數值解析 例題 및 討議

위에서 상미분방정식의 계수 a_1-a_8 이 계산되었으므로 常微分方程式 (25)-(27)과 境界條件式 (29)-(31) 또는 (32)-(34)를 이용하여 無次元 固有振動數 c_i 및 振動形

$\delta = \delta_i(\xi)$, $\psi = \psi_i(\xi)$, $\phi = \phi_i(\xi)$ 를 數值解析의 方法으로 산출할 수 있다.

이 연구에서 상미분방정식의 數值積分은 다른 방법과 비교하여 정확성이 매우 우수한 Runge-Kutta법을 이용하였고, 무차원 고유진동수 c_i 를 산출하기 위해서는 行列값 探查法과 非線型 方程式의 해석법 중에 하나인 Regula-Falsi법을 이용하였다. 자유진동 해석에서 이와 같은 수치해석 방법은 다수의 문헌들에서 이미 그 적합성이 입증되었다.

본 연구 결과의 타당성을 검증하기 위하여 構造解析用 汎用 프로그램인 ADINA의 무차원 고유진동수와 본 연구의 결과를 표 1에 수록하였다. 이 표의 하단에 수치해석에 사용한 수평곡선보의 諸元을 나타내었다. 이 표에서와 같이 두 결과의 차이는 約 2% 未滿을 보이고 있어 본 연구의 理論的, 數值的 方法이 모두 타당함을 알 수 있다.

表 1 本 研究와 ADINA의 c_i * 比較

端部條件	i	無次元 固有振動數, c_i		誤差 (%)
		本 研究	ADINA	
回轉-回轉	1	4.78	4.79	0.21
	2	28.35	28.38	0.11
	3	67.22	67.25	0.05
回轉-固定	1	10.16	10.14	0.20
	2	37.15	36.96	0.51
	3	79.72	79.00	0.91
固定-固定	1	16.31	16.20	0.68
	2	46.83	46.23	1.30
	3	93.12	91.37	1.92

* $f=0.2$, $\lambda=75$, $\lambda_p=67$, $\epsilon=0.26$, $\mu=0.32$, $R=S=1$

** 誤差(%) = $|1 - \text{本 研究} / \text{ADINA}| \times 100$

표 2는 剪斷變形(S)이 無次元 固有振動數 c_i 에 미치는 影響을 나타낸 표이다. 전단변형의 考慮與否를 나타내는 指標 S는 式 (11.2)에 정의되어 있다. 이 표의 하단에 수치해석에서 사용한 보의 諸元을 나타내었다. 이 표에 나타난 바와

表 2. 剪斷變形(S)이 無次元 固有振動數에 미치는 影響 (回轉-固定 보*)

f	S	無次元 固有振動數, c_i		
		c_1	c_2	c_3
0.1	0	20.69	66.29	73.27
	1	13.90	45.22	73.09
0.2	0	16.39	55.82	73.97
	1	11.03	38.16	73.13
0.3	0	12.38	44.78	73.27
	1	8.31	30.61	63.25

* $\lambda=50$, $\lambda_p=22.5$, $\epsilon=1.06$, $\mu=0.32$

같이 回轉慣性과 剪斷變形은 고유진동수를 감소시키는 요인임을 알 수 있으며, 고차 모드보다는 저차 모드에서 그 影響力이 더 큰 것을 알 수 있다. 한편 이 표로부터 회전관성의 영향보다는 전단변형의 영향이 더 큰 것을 알 수 있어 自由振動 解析에서 전단변형 효과를 반드시 고려하여야 한다.

그림 3은 $\lambda=50$, $\lambda_p=22.5$, $\epsilon=1.06$, $\mu=0.32$, $S=1$ 인 경우에 c_i 와 f 의 關係曲線이다. 이 그림에서 水平 높이 비 f 가 증가하면 無次元 固有振動數 c_i 는 감소한다. 이는 f 값이 증가하면 진동에 대한 수평 곡선보의 剛性이 감소하기 때문으로 사료된다.

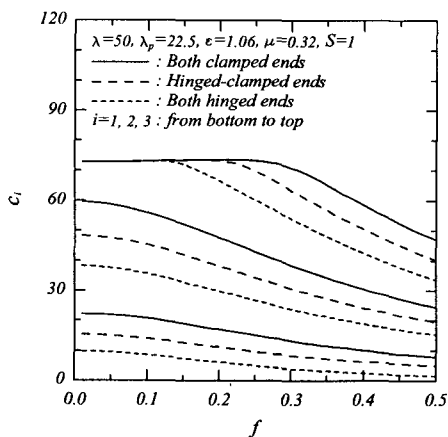


그림 3 $c_i - f$ 曲線

그림 4는 $f=0.2$, $\lambda_p=0.45\lambda$, $\epsilon=1.06$, $\mu=0.32$, $S=1$ 인 경우에 c_i 와 λ 의 關係곡선이다. 이 그림에서 細長比 λ 가 증가하면 無次元 固有振動數 c_i 는 증가하며, λ

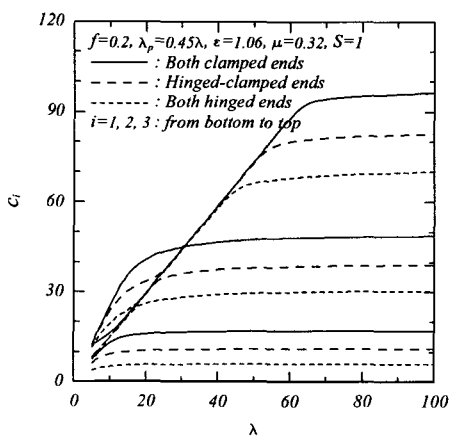


그림 4 $c_i - \lambda$ 曲線

가 일정 값에 도달하면 그 增加率은 0에 근접하여 c_i 값의 증가가 거의 없다. 또한 이상의 표 1 및 그림 3, 4로부터 모든 무차원 고유진동수 c_i 값은 固定-固定, 回轉-固定, 回轉-回轉 보의 순서로 크다.

5. 結 論

이 論文은 剪斷變形을 고려한 水平 曲線보의 自由振動에 관한 연구이다. 보의 微小要素에 작용하는 合應力과 慣性力들 사이의 動的 平衡方程式을 이용하여 自由振動을 지배하는 常微分方程式을 유도하였다. 상미분방정식을 수치해석하여 無次元 固有振動數와 振動形을 출하였다. 수치해석 예에서는 回轉-回轉, 回轉-固定 및 固定-固定의 拋物線 보를 택하였다.

이 論文을 통하여 얻어진 結論은 다음과 같다.

- 1) 이 논문에서 산출한 固有振動數는 ADINA의 결과와 매우 근접하였다.
- 2) 고유진동수는 固定-固定, 回轉-固定, 回轉-回轉 보의 순서로 크다.
- 3) 剪斷變形은 고유진동수를 감소시키는 요인이다.
- 4) 水平 높이 비의 증가는 진동에 대한 剛性을 감소시켜 固有振動數를 감소시킨다.
- 5) 細長比의 증가는 고유진동수를 증가시킨다.

參考文獻

- (1) Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W., 1999, "Natural Frequencies of Noncircular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 219, No.1, pp. 23-33.
- (2) Kang, K.J., Bert, C.W. and Striz, A.G., 1996, "Vibration Analysis of Horizontally Curved Beams with Waping using DQM," Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 122, No. 6, pp. 657-662.
- (3) Wang, T.M., 1975, "Fundamental Frequency of Clamped Elliptic Arcs for Vibration Outside the Plane of Initial Curvature," Journal of Sound and Vibration, Vol. 42, No. 4, pp. 515-519.
- (4) Laskey, A.J., Out-of-Plane Vibrations of Continuous Circular Curved Beams Considering Shear Deformation and Rotatory Inertia, M.S. Thesis, The University of New Hampshire, USA, 1981.