

맥동하는 유체를 포함하는 3 차원 배관 계의 진동 해석

Vibration Analysis of A 3-Dimensional Pipe Conveying Pulsating Fluid Flow

서영수*·정의봉**·윤상돈*

Young Soo Seo , Weui Bong Jeong , Sang Don Yoon

Key Words : fluid pulsation , FEM , fluid-structure interaction , vibration.

ABSTRACT

A pulsation of fluid in a pipe sometimes causes severe vibration of pipe. The inertia, damping and stiffness characteristics of pipe will be changed by the effect of fluid-structure interaction. The velocity and pressure of fluid will impose the force to a bended shape pipe. In this paper, a pipe with fluid flow is modeled by finite element method and the fluid force from pulsation is also modeled by the fluid dynamics. The vibration of pipe conveying pulsating fluid flow can be estimated by taking into consideration of fluid-structure interaction.

1. 서론

배관 계의 유체 유동은 여러 가지 힘을 발생시키고, 이 힘은 배관의 파단, 구조물의 손상 및 소음 발생 등의 진동 문제를 발생시킨다. 실제 펌프나 밸브 등에 발생하는 주기적인 유체 맥동에 의한 배관 진동은 공업상 많은 문제가 되고 있다. 또한, 관내 높은 속도의 유동은 관의 휨(buckle) 현상을 일으킨다. 따라서, 유체 유동이 있는 배관 계의 진동에 대한 방지와 예측 및 안정성에 대한 연구가 많이 이루어지고 있다.

본 논문에서는, 배관 내의 유체를 1 자유도를 갖는 유체로 모델링하여 유체 맥동에 의한 힘을 해석하였고, 배관은 6 자유도를 갖는 Beam 요소로 모델링하였으며 유체의 질량과 유체 속도에 대한 감쇠 및 강성 효과를 동시에 고려하였다. 또한, 유체 맥동에 의해 발생하는 가진력이 배관 계에 작용하는 강제 진동으로 고려하였고, 배관 내 유체와 배관을 유한 요소법(FEM)으로 해석하였다.

2. 유체 유한 요소법

2.1 배관 내의 유체의 기본 방정식

유체의 기본 방정식은 운동 방정식과 연속 방정식으로 다음과 같다.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla \frac{p}{\rho} \quad (1)$$

* 부산대학교 기계설계공학과 대학원

** 부산대학교 기계공학과

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2)$$

단,

\vec{V} : 유체의 속도 [m/s]

ρ : 유체의 밀도 [Kg/m³]

p : 압력 [N/m²]

유체를 1 차원 흐름이고 유체의 질량 효과와 대류 항을 무시하고 유체 속도 대신에 유량을 사용하면 식(1)과 식(2)는 다음과 같다.

$$\frac{\rho}{A} \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{A}{K} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + Q(x,t) \quad (4)$$

단,

q : 배관 내부 유체의 유량 [m³/s]

A : 배관 내부 유체의 단면적 [m²]

K : 유체의 체적 탄성 계수 [kg/ms²]

Q : 강제 유량 [m³/s/m]

배관 내의 유량과 압력을 다음과 같이 가정하였다.

$$q = N_i q_i + N_j q_j$$

$$p = N'_i p_i + N'_j p_j$$

여기서, N_i, N_j, N'_i, N'_j : 형상함수

가중 함수 q^*, p^* 를 형상 함수와 같은 형태를 갖는 Galerkin 법을 사용하면 다음과 같다.

$$\int_b^e q^* \left(\frac{\rho}{A} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (5)$$

$$\int_{l_e} p^* \left(\frac{A}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - Q(x,t) \right) dx = 0 \quad (6)$$

여기서, l_e 는 요소의 길이이다.

식 (5)과 식(6)을 정리하면 각 요소에 대한 기초 방정식을 구할 수 있으며, 다음과 같다.

$$[A]_e \{\dot{q}\}_e + [B]_e \{p\}_e = \{0\}_e \quad (7)$$

$$[C]_e \{\dot{p}\}_e + [D]_e \{q\}_e = \{H\}_e \quad (8)$$

단,

$$\{q\}_e = (q_i, q_j)^T, \{p\}_e = (p_i, p_j)^T$$

$$[A]_e = \frac{\rho}{A} \begin{bmatrix} \int N_i N_i dx & \int N_i N_j dx \\ \int N_j N_i dx & \int N_j N_j dx \end{bmatrix}$$

$$[B]_e = \begin{bmatrix} \int N_i \frac{N'_i}{\partial x} dx & \int N_i \frac{N'_j}{\partial x} dx \\ \int N_j \frac{N'_i}{\partial x} dx & \int N_j \frac{N'_j}{\partial x} dx \end{bmatrix}$$

$$[C]_e = \frac{A}{K} \begin{bmatrix} \int \frac{N'_i}{\partial x} \frac{N'_i}{\partial x} dx & \int \frac{N'_i}{\partial x} \frac{N'_j}{\partial x} dx \\ \int \frac{N'_j}{\partial x} \frac{N'_i}{\partial x} dx & \int \frac{N'_j}{\partial x} \frac{N'_j}{\partial x} dx \end{bmatrix}$$

$$[D]_e = \begin{bmatrix} \int \frac{N'_i}{\partial x} \frac{N_i}{\partial x} dx & \int \frac{N'_i}{\partial x} \frac{N_j}{\partial x} dx \\ \int \frac{N'_j}{\partial x} \frac{N_i}{\partial x} dx & \int \frac{N'_j}{\partial x} \frac{N_j}{\partial x} dx \end{bmatrix}$$

$$\{H\}_e = \begin{bmatrix} \int \frac{N'_i}{\partial x} Q_i dx \\ \int \frac{N'_j}{\partial x} Q_j dx \end{bmatrix}$$

2.2 배관 내 유체 전체의 기초 방정식

n 개의 요소로 분할된 배관의 각 절점의 유량과 압력은 $q_i, p_i (i=1, \dots, n)$ 로 나타낼 수 있으며, 각 요소의 합으로 전체 배관에 대한 기초 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[A]_G \{\dot{q}\}_G + [B]_G \{p\}_G = \{0\} \quad (9)$$

$$[C]_G \{\dot{p}\}_G + [D]_G \{q\}_G = \{H\}_G \quad (10)$$

경계 조건으로 유량이 가해지는 절점을 각각의 전체 행렬에서 행과 열을 삭제한다. 그리고, 위의 두 연립 방정식에 의하여 각 절점의 압력과 유량을 구할 수 있다.

3. 유체 가진력의 정식화

배관 부분에 포함 되어있는 유체가 가하는 힘의 총합은 관내의 유체가 갖는 운동량의 변화율과 같다. 벽면에서의 마찰력을 무시하면 유체가 가하는 힘은 다음과 같다.[4]

$$\begin{aligned} F &= F_{pressure} \\ &= -\int_{A_{cv}} p \hat{n} dA = -\int p \hat{n} dA_0 - \int p \hat{n} dA_1 - \int p \hat{n} dA_2 \\ &= \frac{d}{dt} \int_{cv} \rho \bar{v} dV + \int_{A_{cv}} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot \hat{n}) dA \end{aligned} \quad (11)$$

단,

A_{cv} : 배관 요소의 전체 표면적 (= $A_0 + A_1 + A_2$)

A_0 : 배관 경계 면적

A_1, A_2 : 유체의 입구 및 출구 면적

따라서, 배관의 경계 면을 따라서 작용하는 유체의 힘은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_{fluid} &= -\int p \hat{n} dA_0 \\ &= \int p \hat{n} dA_1 + \int p \hat{n} dA_2 \\ &\quad + \frac{d}{dt} \int_{cv} \rho \bar{v} dV + \int_{A_{cv}} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot \hat{n}) dA \\ &= F_1 + F_2 + F_3 \end{aligned} \quad (12)$$

예를 들어, Fig.1 과 같은 곡관 요소에 대하여 유체의 힘을 구해보면 다음과 같다. 우선 압력, 유량 그리고 단면적을 다음과 같이 가정한다.

$$q_1 = q_2 = q(\omega) e^{j\omega t} + q_0$$

$$p_1 - p_2 = p(\omega) e^{j\omega t}$$

$$A_1 = A_2 = A \quad (13)$$

여기서, q_0 는 압력과 유량의 정상 상태 성분을 나타낸다.

유체를 1 차원 흐름이므로 $\bar{v} \cdot \hat{n} = v$ 로 표현할 수 있고 유량 $q = Av$ 임을 고려하면 Fig.1 과 같은 배관에 작용하는 유체력의 x,y 방향 성분은 다음 식과 같다.

$$F_x = (F_1 + F_3)(1 - \cos \theta) + F_2 \sin \theta$$

$$F_y = -(F_1 + F_3) \sin \theta + F_2 (1 - \cos \theta) \quad (14)$$

단,

$$F_1 = Ap(\omega) e^{j\omega t}$$

$$F_2 = -j\omega \rho R q(\omega) e^{j\omega t}$$

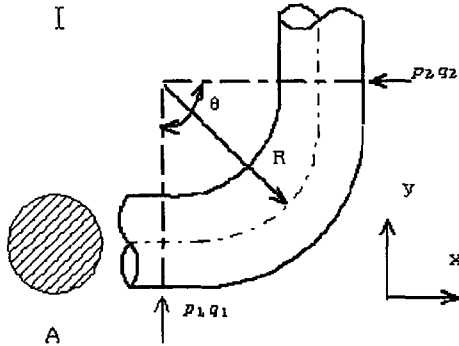


Fig.1 Curved Pipe Element

$$F_3 = -\frac{\rho}{A} (2q_0 q(\omega) e^{j\omega t} + q^2(\omega) e^{j2\omega t}) \quad (15)$$

4. 유체를 고려한 배관의 운동 방정식

Fig. 2 는 유체를 포함한 배관의 한 요소를 보여주고 있으며, (a)는 유체가 작용하는 힘을, (b)는 배관에 작용하는 힘을 각각 나타내고 있다.

4.1 유체와 배관의 횡 방향 운동 방정식

Fig. 2 의 (a),(b)에서 각각의 유체 요소와 배관 요소의 횡 방향 성분 힘 평형 식을 구해보면 다음과 같다.

$$F - pA \frac{\partial y}{\partial x^2} = \rho A \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 y \quad (16)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - F = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (17)$$

단,

F : 단위 길이당 힘

y : 배관 요소의 처짐

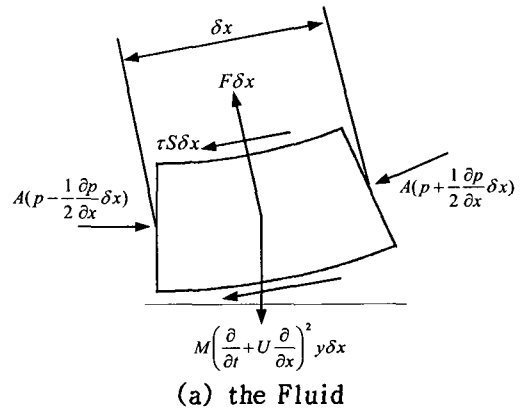
U : 유체의 평균 속도($=q_0 / A$)

G : 배관 요소의 전단력($= -EI \frac{d^3 y}{dx^3}$)

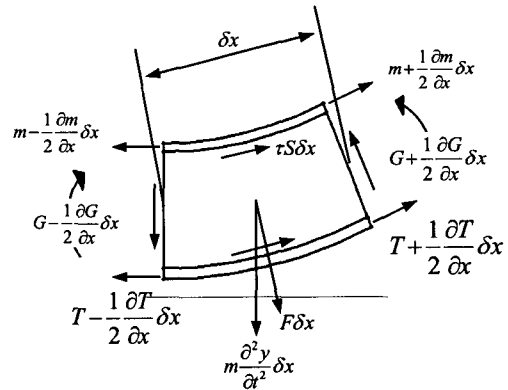
T : 배관 요소의 응력

m : 배관 요소의 단위 길이당 질량

식(16)과 식(17)에서 T 의 영향을 무시하고 F 를 소거하면 다음과 같은 횡 진동 방정식을 구할 수 있다.



(a) the Fluid



(b) the Pipe

Fig.2 Forces and Moments Acting on Element

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + pA \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 y + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

단,

E : 배관의 탄성 계수

I : 배관의 관성 모멘트

$y(x, t) = Y(x) e^{j\omega t}$ 로 가정하고 식(18)를 주파수 영역으로 나타내면 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + (\rho A U^2 + pA) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + j2\rho A \omega U \frac{\partial Y}{\partial x} - (m + \rho A) \omega^2 Y = 0 \quad (19)$$

4.2 유체와 배관의 축 방향 운동 방정식

유체 요소와 배관 요소의 축 방향 운동 방정식은 다음과 같다.

$$EA_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (20)$$

단,

A_p : 배관 구조 요소의 단면적

u : 배관 구조 요소의 축 방향 변위

식(20)를 주파수 영역으로 나타내면 다음과 같다.

$$EA_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (m + \rho A)\omega^2 u = 0 \quad (21)$$

5. 유체와 배관의 유한 요소 모델링

본 논문에서는 배관 계는 6 자유도의 Beam 으로 모델링되었으며, 유체 요소에 의해 첨가되는 부분은 아래의 횡 방향과 축 방향이다.

5.1 횡 방향 요소의 모델링

식(19)에 가중 함수를 Y^* 라 두고 정리하면 다음과 같은 횡 방향에 대한 가중 잔차 방정식을 구할 수 있다.

$$\int_e Y^* \left\{ EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + (\rho A U^2 + pA) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + j2\rho A \omega U \frac{\partial Y}{\partial x} - M\omega^2 Y \right\} dx = 0 \quad (22)$$

여기서, $M = m + \rho A$ 이다.

가중 함수와 보간 함수가 같은 형태를 갖는 Galerkin 법을 사용하여 식(22)를 정리하면 다음과 같은 지배 방정식을 구할 수 있다.

$$\left\{ ([K]_{p,b} - [K]_{f,b}) - \omega^2 ([M]_{p,b} + [M]_{f,b}) + j\omega [C]_{f,b} \right\} \{Y\} = \{0\} \quad (23)$$

단,

$[K]_{p,b}$: 횡 방향 배관 요소의 K

$[K]_{f,b}$: 횡 방향 유체에 의한 K

$[M]_{p,b}$: 횡 방향 배관 요소의 M

$[M]_{f,b}$: 횡 방향 유체에 의한 M

$[C]_{f,b}$: 횡 방향 유체에 의한 C

$\{N_{b,i}\}$: 횡 방향 변위에 대한 형상 함수

$$[K]_{f,b} = EI \int \frac{\partial^2 \{N_{b,i}\}^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \{N_{b,i}\}}{\partial x^2} dx$$

$$[K]_{f,b} = (\rho A U^2 + pA) \int \frac{\partial \{N_{b,i}\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{N_{b,i}\}}{\partial x} dx$$

$$[M]_{f,b} = \rho A \int \{N_{b,i}\}^T \{N_{b,i}\} dx$$

$$[M]_{f,b} = m \int \{N_{b,i}\}^T \{N_{b,i}\} dx$$

$$[C]_{f,b} = (2\rho A U) \int \{N_{b,i}\}^T \frac{\partial \{N_{b,i}\}}{\partial x} dx$$

5.2 축 방향 요소의 모델링

식(21)에 가중 함수를 u^* 라 두고 정리하면 다음과 같은 축 방향에 대한 가중 잔차 방정식을 구할 수 있다.

$$\int_e u^* \left\{ EA_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M\omega^2 u \right\} dx = 0 \quad (24)$$

Galerkin 법을 사용하여 식(24)를 정리하면 다음과 같은 지배 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left\{ [K]_{p,a} - \omega^2 ([M]_{p,a} + [M]_{f,a}) \right\} = \{0\} \quad (25)$$

단,

$[K]_{p,a}$: 축 방향 배관 요소의 K

$[M]_{p,a}$: 축 방향 배관 요소의 M

$[M]_{f,a}$: 축 방향 유체에 의한 M

$\{N_{a,i}\}$: 축 방향 변위에 대한 형상 함수

$$[K]_{p,a} = EA_p \int \frac{\partial \{N_{a,i}\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{N_{a,i}\}}{\partial x} dx$$

$$[M]_{p,a} = m \int \{N_{a,i}\}^T \{N_{a,i}\} dx$$

$$[M]_{f,a} = \rho A \int \{N_{a,i}\}^T \{N_{a,i}\} dx$$

6. 해석 결과

식(23)과 (25)에서 유체가 $[M], [K], [C]$ 에 모두 영향을 주는 것을 알 수 있다. 따라서, 본 논문에서는 먼저 배관과 유체의 연성된 결과를 보기 위해 간단한 3 차원 배관에 대하여 맥동의 영향을 고려하지 않고 해석해 보았다. 그리고 실제 적용 모델에서 맥동의 영향을 고려하여 실제 모델에 적용해 보았다.

6.1 간단한 3 차원 배관

Fig. 3는 배관과 유체의 연성된 결과를 보여주기 위해 해석한 모델을 보여 주고 있다. 경계 조건으로는 배관의 한쪽을 고정으로 두고 유량(Q)를 크기 1인 백색 잡음으로 가정하였으며 유체는 물로 가정하였다.

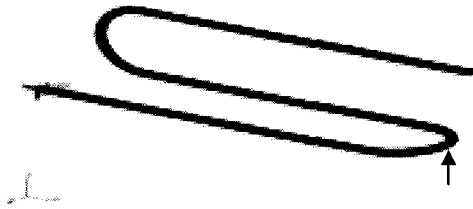
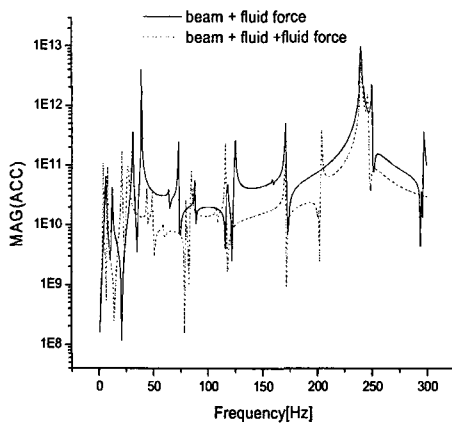
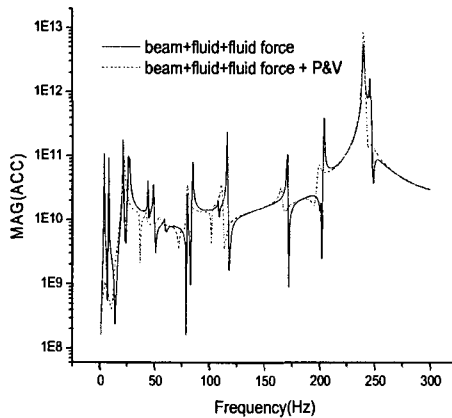


Fig.3 3-D Model(I)



(a) Effect of Fluid Mass



(b) Effect of Pressure and Velocity of Fluid

Fig.4 Acceleration of 3-D Model(I)

Fig.4 는 Fig.3 의 한 점에서 해석한 결과를 보여 주고 있다. Fig.4 의 (a)는 Beam 모델에 유량에 의해 발생하는 유체 가진력에 의한 가속도 응답과 유체가 포함된 Beam 모델의 가속도 응답을 비교하고 있다. 유체를 고려한 배관 구조의 해석 결과는 공진 점이 전체적으로 낮아지며 공진 점에서의 값도

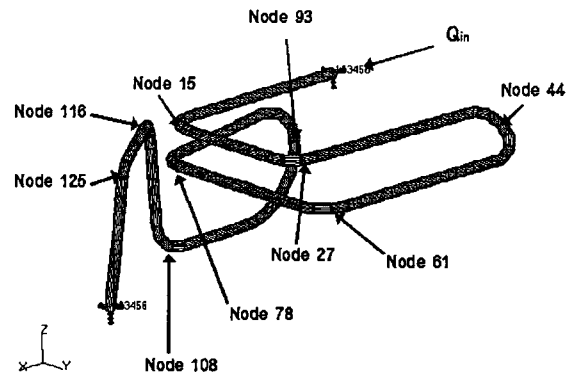


Fig.5 3-D Model(II)

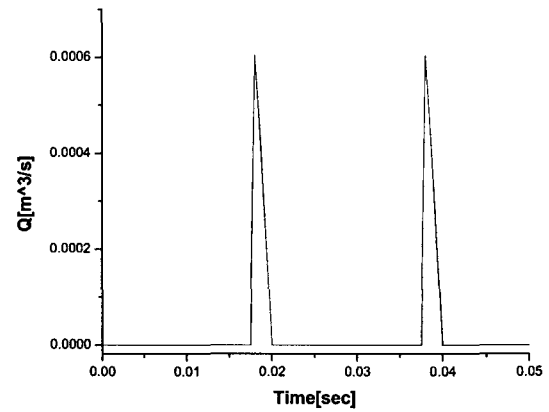


Fig.6 Flow Rate

줄어드는 것을 볼 수 있다. (b)는 유체를 포함한 Beam 모델의 가속도 응답과 유체 압력과 유체 속도를 고려하였을 때의 가속도 응답을 비교하고 있다. 유체 압력과 유체 속도가 고려되면, 감쇠의 효과가 두드러지게 나타남을 볼 수 있다.

6.2 실제 적용 모델

Fig.5 는 냉장고용 왕복동 압축기에 사용되는 배관의 모델이고 실린더에서의 크랭크 각에 따른 토출 유량은 다음 식과 같다

$$Q(\theta) = \begin{cases} -A_{cyl} r \omega (\sin \theta + \frac{r}{2l} \sin 2\theta) , & \theta_d \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 , & 0 \leq \theta \leq \theta_d \end{cases}$$

단,

- A_{cyl} : 실린더의 단면적 (26)
- l : Connecting Rod의 길이
- r : 크랭크의 반경
- θ : 크랭크의 각도
- θ_d : 밸브 토출 크랭크 각도

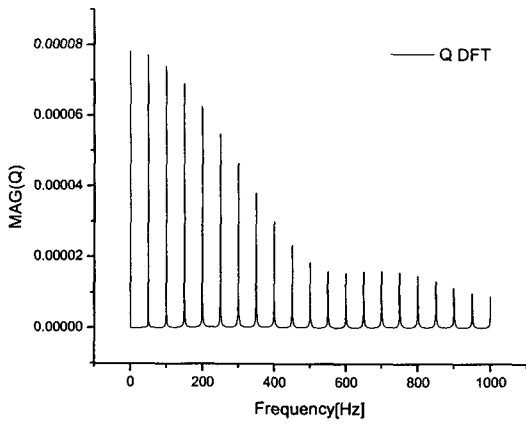
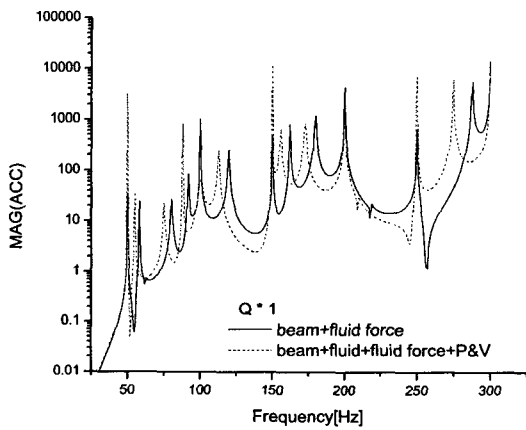
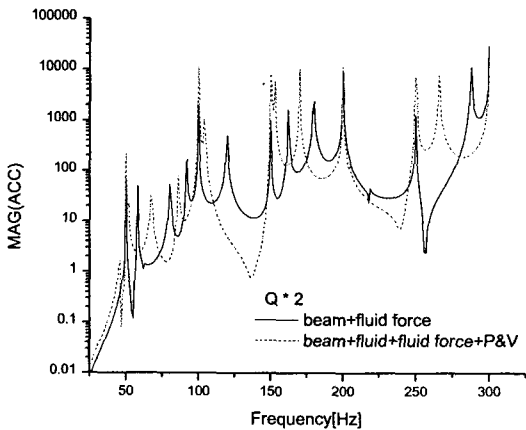


Fig.7 Spectrum of Flow Rate



(a) Flow Rate = $Q(t)$



(b) Flow Rate = $2Q(t)$

Fig.8 Acceleration of 3-D Model(II)

Fig.6 과 Fig.7 은 배관의 입구에 가해지는 유량의 시간과 주파수 영역에서의 그림이다. 유량은

50Hz 로 입구에 가해진다. Fig.8 은 해석한 결과이다. Fig.8 의 (a)는 Fig.6 의 유량이 입구에 가해진 경우이고 (b)는 Fig.6 의 유량의 2 배를 입구에 가해진 경우 Fig.5 의 Node 78 번에서의 가속도 응답이다. 유체, 압력 그리고 속도가 고려된 경우 공진 점이 떨어지는 것을 알 수 있다. 공진 점에서의 가속도 값이 감쇠의 영향을 받아서 공진 점에서의 값이 줄어드는 것을 확인할 수 있다.

7. 결론

배관 내의 유체 맥동에 의해서 발생하는 힘에 의한 배관을 해석하였다. 배관 내의 유체는 배관의 질량과 강성 그리고 감쇠에 영향을 미치는 것을 알 수 있었다. 유체의 속도와 압력에 의한 배관 응답의 특성을 규명하였고 실제 배관에 적용하였다.

참고 문헌

- (1) Robert D. Blevins, 1990, Flow-Induced Vibration Van Nostrand Reinhold, New York.
- (2) 서영수 등, 2002, "유체 맥동을 고려한 압축기 토출 배관의 진동 응답 해석", 춘계학술발표회 논문집, 한국소음진동공학회, pp. 1049~1054.
- (3) Maurice Petyt, 1990, Introduction to finite element vibration analysis, Cambridge University Press, Cambridge
- (4) 부정숙 외 譯, 1996, 유체역학, 반도출판사
- (5) 김남형 譯, 1995 유한 요소법 유체 해석, 원창출판사