

유체로 연성된 두 사각평판의 고유진동수 Natural Frequency of Two Rectangular Plates Coupled with Fluid

정경훈*·박근배**

Kyeong-Hoon Jeong and Keun-Bae Park

Key Words : Rectangular plates(사각평판), Hydroelastic(유체탄성), Free vibration analysis(고유진동해석), Finite Fourier series expansion(유한 푸리에 급수전개).

ABSTRACT

An analytical study is presented on the hydroelastic vibration of two rectangular identical plates coupled with a bounded fluid by using the finite Fourier series expansion method. It is observed that the two contrastive modes, the so called the out-of-phase and in-phase modes appear. The proposed analytical method is verified by observing a good agreement to three dimensional finite element analysis results. All natural frequency of the in-phase modes can be predicted well by the combination of the dry beam modes. The theoretical prediction for the out-of-phase mode can be improved by using the polynomial functions satisfying the plate boundary conditions and fluid volume conservation instead of using dry beam modes.

1. 서론

일반적으로 구조물은 유체와 접촉하거나 유체에 잠기게 되면 고유진동수가 현저히 감소하게 된다고 알려져 왔다. 이러한 현상을 유체구조물 상호작용 (fluid-structure interaction)이라 말하며 오래전부터 이론적인 접근과 실험을 통해서 많은 연구자들이 연구하여 왔다.

유체와 접하는 사각평판에 대한 연구는 단일 평판의 한면이 물과 접하거나 [1, 2, 3, 4] 물에 잠긴 경우 [5, 6, 7]가 대부분이다. 본 논문에서는 두 개의 동일한 사각평판이 유체로 연성된 경우, 고유진동수를 근사적으로 계산하는 이론을 제시하고, 이론의 타당성을 예제를 통해서 상용 유한요소해석 프로그램인 ANSYS로 확인하고자 한다.

2. 이론해석

2.1 사각평판의 고유진동 해석

Figure 1 은 두 개의 동일한 사각평판이 유체로 연성된 구조물을 보여주고 있다. 여기서 a, b 그리고 h 는 사각평판의 가로, 세로, 두께를 각각 나타낸다. 이론해석을 위해서 다음과 같이 가정하였다. (a) 유체의 유동이 매우 작다; (b) 유체는 비점성, 비압축성, 비회전성인 이상유체다; (c) 중력의 영향은 무시한다; (d) 사각평판은 선형 탄성거동을 한다; 그리고 (e) 평판의 전단변형은 무시한다.

사각평판의 변위 w_j 에 대한 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D \nabla^4 w_j + \rho h w_{j,u} = P_j, \quad j = 1, 2 \quad (1)$$

여기서 평판의 강성도 $D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$ 이고, ρ, μ, P_j 그리고 E 는 각각 판의 밀도, Poisson 비, 판에 작용하는 동적 유체압력, Young 윌을 나타낸다. 그리고 첨자 “1”은 직교좌표계 (x, y) 에서 상부평판을, “2”는 하부평판을 나타낸다. Rayleigh 지수를 이용하면 고유진동수에 대한 다음 식을 구할 수 있다[2];

$$\omega_o^2 = (V_p / T_p^*)_{air}, \quad \omega_w^2 = \left\{ V_p / (T_p^* + T_w^*) \right\}_{fluid} \quad (2a,b)$$

여기서 ω_o 과 ω_w 는 각각 평판의 공기중 고유진동수와 접수 고유진동수를 나타낸다. T_p^* 와 V_p 는 평판의 기준 운동에너지(reference kinetic energy)와 평판의 최대 변형에너지를 나타낸다. 또한 T_w^* 는 유체의 기준 운동에너지를 나타낸다. 이러한 운동에너지와 변형에너지를 정확하게 계산하기 위해서 공기중 평판의 변형모드와 접수평판의 변형모드를 적절하게 정의해야 한다. 따라서 공기중과 접수 모드형상으로 적절한 admissible function W_{mn} 을 정의해서 사용하려고 한다. 여기서 m 과 n 은 가로와 세로 방향에 대한 절선의 수를 나타낸다($m = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$). 평판의 동적 변위 w_1 과 w_2 를 다음 꼴로 나타낼 수 있다.

$$w_j(x, y, t) = W_{mn}(x, y) \exp(i\omega t), \quad (\text{상부평판})$$

* 한국원자력연구소, 동력로기술개발팀
E-mail : khjeong@kaeri.re.kr
Tel : (042) 868-8792

** 한국원자력연구소, 동력로기술개발팀

$$w_2(x, y, t) = q_{mn} W_{mn}(x, y) \exp(i\omega t) \quad (\text{하부평판}) \quad (3a, b)$$

여기서 $i = \sqrt{-1}$ 이고 ω 는 평판의 고유진동수다.

2.2 사각평판의 공기중 고유진동수

평판의 네 변이 고정된 경우, 평판의 가장자리에서 변위와 기울기가 영이 되어야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{mn}}{\partial x} \Big|_{x=0} = W_{mn} \Big|_{x=0} = \frac{\partial W_{mn}}{\partial x} \Big|_{x=a} = W_{mn} \Big|_{x=a} = 0, \\ \frac{\partial W_{mn}}{\partial y} \Big|_{y=0} = W_{mn} \Big|_{y=0} = \frac{\partial W_{mn}}{\partial y} \Big|_{y=b} = W_{mn} \Big|_{y=b} = 0 \end{aligned} \quad (4a, b)$$

따라서 고정된 평판의 공기중 동적 변위는 고정된 보의 공기중 모드함수의 곱으로 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} W_{mn} = & \left[\cosh\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) - \sigma_m \left\{ \sinh\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) \right\} \right] \left[\cosh\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) \right. \\ & \left. - \sigma_n \left\{ \sinh\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 계수값 $\lambda_m = 4.73004, 7.85320, 10.99561, 14.13717, \dots$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), $\sigma_m = 0.98250, 1.00078, 0.99997, 1.00000, \dots$ 이다. n 값에 대해서도 계수값 λ_n 와 σ_n 은 동일하다. 사각평판 하나의 최대 변형에너지는 다음 식으로부터 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} V_p = & \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left[\left\{ \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \right\}^2 + 2\mu \right. \\ & \left. \times \left\{ \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \right\} + 2(1-\mu) \left\{ \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x \partial y} \right\}^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 최대 변형에너지는 식(5)를 식(6)에 대입하고 적분하여 얻을 수 있다. 한편 평판의 기준 운동에너지는 다음 식으로 주어진다.

$$T_p^* = \frac{1}{2} \rho h \int_0^b \int_0^a W_{mn}^2 dx dy = \frac{1}{2} \rho h a b \quad (7)$$

공기중 평판의 고유진동수는 식(6)과 (7)을 계산한 후에 식(2a)에 대입하여 얻을 수 있다.

2.3 속도포텐셜

이상유체로 연성된 두 평판의 동적 거동을 알아 보려면 먼저 유체의 동적 거동을 정의해야 한다. 유체의 영역이 강체벽으로 막혀있는 경우, 유체의 유동을 속도포텐셜로 나타낼 수 있는데 이상 유체에서는 다음의 Laplace 방정식을 만족시켜야 한다.

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, x, t) = 0 \quad (8)$$

식(8)의 일반해는 다음과 같이 변수분리할 수 있다.

$$\Phi(x, y, z, t) = i\omega \phi(x, y, z) \exp(i\omega t) \quad (9)$$

유체운동의 동위상 모드와 역위상 모드는 다음의 대칭조건을 만족해야 한다.

$$\frac{\partial \phi(x, y, -z)}{\partial z} = \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z}, \quad (\text{동위상 모드})$$

$$\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (\text{역위상 모드}) \quad (10a, b)$$

따라서 식(8)과 (10a,b)를 만족하는 유체의 속도포텐셜은 동위상과 역위상 모드에서 다음 식으로 나타난다.

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \sum_{r=1}^{\infty} \xi_{ro} \cos(\alpha_r x) \sinh(\alpha_r z) \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_{os} \cos(\beta_s y) \sinh(\beta_s z) \\ & + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \xi_{rs} \cos(\alpha_r x) \cos(\beta_s y) \sinh(\gamma_{rs} z), \end{aligned} \quad (\text{동위상 모드})$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \sum_{r=1}^{\infty} \xi_{ro} \cos(\alpha_r x) \cosh(\alpha_r z) \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_{os} \cos(\beta_s y) \cosh(\beta_s z) \\ & + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \xi_{rs} \cos(\alpha_r x) \cos(\beta_s y) \cosh(\gamma_{rs} z) \end{aligned} \quad (\text{역위상 모드}) \quad (11a, b)$$

여기서 ξ_{ro} , ξ_{os} 그리고 ξ_{rs} 는 미정계수로서 유체-구조물 사이의 적합조건으로부터 구할 수 있다. 그리고

$$\alpha_r = r\pi/a, \quad \beta_s = s\pi/b, \quad \gamma_{rs} = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_s^2} \quad (12a-c)$$

강체벽면에서 법선방향의 유속은 영이 되어야 하기 때문에 다음 식을 만족해야 한다.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \quad (13a,b)$$

그런데 식(11a,b)의 속도포텐셜은 자동적으로 식(13a,b)를 만족한다.

2.4 해석방법-동위상의 경우

식(3b)에서 계수 q_{mn} 은 모드변위의 대칭성으로부터 동위상의 경우 1의 값을 갖아야 된다. 유체와 평판이 맞닿는 접촉부에서 유체의 상하방향 변위는 평판의 상하방향 변위와 동일해야 하는 적합조건으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$z = d/2 \text{에서 } W_{mn} = \partial \phi / \partial z, \\ z = -d/2 \text{에서 } W_{mn} = \partial \phi / \partial z \quad (14a,b)$$

식(5), (11a,b)를 식(14a,b)에 대입하면 동위상 모드에 대하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left[\cosh(\lambda_m x/a) - \cos(\lambda_m x/a) - \sigma_m \{ \sinh(\lambda_m x/a) - \sin(\lambda_m x/a) \} \right] \left[\cosh(\lambda_n y/b) - \cos(\lambda_n y/b) - \sigma_n \{ \sinh(\lambda_n y/b) - \sin(\lambda_n y/b) \} \right] \\ & = \sum_{r=1}^{\infty} \xi_{ro} \alpha_r \cos(\alpha_r x) \cosh(\alpha_r d/2) \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_{os} \beta_s \cos(\beta_s y) \cosh(\beta_s d/2) \\ & + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \xi_{rs} \gamma_{rs} \cos(\alpha_r x) \cos(\beta_s y) \cosh(\gamma_{rs} d/2) \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)의 함수를 유한 cosine 푸리에 급수로 전개하면

$$\begin{aligned} \cosh(\lambda_m x/a) &= a_{m0} + \sum_{r=1}^{\infty} a_{mr} \cos(\alpha_r x), \\ \cos(\lambda_m x/a) &= b_{m0} + \sum_{r=1}^{\infty} b_{mr} \cos(\alpha_r x), \\ \sinh(\lambda_m x/a) &= c_{m0} + \sum_{r=1}^{\infty} c_{mr} \cos(\alpha_r x), \\ \sin(\lambda_m x/a) &= g_{m0} + \sum_{r=1}^{\infty} g_{mr} \cos(\alpha_r x), \end{aligned} \quad (16a-d)$$

$$\begin{aligned} a_{m0} &= \sinh(\lambda_m)/\lambda_m, & b_{m0} &= \sin(\lambda_m)/\lambda_m, \\ c_{m0} &= \{ \cosh(\lambda_m) - 1 \} / \lambda_m, & g_{m0} &= \{ 1 - \cos(\lambda_m) \} / \lambda_m, \\ a_{mr} &= 2 \lambda_m \sinh(\lambda_m) (-1)^r / \{ (\pi r)^2 + \lambda_m^2 \}, \\ b_{mr} &= \frac{\sin(\pi r - \lambda_m)}{\pi r - \lambda_m} + \frac{\sin(\pi r + \lambda_m)}{\pi r + \lambda_m}, \\ c_{mr} &= 2 \lambda_m \{ \cosh(\lambda_m) (-1)^r - 1 \} / \{ (\pi r)^2 + \lambda_m^2 \}, \\ g_{mr} &= \left[\frac{\cos(\pi r - \lambda_m) - 1}{\pi r - \lambda_m} \right] - \left[\frac{\cos(\pi r + \lambda_m) - 1}{\pi r + \lambda_m} \right] \end{aligned} \quad (17a-h)$$

y 방향의 푸리에 계수들도 같은 방법으로 구할 수 있다. 결국 미정계수 ξ_{ro} , ξ_{os} 그리고 ξ_{rs} 는 판의 모드 변수로 나타낼 수 있다.

유체의 기준 운동에너지는 유체의 경계운동으로부터 계산할 수가 있다.

$$\begin{aligned} T_F^* &= \frac{1}{2} \rho_o \int_0^a \int_0^b W_{mn} \phi(x, y, d/2) dx dy \\ &+ \frac{1}{2} \rho_o \int_0^a \int_0^b W_{mn} \phi(x, y, -d/2) dx dy \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 ρ_o 는 유체의 밀도다. 두 평판의 기준 운동에너지는 평판 하나의 경우인 식(7)의 두배가 된다. 또한 두 평판의 최대 변형에너지도 식(6)의 두배가 되어야 한다. 유체로 형성된 두 평판의 동위상 고유진동수는 식(18)로부터 구한 유체의 운동에너지와 두 평판의 변형에너지 및 운동에너지를 계산하고 식(2b)에 대입하여 구할 수 있다.

2.5 해석방법-역위상의 경우

동위상의 경우와는 달리 역위상의 경우는 공기중 보의 모드함수로 근사화시킬 수 없다. 그 이유는 유체가 강체벽으로 갇혀 있기 때문에 유체의 체적이 보존되어야 하지만 공기중 보의 모드함수는 이러한 유체체적 보존요건을 모든 역위상 모드의 경우에 대하여 항상 만족시킬 수가 없기 때문이다. 따라서 이러한 공기중 보의 모드함수 대신 평판의 경계조건과 유체체적 보존요건을 만족시키는 다음의 다항식을 근사 모드함수로 채택하였다.

$$\begin{aligned} X_0(x) &= \frac{1}{A_0} \left[(x/a)^2 - 2(x/a)^3 + (x/a)^4 \right], \\ X_1(x) &= \frac{1}{A_1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \frac{5}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^4 - \left(\frac{x}{a} \right)^5 \right], \\ X_2(x) &= \frac{1}{A_2} \left[\frac{3}{14} (x/a)^2 - \frac{10}{7} (x/a)^3 + \frac{45}{14} (x/a)^4 \right] \end{aligned}$$

$$X_3(x) = \frac{1}{A_3} \left[-\frac{3}{32}(x/a)^2 + \frac{7}{8}(x/a)^3 - \frac{95}{32}(x/a)^4 + \frac{75}{16}(x/a)^5 - \frac{7}{2}(x/a)^6 + (x/a)^7 \right], \quad (19a-d)$$

여기서

$$A_k = \sqrt{\int_0^a \{X_k(x)\}^2 dx}, \quad A_k (k=0,1,2,3,..) \quad (20)$$

y 방향에 대해서도 같은 방법으로 정의할 수 있다. 동위상 모드와 같은 방법으로 평판의 모드함수도 다음과 같이 정의한다.

$$W_{mn}(x,y) = X_m(x) Y_n(y) \quad (21)$$

또한 역위상 모드는 상부 평판과 하부 평판의 위상이 180도가 되어야 하므로

$$q_{mn} = -1 \text{ (역위상 모드)} \quad (22)$$

유체와 평판의 적합조건인 식(14a,b)에 식(29a-d)와 (21)을 대입한 후에 유한 cosine 푸리에 급수전개를 수행하고 동위상의 경우와 동일한 절차를 밟으면 역위상의 경우에 대한 고유진동수도 얻을 수 있다.

3. 해석결과 및 고찰

3.1 이론 해석 및 유한요소 해석

앞에서 제시된 이론해석을 수행하기 위하여 상용 소프트웨어인 Mathcad(2000 version)를 이용하였다. 예제로 사용된 모델은 다음과 같다. 평판: 두께=2mm, 면적=240mm×320mm, 밀도=2700kg/m³, Poisson 비 = 0.3, Young 율 = 69.0GPa, 유체의 밀도=1000kg/m³, 평판사이의 거리=40mm 이다. 유한요소 해석을 위하여 상용 소프트웨어인 ANSYS (release5.7)가 사용되었다. 유한요소 해석모델을 쉘 요소(SHELL63)와 3 차원 유체요소(FLUID80)로 만들었고 해석모델에 맞는 경계조건과 적합조건을 부여하였다. 각 평판은 1200 개의 쉘요소로 이루어졌고 유체영역은 6000 개의 유체요소로 분할되었으며 50 개의 고유진동 모드가 추출되었다.

3.2 이론 해석 및 유한요소 해석결과 비교

공기중의 이론 및 유한요소해석을 통해 얻은 고유진동수를 Table 1 에 나타냈다. 이론 및 유한요소 해석으로 얻은 고유진동수는 $0 \leq n \leq 3, 0 \leq m \leq 3$ 의 모드범위에서 최대 0.7%의 오차를 보여 이론

및 유한요소 해석결과가 서로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 동일한 모드범위에서 유체로 연성된 두 사각판의 동위상 고유진동수를 비교하여 Table 2 에 정리하였다. 최대오차는 2.94%로 (3,3) 모드에서 나타나고 있음을 알 수 있고, 모든 이론값의 고유진동수가 유한요소해석 값보다 약간 크게 나타났다. 이는 공기중 및 동위상 모드 형상에서 차이가 거의 없음을 보여주고 있다. 같은 모드범위에 대하여 역위상 고유진동수는 Table 3 에 나타나 있다. 대부분 이론값과 유한요소 해석결과가 3% 이내에서 잘 일치하고 있지만 (0,3) 모드에서는 7.38%까지 증가하고 있는데, 이는 다항식을 이용한 근사화가 특정한 모드에서 실제 모드와 차이가 있음을 보여준다.

Figure 2 와 3 은 유체로 연성된 평판의 동위상 및 역위상 모드형상을 보여주고 있다. 그림에서 볼 수 있듯이 동위상 모드형상은 공기중 모드형상과 다르지 않지만, 몇몇 역위상 모드형상은 공기중의 모드형상에서 벗어나 왜곡되어 나타나고 있음을 알 수 있는데, 이는 유체의 체적보존의 요건을 만족시키기 위해서 나타나는 현상으로 이해할 수 있다.

4. 결론

유체로 연성된 동일한 두 사각평판의 고유진동 특성을 파악하기 위한 해석적 방법을 제시하였고, 해석 방법의 타당성을 검증하기 위하여 상용 유한요소해석 프로그램을 이용하여 검증하였다. 그 결과, 유한요소 해석결과와 이론적인 방법으로 구한 이론해가 잘 일치하고 있음을 확인하였다.

후기

본 연구는 과학기술부의 원자력연구개발사업의 일환으로 수행되었다.

참고문헌

- (1) 김극천 등, 1978, “직사각형판의 탄성접수진동에서 주연지지조건의 영향”, 대한조선학회지, Vol. 15, pp. 1-11.
- (2) Kwak, M. K., 1996, “Hydroelastic vibration of rectangular plates” Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 63, pp. 110-115.
- (3) Maylan, M. H., 1997, “The forced vibration of a thin plate floating on an infinite liquid”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 205(5), pp. 58-591.
- (4) Robinson, N. J. and Palmer, S. C., 1990, “A modal analysis of a rectangular plate floating on an

incompressible liquid”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 142, pp. 435–460.

(5) Fu, Y. and Price, W. G., 1987, “Interactions between a partially or totally immersed vibrating cantilever plate and the surrounding fluid”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 118, pp. 495–513.

(6) Muthuveerappan, G., Ganesan, N. and Veluswami, M. A., 1978, “Vibration of square cantilever plate immersed in water”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 61, pp. 467–470..

(7) Liang, C. C., Liao, C. C., Tai, Y. S. and Lai, W. H., 2001, “The free vibration analysis of submerged cantilever plates”, Ocean Engineering, Vol. 28, pp. 1225–1245.

Table 1. Comparison of FEM and theoretical natural frequencies for a clamped rectangular plate in air

Mode		Natural Frequency (Hz)		Error (%)
<i>n</i>	<i>m</i>	FEM	Theory	
0	0	242.6	243.4	0.33
	1	570.8	573.3	0.44
	2	1069.9	1074.2	0.40
	3	1736.3	1742.4	0.35
1	0	407.0	409.1	0.52
	1	722.3	726.9	0.64
	2	1216.0	1223.5	0.62
	3	1879.9	1891.1	0.60
2	0	677.6	681.3	0.55
	1	978.2	984.2	0.61
	2	1462.5	1470.3	0.53
	3	2121.3	2133.0	0.55
3	0	1047.3	1053.0	0.54
	1	1336.5	1345.5	0.67
	2	1810.6	1820.0	0.52
	3	2463.1	2474.9	0.48

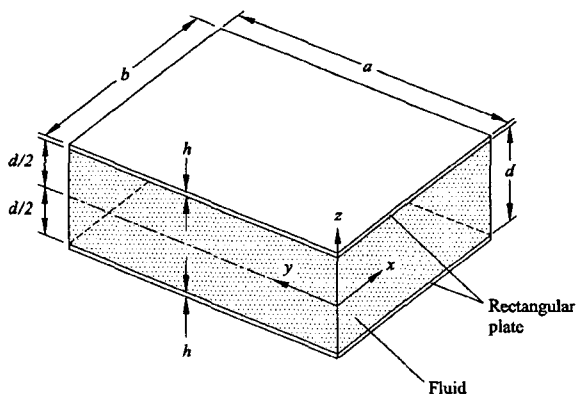


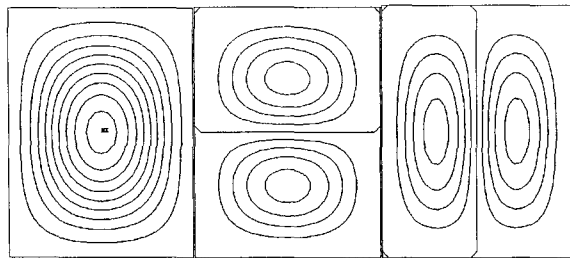
Figure 1 Two identical rectangular plates coupled with fluid

Table 2. Comparison of FEM and theoretical natural frequencies for two identical rectangular plates coupled with fluid for the in-phase modes

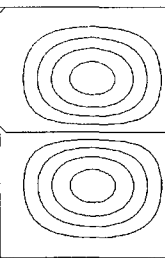
Mode		Natural Frequency (Hz)		Error (%)
<i>n</i>	<i>m</i>	FEM	Theory	
0	0	113.3	114.1	0.71
	1	192.5	194.5	1.04
	2	326.5	330.9	1.35
	3	516.1	524.7	1.67
1	0	272.4	275.4	1.10
	1	348.4	353.9	1.58
	2	479.6	488.5	1.86
	3	668.8	683.8	2.24
2	0	525.9	533.3	1.41
	1	603.0	614.7	1.94
	2	735.4	751.4	2.18
	3	926.7	949.9	2.50
3	0	882.8	898.4	1.77
	1	962.8	985.1	2.32
	2	1099.0	1127.6	2.60
	3	1294.5	1332.5	2.94

Table 3. Comparison of FEM and theoretical natural frequencies for two identical rectangular plates coupled with fluid for the out-of-phase modes

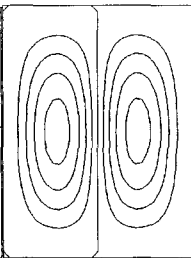
Mode		Natural Frequency (Hz)		Error (%)
<i>n</i>	<i>m</i>	FEM	Theory	
0	0	N/A	N/A	N/A
	1	58.6	59.4	1.36
	2	155.0	159.4	2.84
	3	310.1	287.2	-7.38
1	0	104.0	106.6	2.50
	1	167.6	170.1	1.49
	2	286.2	281.3	-1.71
	3	463.2	465.9	0.58
2	0	301.7	307.8	2.02
	1	389.2	381.9	-1.88
	2	510.7	494.5	-3.17
	3	719.3	710.5	-1.22
3	0	625.0	593.4	-5.06
	1	722.9	725.6	0.37
	2	883.3	890.7	-0.84
	3	1106.9	1122.5	1.41



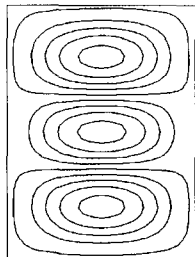
1st (113.3 Hz)



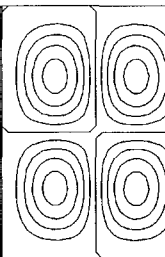
2nd (192.5 Hz)



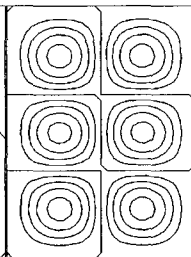
3rd (272.4 Hz)



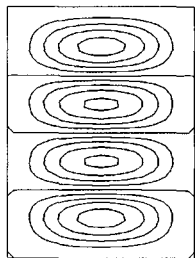
4th (326.5 Hz)



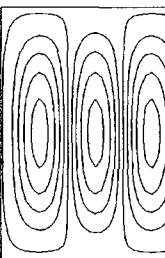
5th (348.4 Hz)



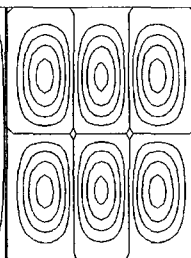
6th (479.6 Hz)



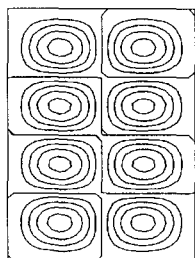
7th (516.1 Hz)



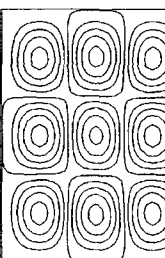
8th (525.9 Hz)



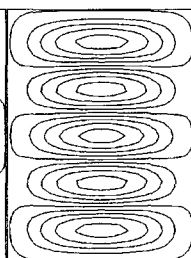
9th (603.0 Hz)



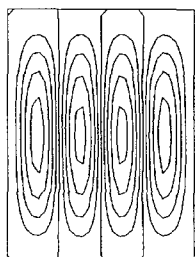
10th (668.8 Hz)



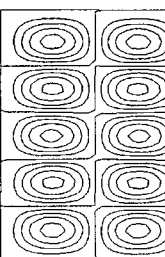
11th (735.4 Hz)



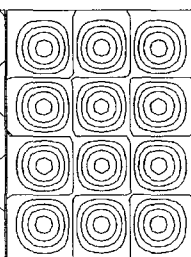
12th (764.8 Hz)



13th (882.8 Hz)

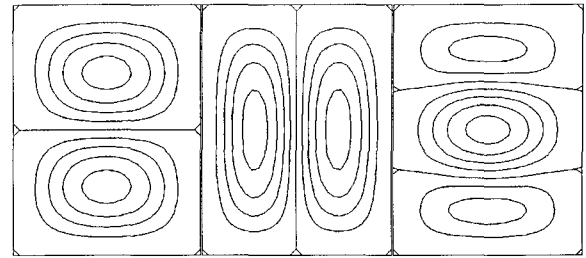


14th (918.8 Hz)

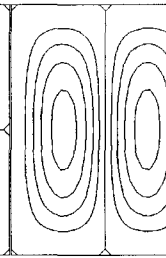


15th (926.7 Hz)

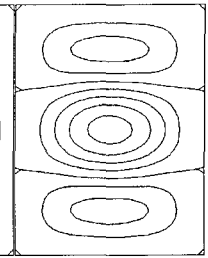
Figure 2 In-phase mode shapes for two circular plates coupled with fluid (FEM results)



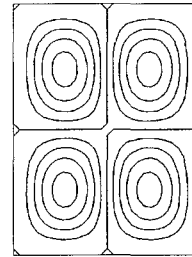
1st (58.6 Hz)



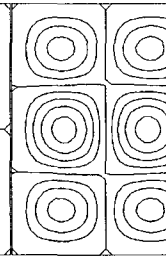
2nd (104.0 Hz)



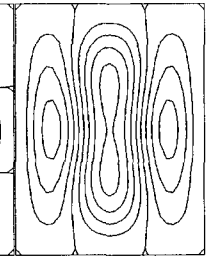
3rd (155.0 Hz)



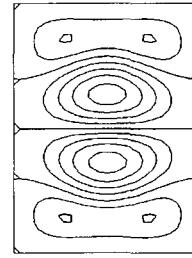
4th (167.6 Hz)



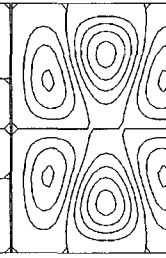
5th (286.2 Hz)



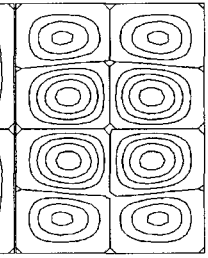
6th (301.7 Hz)



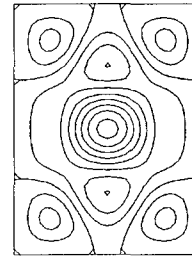
7th (310.1 Hz)



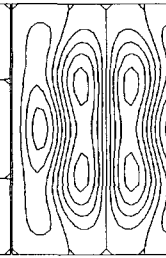
8th (389.2 Hz)



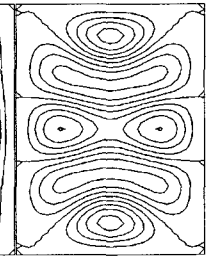
9th (463.2 Hz)



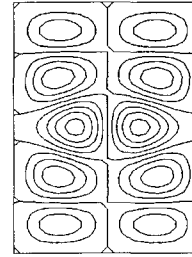
10th (510.7 Hz)



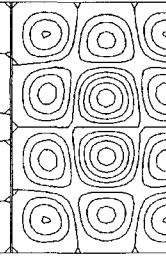
11th (562.0 Hz)



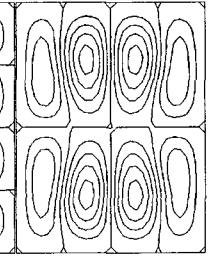
12th (625.0 Hz)



13th (709.8 Hz)



14th (719.3 Hz)



15th (722.9 Hz)

Figure 3 Out-of-phase mode shapes for two circular plates coupled with fluid (FEM results)